

指数分布下贝叶斯截尾序贯检验研究

方茂达^{1*}, 胡思贵², 李秋德², 陈慧娟¹

¹贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

²贵州医科大学生物与工程学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2022年12月7日; 录用日期: 2023年2月3日; 发布日期: 2023年2月9日

摘要

针对具有“高可靠、长寿命”试验特点的计量型产品, 为降低产品的抽样验收试验成本, 研究了贝叶斯截尾序贯检验。在产品已通过鉴定试验的条件下, 使用贝叶斯方法对鉴定试验数据进行分析, 给出了指数分布下贝叶斯截尾序贯检验 T^B 的求解步骤。通过与原验收试验方案进行比较研究, 验证了贝叶斯截尾序贯检验 T^B 的优良性。结果表明, 对高质量水平的产品, 所提出的检验 T^B 在保持与原验收试验方案相当的通过验收试验概率的条件下, 能够大幅缩减产品的平均试验时间及样本量截尾值, 从而很好地降低了产品的抽样验收试验成本。

关键词

鉴定和验收试验, 截尾序贯检验, 平均试验时间, 动态规划

Study on the Bayesian Truncated Sequential Test under Exponential Distribution

Maoda Fang^{1*}, Sigui Hu², Qiude Li², Huijuan Chen¹

¹School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

²School of Biology and Engineering, Guizhou Medical University, Guiyang Guizhou

Received: Dec. 7th, 2022; accepted: Feb. 3rd, 2023; published: Feb. 9th, 2023

Abstract

For the sampling acceptance test of high-reliability and long-lifetime product, the Bayesian truncated sequential test is studied to reduce the test cost. By analyzing the test information with Bayesian method, the Bayesian truncated sequential test T^B under exponential distribution is de-

*通讯作者。

signed. The Bayesian truncated sequential test T^B is validated by comparing with the original test plan. The results show that, for high quality products, the test plans proposed here can greatly reduce the expected test time and maximum sample size with the same probability of passing test as that of original test plan. So, it also can reduce the cost of sampling acceptance test.

Keywords

Testing for Qualification and Acceptance, Truncated Sequential Test, Expected Test Time, Dynamic Programming

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在复杂产品特别是高技术产品的研发与生产过程中，需要对研制出的样品进行鉴定试验，以判断样品是否达到了预定的质量技术要求。当产品通过鉴定试验后，方可按样品的生产条件投入批量生产。每生产一批均要安排验收试验以判定该批产品是否也达到了预定的质量技术要求。只有当该批产品通过验收试验后，才能交付使用。对“高可靠、长寿命”试验特点的计量型产品，如各类电子元器件、电子产品及大型电子系统，其寿命通常服从指数分布。为了判断该类产品的寿命是否足够长，我国的军用标准 GJB899A [1] 与美国军用标准 MIL-HDBK-781A [2] 均规定：鉴定试验必须采用定时截尾寿命试验；而验收试验可采用定时截尾试验，也可采用截尾序贯试验或者全数试验。通常此类产品寿命试验的试验时间都很长，因此，其试验花费也非常大。在上述标准中，为提高检验的效率，验收试验一般采用截尾的序贯概率比检验(Truncated sequential probability ratio test, T-SPRT)方案。但 T-SPRT 方案仍然存在许多不足之处[3] [4] [5] [6]，如根据产品质量要求的鉴别比及检验水平不同组合，我国军标 GJB899A 提供的 8 个 T-SPRT 方案犯两类错误的概率均超过给定的检验水平，且平均试验时间仍较长。对此，文献[7] [8] 提出了动态规划方法对截尾序贯最优检验进行求解。结果表明，在给定的检验水平下，截尾序贯最优检验相比于 T-SPRT 能够严格控制检验犯两类错误的概率并减少检验的平均试验时间或试验样本量。此外，在产品已通过鉴定试验及生产条件比较稳定的条件下，美国军标 MIL-HDBK-781A 指出，可以采用“保证试验”来代替验收试验。当产品质量较高时，保证试验有着极高的试验通过率以及极短的试验时间的优点。但保证试验可能会出现产品通过验收时的平均寿命极大似然估计小于不通过时的平均寿命极大似然估计的“倒挂”现象，而原有的定时截尾试验、截尾序贯试验与全数试验方案则不会存在这种“倒挂”现象[9]。

如上所述，在进行验收试验之前，产品已在鉴定试验中获得通过。因此，在产品进行验收试验时，可获得鉴定试验及多批次验收检验中产品的相关质量信息。文献[10]通过考虑验前信息将贝叶斯方法的思想引入到 SPRT 方法中，提出了序贯后加权检验(SPOT)方法，文献[11]对指数分布下可靠性指标验证的截尾 SPOT 方法进行了研究。结果表明，该方法相比于 T-SPRT 能够大幅降低试验所需样本量，从而节省抽样检验的试验成本。但 SPOT 方法存在计算复杂、没有给出检验接受或拒绝原假设的后验概率等问题，不利于实际应用。在成败型产品成功率参数 P 的抽样验收检验中，为避免保证试验自身所存在的“倒挂”现象的不足，文献[12]通过采用贝叶斯分析方法对鉴定试验数据进行综合，构造了截尾序贯型的保证性试验方案，研究结果表明，该方案与原有的截尾序贯验收试验方案相比具有相当的通过验收试验的概

