Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(1), 204-209
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.131022

一些互补等能量强正则图的刻画

姜艺淼，梁超凡

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2023年1月18日；录用日期：2023年2月7日；发布日期：2023年2月15日

摘 要

图G的能量$E(G)$是其邻接矩阵的所有特征值绝对值的和。如果一个图和它的补图不同构且具有相同的能量，则称此图是互补等能量的。本文利用强正则图的参数给出了其能量表达式，并借助此公式给出了两类(无穷)互补等能量的强正则图的参数。

关键词

互补等能量，强正则图，特征值

Characterization of Some Complementary Equienergetic Strongly Regular Graphs

Yimiao Jiang, Chaofan Liang

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shannxi

Received: Jan. 18th, 2023; accepted: Feb. 7th, 2023; published: Feb. 15th, 2023

Abstract

The energy $E(G)$ of a graph G is the sum of the absolute values of all eigenvalues of its adjacency matrix. Graph energy comes from quantum chemistry. If a graph and its complement graph are not isomorphic and have the same energy, then the graph is said to be complementary equienergetic. In this paper, the energy expression of the strongly regular graph is given by the parameters of that, and the parameters of two types(infinite) of complementary equaenergetic strongly regular graph are given with the help of this formula.

文章引用: 姜艺淼, 梁超凡. 一些互补等能量强正则图的刻画[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(1): 204-209.
DOI: 10.12677/orf.2023.131022

Keywords

Complementary Equienergetic, Strongly Regular Graphs, Eigenvalues

1. 引言

设有 n 个顶点的无向简单图 G 的顶点集为 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$，边集为 $E(G)$。其邻接矩阵定义为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 相邻} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ (邻接矩阵为实对称矩阵且主对角元素为 0)。若 G 每个顶点都具有 k 个相邻顶点，则称若 G 是 k-正则图，参数为 (v,k,λ,μ) 的强正则图就是有 v 个顶点的 k-正则图，且其中任意两个相邻顶点恰好有 λ 个公共相邻顶点，任意两个非相邻顶点恰好有 μ 个公共相邻顶点。图 G 的能量 E 定义为 $E=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$，其中 λ_i 是其邻接矩阵 A 的特征值，如果两个图有相同的能量，则称它们是等能量的，如果一个图和它的补图不同构且具有相同的能量，则称图是互补等能量的。1978 年 Gutman 首先在[1]中定义了图能量，在过去的四十年中引起了研究者的广泛关注。图能的概念源于量子化学，与分子图[2]的总 π-电子能有关。等能图的构造有许多论文，例如：Hou 和 Xu [3]构造了无穷多个等能二部图。Vinagre [4]等人给出了一种利用图积从起始图中获得新等能图对的方法。关于等能量的强正则图的研究，近几年，Ramane 等人在[5] [6]构造了几类互补等能图以及与强正则图相关的等能图。本文通过观察互补等能量图的参数规律构造出了一些互补等能量的强正则图，强正则图在图论和编码理论之间架起了桥梁，因此对于代数图论是至关重要的。

2. 预备知识

定理 2.1 给出了强正则图的特征值以及特征值重数的计算方法。

定理 2.1 [7]如果 G 是带有参数 (v,k,λ,μ) 的强正则图，则 G 的谱是 k,r,s，且

$$r,s=\frac{\lambda-\mu\pm\sqrt{\Delta}}{2},\Delta=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu) \tag{1}$$

它们的重数分别为 $1,f,g$，其中

$$f,g=\frac{v-1\mp\frac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}$$

定理 2.1 给出了强正则图补图的参数以及强正则图存在的必要条件。

定理 2.2 [8]若 G 是带有参数 (v,k,λ,μ) 的强正则图，则其补图 $\overline{G}$ 是带有参数 $(\overline{v},\overline{k},\overline{\lambda},\overline{\mu})$，其中 $\overline{v}=v$，$\overline{k}=v-k-1$，$\overline{\lambda}=v-2-2k+\mu$，$\overline{\mu}=v-2k+\lambda$。若考虑一个固定顶点 u，用两种方法计算边 vw，使得 u 与 v 相邻，但不与 w 相邻，则

$$k(k-\lambda-1)=(v-k-1)\mu。$$

3. 一些自补等能量的强正则图

下面我们给出了强正则图能量的表达式，并可以根据表达式判断两个图能量是否相等。

定理 3.1 若 G 是带有参数 (v,k,λ,μ) 的强正则图且谱为 $\left\{k^{(1)},r^{(f)},s^{(g)}\right\}$，则图 G 的能量为

$$E(G)=k+\frac{(k+2-2v)\mu+k(2v-\lambda-2)}{\sqrt{4k+(\lambda-\mu)^2-4\mu}}\text{。}$$

证明：根据定理 2.2，图 G 的谱为 $\left\{k^{(1)},r^{(f)},s^{(g)}\right\}$，则

$$r,s=\frac{\lambda-\mu\pm\sqrt{\Delta}}{2},\Delta=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu),f,g=\frac{v-1\mp\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}\text{。}$$

因为 $k\geq\mu,\Delta\geq(\lambda-\mu)^2$，可得 $r\geq0,s\leq0$。且 $k+fr+gs=tr(A(G))=0$，所以 $s<0$。

根据能量的定义可得

$$\begin{aligned}E(G)&=