率水平,同时能大幅度地减少了产品抽样检验的平均试验样本量。对具有“高可靠、长寿命”试验特点的指数分布计量型产品,可否利用产品鉴定试验数据建立相应的贝叶斯截尾序贯检验方案来代替原有的验收试验方案,以降低产品抽样验收检验的成本呢?这正是本文所研究的主要问题。因此,本文采用贝叶斯分析方法对产品鉴定试验数据进行综合,对指数分布下贝叶斯截尾序贯检验进行研究。

本文余下内容安排如下:在第2节介绍指数分布下截尾序贯检验的基本概念;在第3节采用贝叶斯方法对鉴定试验数据进行综合,给出了贝叶斯截尾序贯检验的定义以及求解步骤;在第4节采用实例分析的方式,将贝叶斯截尾序贯检验方案与原验收试验方案进行比较,对方案的优良性进行验证;第5节为总结部分。

2. 指数分布截尾序贯检验

设产品的寿命 X 服从参数为 θ 的指数分布 $\exp(\theta)$, 概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, θ 为产品的平均失效时间(Mean time to failure, MTTF)。在产品的抽样验收试验中,为了检验 MTTF θ 是否足够长,考虑以下假设检验问题:

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta = \theta_1 \quad (d = \theta_0/\theta_1, \theta_0 > \theta_1 > 0) \quad (2)$$

以及给定的显著性水平 α_0 和检验功效 $(1 - \beta_0)$ 。其中, d 为检验的鉴别比, α_0 又称为生产方的名义风险,表示产品合格时却被拒收的概率上限; β_0 又称为使用方的名义风险,表示产品不合格时却被使用方接收的概率上限,本文将 (α_0, β_0) 称之为检验水平。

在截尾序贯检验中,每抽取一个样本就进行一次检验,记 X_1, X_2, \dots 为依次得到的产品寿命,则它们是独立同分布的随机变量序列,概率密度函数如(1)所示。令 $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$ 表示前 m 个产品的累积寿命,其概率密度函数为

$$h(z) = \begin{cases} \frac{z^{(m-1)} e^{-\frac{z}{\theta}}}{\theta^m (m-1)!}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (3)$$

截尾序贯检验方案 T 的定义如下:

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{r_0} \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{r_0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 r_0 为样本量截尾值(Maximum sample size, MSS), u_1, u_2, \dots, u_{r_0} 以及 l_1, l_2, \dots, l_{r_0} 是分别组成方案 T 上下边界的两条序列,它们满足以下条件: $0 \leq l_i \leq l_{i+1}, 0 < u_i \leq u_{i+1}, l_i < u_i (i = 1, 2, \dots, r_0 - 1)$ 以及 $l_{r_0} = u_{r_0}$ 。

当随机抽取的第 m 个样本在寿命试验中失效时,产品的累积寿命 s_m 已知,截尾序贯检验方案 T 的统计判别规则为:如果 $l_m < s_m < u_m$,则继续抽取下一个样本进行检验;如果 $s_m \geq u_m$,序贯检验将停止并接受 H_0 ;如果 $s_m \leq l_m$,序贯检验将停止并拒绝 H_0 。此时接受和拒绝 H_0 的事件可以表示为

$$\begin{cases} A_m = \{l_1 < S_1 < u_1, \dots, l_{m-1} < S_{m-1} < u_{m-1}, S_m \geq u_m\}, m = 1, 2, \dots, r_0 \\ R_m = \{l_1 < S_1 < u_1, \dots, l_{m-1} < S_{m-1} < u_{m-1}, S_m \leq l_m\}, m = 1, 2, \dots, r_0 \end{cases} \quad (5)$$

则序贯检验(4)的操作特征函数(OC)为

$$\beta(T, \theta) = \sum_{m=1}^{r_0} P(A_m | T, \theta) \tag{6}$$

特别地，对于统计假设(1)，检验 T 犯两类错误的真实概率 α, β 为

$$\begin{cases} \alpha(T, \theta_0) = \sum_{m=1}^{r_0} P(R_m | T, \theta_0) \\ \beta(T, \theta_1) = \sum_{m=1}^{r_0} P(A_m | T, \theta_1) \end{cases} \tag{7}$$

以及在 $\theta = \theta_0$ 及 $\theta = \theta_1$ 处的平均试验时间(ETT)为

$$\begin{cases} ETT(T, \theta_0) = \sum_{m=1}^{r_0} (S_m P\{R_m | T, \theta_0\} + u_m P\{A_m | T, \theta_0\}) \\ ETT(T, \theta_1) = \sum_{m=1}^{r_0} (S_m P\{R_m | T, \theta_1\} + u_m P\{A_m | T, \theta_1\}) \end{cases} \tag{8}$$

对于给定的检验水平 (α_0, β_0) ，若检验 T 犯两类错误的真实概率满足 $\alpha(T, \theta_0) \leq \alpha_0, \beta(T, \theta_1) \leq \beta_0$ ，则称检验 T 为统计假设(2)的检验水平为 (α_0, β_0) 的截尾序贯检验。

对具有“高可靠、长寿命”试验特点的产品进行抽样验收试验，在给定的检验水平 (α_0, β_0) 下平均试验时间越短，试验成本就越低。因此，给出如下最优截尾序贯检验的定义。

定义 1.1 设 Ω 为样本量截尾值为 r_0 ，检验水平为 (α_0, β_0) 的截尾序贯检验的集合，若存在截尾序贯检验 $T^0 \in \Omega$ ，对任意截尾序贯检验 $T \in \Omega$ 均有

$$\begin{cases} ETT(T^0, \theta_0) \leq ETT(T, \theta_0) \\ ETT(T^0, \theta_1) \leq ETT(T, \theta_1) \end{cases} \tag{9}$$

则称 T^0 为统计假设(2)的样本量截尾值为 r_0 ，检验水平为 (α_0, β_0) 的关于试验时间最优的截尾序贯检验 (Optimal truncated sequential test, OTST)。

注对公式(6~8)所示截尾序贯检验的统计特征指标，已编写了相应的 Matlab 程序进行计算。并在文献 [10] [11] 的基础上，采用动态规划方法对定义 1.1 中的 OTST T^0 进行了求解，求解的过程由附录给出。

3. 贝叶斯截尾序贯检验

对产品进行抽样验收试验的前提是产品在鉴定试验中获得通过，为了充分利用产品的鉴定试验等质量信息，本节通过综合鉴定试验数据来确定产品质量的先验分布，采用贝叶斯分析方法，在给定的检验水平下构造贝叶斯截尾序贯检验，并给出贝叶斯截尾序贯检验方案的求解步骤。

3.1. 贝叶斯截尾序贯检验的构造

在产品的鉴定试验中，通常采用定时截尾有替换的寿命试验方案 $T(T^*, C^*)$ ， T^* 、 C^* 分别为最长试验时间及最大累计失效数，即当试验的总试验时间 $W = T^*$ 时，如果实际累计失效数 $C \leq C^*$ ，则产品在鉴定试验中获得通过，否则产品未能通过。基于共轭先验分布的观点，设产品的 MTTF θ 的先验分布为逆 Γ 分布，其概率密度函数为

$$\pi(\theta | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{\theta}} \tag{10}$$

其中 a, b 为超参数。根据 θ 的最大似然估计以及先验 10% 分位数确定 a, b 的值如下[3]:

$$a = C + 1, \quad b = W \quad (11)$$

由此可知, 当产品在鉴定试验中得到通过且试验数据为 (W, C) 时, θ 的先验分布概率密度函数为

$$\pi(\theta | C + 1, W) = \frac{W^{C+1}}{\Gamma(C+1)} \theta^{-(C+2)} e^{-\frac{W}{\theta}} \quad (12)$$

对于简单统计假设(2), 为了贝叶斯分析方便, 将 θ 的取值集中到 θ_0 和 θ_1 上, 由此得到其先验分布为

$$\begin{cases} \pi(\theta = \theta_0 | C + 1, W) = \int_0^{\frac{W}{C+1}} \pi(\theta | C + 1, W) d\theta \\ \pi(\theta = \theta_1 | C + 1, W) = \int_{\frac{W}{C+1}}^{+\infty} \pi(\theta | C + 1, W) d\theta \end{cases} \quad (13)$$

其中, $W/(C+1)$ 为产品在鉴定试验中没有获得通过时 θ 极大似然估计的最大值。

对于统计假设(2)及给定的检验水平 (α_0, β_0) , 设产品验收试验采用的 OTST 为 T^o , 则通过 θ 的先验分布可以计算出 T^o 犯两类错误的后验概率, 也即生产方和使用方后验风险为

$$\begin{cases} \alpha^*(T^o, \theta_0) = \frac{\pi(\theta_0)\alpha(T^o, \theta_0)}{\pi(\theta_0)\alpha(T^o, \theta_0) + \pi(\theta_1)\alpha(T^o, \theta_1)} \\ \beta^*(T^o, \theta_1) = \frac{\pi(\theta_1)\beta(T^o, \theta_1)}{\pi(\theta_0)\beta(T^o, \theta_0) + \pi(\theta_1)\beta(T^o, \theta_1)} \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\alpha(T^o, \theta)$, $\beta(T^o, \theta)$ 由式(7)给出, 分别表示当产品的 MTTF 为 θ 时, 产品在检验 T^o 中未能通过或通过的概率。

当产品在鉴定试验中获得通过时, 说明产品已具有较高的质量水平, 由(13)式所计算出的 θ 的先验分布满足

$$\pi(\theta = \theta_0) > \pi(\theta = \theta_1) \quad (15)$$

此时, 对于采用(14)式所计算出的使用方贝叶斯后验风险 $\beta^*(T^o, \theta_1)$, 必然有

$$\beta^*(T^o, \theta_1) < \beta(T^o, \theta_1) \quad (16)$$

也就是说, 当产品在鉴定试验中获得通过后, 采用 OTST T^o 进行抽样验收试验, 使用方后验风险 $\beta^*(T^o, \theta_1)$ 已经比原来的风险值 $\beta(T^o, \theta_1)$ 降低了。

对于已具有较高质量水平的产品, 在验收试验中通常需要保证产品有着一定的通过检验的概率 $(1 - \alpha_0)$, 从而保护生产方的权益。因此, 对于统计假设(2), 为充分利用检验水平 (α_0, β_0) , 可构造检验水平为 (α_0, β') 的新的 OTST T'^o , 使其满足:

$$\beta^*(T'^o, \theta_1) = \beta_0 \quad (17)$$

根据式(16)及式(17), 有

$$\beta_0 = \beta^*(T'^o, \theta_1) < \beta(T'^o, \theta_1) \leq \beta' \quad (18)$$

此时 β' 大于给定的检验水平中的 β_0 。这说明, 为了充分利用给定的检验水平, 可将 β_0 增加至 β' , 得到使用方贝叶斯后验风险等于 β_0 , 检验水平为 (α_0, β') 的新的 OTST T'^o 。

实际上, 在截尾序贯检验中, 可以通过增大犯第二类错误的概率 β 来减少平均试验时间[13]。如美国军用标准 MIL-HDBK-781A 给出的保证试验的使用方风险高达 98%, 这也是该试验能够大幅度减少产品的平均试验时间的主要原因[5]。因此, 相比于检验水平为 (α_0, β_0) OTST T^o , 新的 OTST T'^o 由于

$\beta' > \beta_0$ 而拥有更少的平均试验时间, 能够节省更多的产品验收试验成本。

出于节约试验成本的考虑, 在关于试验时间最优的截尾序贯检验的基础上, 同样希望用于检验的样本量越少越好。对于假设检验(2)以及给定的检验水平 (α_0, β_0) , 国家标准 GJB899A 中规定截尾序贯检验的 MSS r_0 应使得下式成立

$$\frac{\chi_{\alpha_0, 2r_0}^2}{\chi_{1-\beta_0, 2r_0}^2} \geq \frac{\theta_0}{\theta_1} \quad (19)$$

即 r_0 的最小值为在全数检验中使得检验犯两类错误概率满足检验水平要求的最小样本量。如前所述, 若在产品的验收试验中采用检验水平为 (α_0, β') 的新的 OTST T'^o , 则由于 $\beta' > \beta_0$, r_0 将会减小。这意味着, OTST T'^o 可以拥有更小的 MSS。实际上, 在产品已通过鉴定试验的情况下, 鉴定试验已经提供了一部分产品的质量信息, 因此验收试验不需要太多的样本也能得到足够的信息来做出判断。

综上所述, 在产品已通过鉴定试验的条件下, 利用产品的鉴定试验信息, 可获得平均试验时间、样本量截尾值更少的截尾序贯验收试验, 这里称之为贝叶斯截尾序贯检验, 现定义如下。

定义 2.1 对统计假设(2), 设检验水平为 (α_0, β_0) 的 OTST 为 T^o , 假定产品已通过鉴定试验且鉴定试验数据为 (W, C) , 构造检验水平为 (α_0, β') 的 OTST $T'^o(r'_0)$, 若样本量截尾值 r'_0 达到了最小且使用方贝叶斯后验风险 $\beta^*(T'^o(r'_0), \theta_1)$ 满足

$$\beta^*(T'^o(r'_0), \theta_1) = \beta_0 \quad (20)$$

则称 $T'^o(r'_0)$ 为检验水平为 (α_0, β_0) 的统计假设(2)的贝叶斯截尾序贯检验(BTST) T^B 。

由定义 2.1 所给出的 BTST T^B , 相比于 OTST T^o 有着相同的生产方风险 α_0 , 对于通过鉴定试验的高质量产品, 这样的设计能够保证产品在 T^B 与 T^o 中通过验收试验的概率相等, 从而保障了生产方的权益; 同时, 由(18)式可知 $\beta' > \beta_0$, 使用方风险的增加使得 T^B 的平均试验时间及样本量截尾值减少, 从而节省了产品抽样验收试验的成本。需要指出的是, 虽然有 $\beta' > \beta_0$, 但由(18)式可知, BTST T^B 的使用方贝叶斯后验风险仍然得到严格控制。

3.2. 贝叶斯截尾序贯检验方案的求解

由第 3.1 节可知, 贝叶斯截尾序贯检验是在 OTST T^o 的基础上结合鉴定试验数据等产品的质量信息来构造的。在以上关于贝叶斯截尾序贯检验讨论的基础上, 本节给出其求解步骤如下:

步骤一对统计假设(2)以及给定的检验水平 (α_0, β_0) , 确定截尾序贯检验的样本量截尾值 r_0 , 并求解出相应的 OTST $T^o(r_0)$ (求解过程见附录)。

步骤二对给定的鉴定试验数据 (W, C) , 由式(13)确定产品 MTTF θ 的先验分布。

步骤三在区间 $(\beta_0, 1)$ 上搜索 β' , 使得以 (α_0, β') 为检验水平的 OTST $T'^o(r_0)$ 满足 $\beta^*(T'^o(r_0), \theta_1) = \beta_0$ 。

1) 若方案 $T'^o(r_0)$ 存在, 令 $r_0 = r_0 - 1$, 重复步骤三。

2) 若方案 $T'^o(r_0)$ 不存在, 令 $r'_0 = r_0 + 1$, 结束计算。

步骤四对于样本量截尾值 r'_0 , 在区间 $(\beta_0, 1)$ 上搜索 β' , 使得以 (α_0, β') 为检验水平的 OTST $T'^o(r'_0)$ 满足 $\beta^*(T'^o(r'_0), \theta_1) = \beta_0$, $T'^o(r'_0)$ 即为所求的 BTST $T^B(r'_0)$ 。

4. 与国家标准 GJB899A 的比较分析

本节结合实例展示了贝叶斯截尾序贯检验的详细求解过程, 并将其与 GJB899A 给出的截尾序贯验收试验进行比较, 对 BTST T^B 在减少平均试验时间及样本量截尾值方面的效果进行验证。此外, 通过对不同质量水平产品下的贝叶斯截尾序贯检验进行研究, 进一步验证其在高质量产品验收试验中的优越性。

例 4.1 考虑以下统计假设:

$$H_0: \theta = \theta_0 = 2 \text{ vs } H_1: \theta = \theta_1 = 1 \quad (d = 2) \tag{21}$$

以及给定的检验水平 $(\alpha_0, \beta_0) = (0.2, 0.2)$ 。

步骤一我国军用标准 GJB899A 给出的截尾序贯验收试验方案为

$$T^{GJB}(8) = \begin{pmatrix} 2.8 & 4.18 & 5.58 & 6.96 & 8.34 & 9.74 & 9.74 & 9.74 \\ 0 & 0.7 & 2.08 & 3.46 & 4.86 & 6.24 & 7.62 & 9.74 \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中样本量截尾值 $r_0 = 8$ 。对于统计假设(21), 采用动态规划方法求得检验水平为 $(0.2, 0.2)$ 的 OTST 为

$$T^O(8) = \begin{pmatrix} 3.25 & 4.51 & 5.75 & 6.96 & 8.13 & 9.22 & 10.23 & 10.75 \\ 0 & 0 & 1.2 & 2.82 & 4.5 & 6.27 & 8.24 & 10.75 \end{pmatrix} \tag{23}$$

步骤二 GJB899A 中给出的鉴定试验方案 $T(T^*, C^*) = T(7.8, 5)$, 假定产品在鉴定试验中获得通过且试验数据为 $(7.8, 4)$, 根据式(12)及式(13)计算出 MTTF θ 的先验分布为

$$\begin{cases} \pi(\theta = \theta_0) = 0.7149 \\ \pi(\theta = \theta_1) = 0.2851 \end{cases} \tag{24}$$

步骤三在区间 $(0.2, 1)$ 上搜索 β' , 使得以 $(0.2, \beta')$ 为检验水平的 OTST $T'^O(8)$ 满足 $\beta^*(T'^O(8), \theta_1) = 0.2$ 。通过计算得到 $\beta' = 0.502$, 此时的 OTST $T'^O(8)$ 为

$$T'^O(8) = \begin{pmatrix} 0.94 & 2.32 & 3.7 & 5.06 & 6.41 & 7.74 & 9.04 & 10.19 \\ 0.07 & 1.47 & 2.87 & 4.27 & 5.69 & 7.13 & 8.61 & 10.19 \end{pmatrix} \tag{25}$$

然后对样本量截尾值 r_0 进行收缩, 直到对应的 OTST $T'^O(r_0)$ 不存在。经过计算, 当 $r_0 = 2$ 时, OTST 的使用方贝叶斯后验风险恒大于 0.2。因此, 令 $r'_0 = 3$ 。

步骤四对于 $r'_0 = 3$, 求解出此时的 OTST $T'^O(3)$ 为

$$T'^O(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2.25 & 3.27 \\ 0.02 & 1.57 & 3.27 \end{pmatrix} \tag{26}$$

由定义 2.1 可知, $T'^O(3)$ 即为所求的贝叶斯截尾序贯检验方案 $T^B(3)$ 。

$T^{GJB}(8)$ 、 $T^O(8)$ 、 $T'^O(8)$ 及 $T^B(3)$ 犯两类错误的概率、使用方贝叶斯后验风险以及平均试验时间的计算结果如表 1 所示:

Table 1. Comparison between the test plans

表 1. 检验方案的比较

T	$\alpha(T, \theta_0)$	$\beta(T, \theta_1)$	$\beta^*(T, \theta_1)$	$ETT(T, \theta_0)$	$ETT(T, \theta_1)$
$T^{GJB}(8)$	0.223	0.225	0.104	4.823	3.725
$T^O(8)$	0.200	0.200	0.091	5.701	4.620
$T'^O(8)$	0.200	0.502	0.200	1.269	1.190
$T^B(3)$	0.200	0.499	0.199	1.302	1.220

从表中可以看出, OTST $T^O(8)$ 的使用方贝叶斯后验风险相比于原来的风险值 0.2 确实减少了。通过增加犯第二类错误的概率, 构造的 OTST $T^{O'}(8)$ 相比于 OTST $T^O(8)$ 及 GJB899A $T^{GJB}(8)$ 都大幅减少了平均试验时间, 并且其使用方贝叶斯后验风险等于 0.2, 得到了很好的控制。进一步地, 相比于方案 $T^{O'}(8)$, 虽然构造的 BTST $T^B(3)$ 的平均试验时间略微有所增加, 但其样本量截尾值得到了大幅缩减。实际上, 相比于原验收试验方案 $T^{GJB}(8)$, BTST $T^B(3)$ 在 $\theta_0 = 2$ 及 $\theta_1 = 1$ 处能够分别减少 73% 及 67% 的平均试验时间, 同时其样本量截尾值也减少了 62.5%。

为了更直观地比较原验收试验方案 $T^{GJB}(8)$ 以及 BTST $T^B(3)$ 的特征, 给出了检验的操作特征曲线(OC)及平均试验时间曲线(ETT), 如图 1 所示。

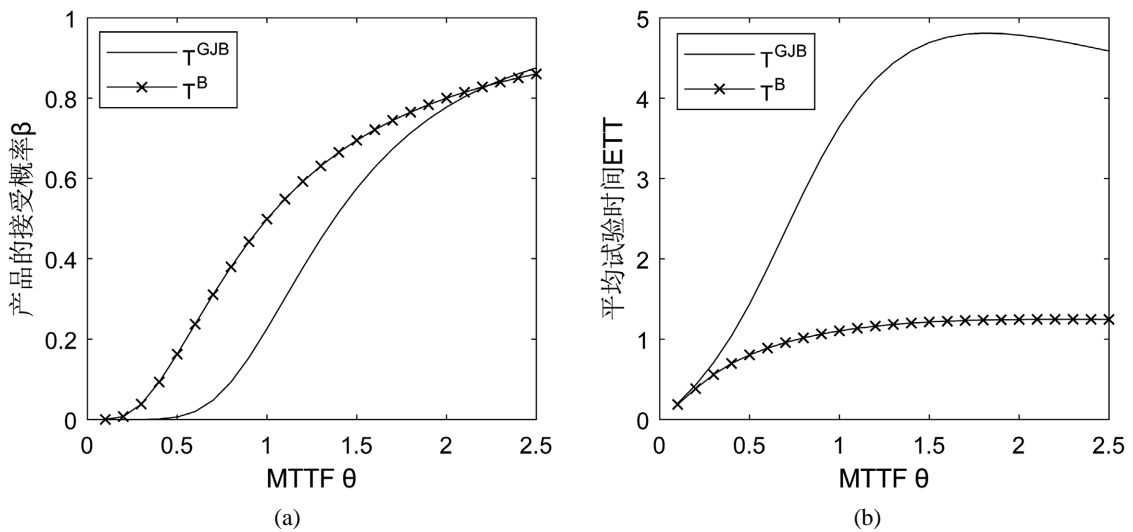


Figure 1. Comparing on OC and ETT between $T^{GJB}(8)$ and $T^B(3)$

图 1. 原方案 $T^{GJB}(8)$ 与贝叶斯截尾序贯检验 $T^B(3)$ 的 OC 及 ETT 曲线比较

从操作特征曲线的比较(图 1(a))中可以看出, 当产品的 MTF θ 接近或超过 2 时, 方案 $T^B(3)$ 与原验收试验方案 $T^{GJB}(8)$ 的 OC 曲线非常接近, 这说明当产品有着较高质量水平时, $T^B(3)$ 与 $T^{GJB}(8)$ 有着相当的通过验收试验的概率; 平均试验时间的比较(图 1(b))进一步验证了 BTST $T^B(3)$ 相对于 GJB899A $T^{GJB}(8)$ 在减少平均试验时间方面的效果十分显著。

一般来说, 在产品通过鉴定试验的条件下, 鉴定试验数据提供的产品质量信息越多, 对后续的验收试验就越有利。因此, 对于更高质量产品的质量与可靠性验证试验, 贝叶斯截尾序贯检验的表现是否更好? 下面通过对同一产品构造不同质量水平下的 BTST T^B 来进行验证。

例 4.2 考虑以下统计假设:

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 1.5 \text{ vs } H_1 : \theta = \theta_1 = 1 \quad (d = 1.5) \tag{27}$$

以及给定的检验水平 $(\alpha_0, \beta_0) = (0.2, 0.2)$ 。GJB899A 给出的鉴定试验方案为 $T(21.5, 17)$, 截尾序贯验收试验方案为 $T^{GJB}(19)$, 通过计算, 有 $\alpha(T, \theta_0) = 0.227$, $\beta(T, \theta_1) = 0.232$, $ETT(T, \theta_0) = 11.346$, $ETT(T, \theta_1) = 9.607$, 其中 $T = T^{GJB}(19)$ 。为了得到不同质量水平下的 BTST T^B , 假定产品的鉴定试验数据分别为(21.5, 16)、(21.5, 15)及(21.5, 14), 然后求解对应的 BTST T^B 。结果如表 2 所示。

从表 2 可以看出, 随着在鉴定试验最大试验时间 21.5 内失效产品从 16 个减少到 14 个, 产品 MTF $\theta = \theta_0$ 的贝叶斯后验可信度从 0.6249 提高到 0.7919, 产品的质量水平也随之提高。对于构造的 BTST T^B ,

随着产品质量水平的提高, 其减少平均试验时间以及样本量截尾值的效果也越显著。当 $\theta = \theta_0$ 的贝叶斯后验可信度为 0.6249 时, 对应的 BTST T^B 相比于原验收试验方案 T^{GJB} (19), 在 $\theta = \theta_0$ 及 $\theta = \theta_1$ 处平均试验时间的减少比例分别达到了 22.69% 及 12.27%, 样本量截尾值则减少了 42.10%。当 $\theta = \theta_0$ 的贝叶斯后验可信度为 0.7919 时, 这些比例分别增长到了 97.35%、97.02% 及 89.47%。

Table 2. Comparison of the BTSTs under different prior information

表 2. 不同鉴定数据下的 BTST 检验方案的比较

(W, C)	$\pi(\theta_0)/\pi(\theta_1)$	T	$\alpha(T, \theta_0)$	$\beta(T, \theta_1)$	$\beta^*(T, \theta_1)$	$ETT(T, \theta_0)$	$ETT(T, \theta_1)$
(21.5, 16)	0.6249/0.3751	T^B (11)	0.199	0.333	0.200	8.772	8.428
(21.5, 15)	0.7133/0.2867	T^B (6)	0.200	0.498	0.200	3.398	3.429
(21.5, 14)	0.7919/0.2081	T^B (2)	0.192	0.725	0.191	0.301	0.286

上述算例研究验证了, 当产品在鉴定试验中获得通过且具有较高的质量水平时, 综合鉴定试验数据所构造的贝叶斯截尾序贯检验 T^B 相对于原验收试验 T^{GJB} 来说: 一方面能够大幅度地减少产品验收试验的平均试验时间以及样本量截尾值, 从而节省产品的验收试验成本, 并且随着产品质量水平的提高, 节省试验成本的效果就越显著; 另一方面, 贝叶斯截尾序贯检验 T^B 的使用方后验风险是严格可控的, 同时也与 T^{GJB} 具有相当的通过验收试验的概率。

5. 小结

本文对指数分布下贝叶斯截尾序贯检验进行了研究。在产品通过鉴定试验的条件下, 采用贝叶斯分析方法对鉴定试验数据进行综合, 得到了产品 MTTF θ 的先验分布, 并给出了截尾序贯检验的生产方与使用方贝叶斯后验风险的计算公式。确保使用方贝叶斯后验风险得到严格控制的同时, 在 OTST T^O 的基础上构造了可以替代原验收试验方案 T^{GJB} 的 BTST T^B 。通过实例分析, 对方案 T^B 的优良性进行了验证。研究结果表明, 在产品通过鉴定试验且拥有较高质量水平时, BTST T^B 有着与原验收试验方案 T^{GJB} 相当的通过验收试验的概率, 同时又能大幅降低平均试验时间及样本量截尾值, 从而节省产品抽样验收试验成本。

基金项目

国家自然科学基金(62166009); 贵州省自然科学基金项目(ZK[2021]333, ZK[2022]350); 贵州医科大学博士启动基金项目(2020-015)。

参考文献

- [1] 任占勇, 罗学刚, 汪启华, 等. GJB899 可靠性鉴定与验收试验: 中华人民共和国军用标准[S]. 中国人民解放军总装备部, 北京, 2009: 1-27.
- [2] Department of Defense (1996) MIL-HDBK-781A: Handbook for Reliability Test Methods, Plans and Environments for Engineering, Development Qualification and Production. Washington.
- [3] Anderson, T.W. (1960) A Modification of the Sequential Probability Ratio Test to Reduce the Sample Size. *Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 165-197. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705996>
- [4] 濮晓龙, 闰章更, 茆诗松, 等. 计数型序贯网图检验[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2006(1): 67-71.
- [5] 胡思贵. 截尾序贯最优方法研究及其在机器产品质量检验中的应用[D]: [博士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2019.
- [6] 刘海涛, 邵松世, 张志华. 一种改进的指数型序贯抽样检验方法[J]. 海军工程大学学报, 2019, 31(4): 95-99.

- [7] Eales, J.D. and Christopher, J. (1992) An Improved Method for Deriving Optimal One-Sided Group Sequential Tests. *Biometrika*, **79**, 13-24. <https://doi.org/10.1093/biomet/79.1.13>
- [8] Jennison, C. and Turnbull, B.W. (2013) Interim Monitoring of Clinical Trials: Decision Theory, Dynamic Programming and Optimal Stopping. *Kuwait Journal of Science*, **40**, 4359.
- [9] 陈家鼎, 张绡. 关于 MIL-HDBK-781 中的保证试验[J]. 数理统计与管理, 2000, 19(4): 39-45.
- [10] 张金槐. 落点散布鉴定中 Bayes 序贯截尾方法的运用[J]. 国防科技大学学报, 1999, 21(4): 108-113.
- [11] 邢云燕, 武小悦. 指数分布下可靠性指标验证的截 SPOT 方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(8): 1282-1284.
- [12] 胡思贵, 周小静. 计数型截尾序贯保证试验的研究[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2015(3): 47-56.
- [13] Hu S. G. and Wang H. L. (2018) A Heuristic Approach for Near Optimal Truncated Sequential Test of Exponential Distribution. *Sequential Analysis*, **37**, 431-454. <https://doi.org/10.1080/07474946.2018.1554887>

附录

在第2节定义1.1中, OTST T^O 是如下的有约束最优化问题的解。

$$\min\{SETT(T)\} \quad \text{s.t.} \begin{cases} \alpha(T, \theta_0) \leq \alpha_0 \\ \beta(T, \theta_1) \leq \beta_0 \end{cases} \quad (28)$$

其中, 综合平均试验时间 $SETT(T) = (ETT(T, \theta_0) + ETT(T, \theta_1))/2$ 。动态规划方法通过引入损失函数 $d = (d_0, d_1, d_2)$ 构造了贝叶斯统计决策问题。其中, d_0 表示 H_0 为真时拒绝 H_0 的损失; d_1 表示 H_0 为伪时接受 H_0 的损失; d_2 表示每单位消耗的试验时间的损失, 由此, 贝叶斯统计决策问题为

$$\min\{d_2 SETT(T) + d_0 \alpha(T, \theta_0) + d_1 \beta(T, \theta_1)\} \quad (29)$$

该问题的解 T^{LO} 最小化了检验的贝叶斯期望总成本, 当 $\alpha(T^{LO}, \theta_0) = \alpha_0, \beta(T^{LO}, \theta_1) = \beta_0$ 时, T^{LO} 即为检验水平为 (α_0, β_0) 的 OTST T^O 。

对方案 T^{LO} 进行求解, 令 $P^{(i)}(\theta | S_i) (1 \leq i \leq r_0)$ 表示第 i 个样本寿命试验结束后 θ 的后验概率, 则 T^{LO} 在第 i 个样品寿命试验结束后停止检验并做出判决的最小损失为

$$\gamma^{(i)}(S_i) = \min\{d_0 P^{(i)}(\theta_0 | S_i), d_1 P^{(i)}(\theta_1 | S_i)\} \quad (30)$$

在第 r_0 个样品寿命试验结束后, 必须停止检验, 因此根据贝叶斯最优决策规则, 方案 T^{LO} 的边界点 $u_{r_0} = s_{r_0}$, s_{r_0} 满足: $d_0 P^{(r_0)}(\theta_0 | s_{r_0}) = d_1 P^{(r_0)}(\theta_1 | s_{r_0})$ 。

令 $\eta^{(i)}(S_i) (1 \leq i \leq r_0)$ 表示第 i 个样本寿命试验结束后继续抽样试验的期望损失, 对于 $i \leq r_0 - 1$, 有

$$\eta^{(i)}(S_i) = d_2 E(S_{i+1} - S_i | S_i) + \int_{S_i}^{+\infty} \min\{\eta^{(i+1)}(S_{i+1}), \gamma^{(i+1)}(S_{i+1})\} dF^{(i+1)}(S_{i+1} | S_i) \quad (31)$$

特别地,

$$\eta^{(r_0-1)}(S_{r_0-1}) = d_2 E(S_{r_0} - S_{r_0-1} | S_{r_0-1}) + \int_{S_{r_0-1}}^{+\infty} \gamma^{(r_0)}(S_{r_0}) dF^{(r_0)}(S_{r_0} | S_{r_0-1}) \quad (32)$$

其中, $F^{(j+1)}(S_{j+1} | S_j) (1 \leq j \leq r_0 - 1)$ 为 S_{j+1} 的条件累积分布函数。动态规划方法通过使得检验继续试验的期望损失等于停止试验的期望损失来求解方案 T^{LO} 的边界点, 即求解等式 $\eta^{(i)}(S_i) = \gamma^{(i)}(S_i)$, 若:

- 1) 存在两个解 $(s_i^1, s_i^2) (s_i^1 > s_i^2 > 0)$, 则上边界点 $u_i = s_i^1$, 下边界点 $l_i = s_i^2$ 。
- 2) 存在唯一解 s_i , 则上边界点 $u_i = s_i$, 下边界点 $l_i = 0$ 。
- 3) 无解, 则重新设定损失函数 $d = (d_0, d_1, d_2)$, 直到找到等式的解。

由此求解出方案 T^{LO} 的所有边界点。最后通过对损失函数进行搜索, 通常设 $d_0 + d_1 + d_2 = 1$, 来使得 $\alpha(T^{LO}, \theta_0) = \alpha_0, \beta(T^{LO}, \theta_1) = \beta_0$, 此时的 T^{LO} 即为所求的 OTST T^O 。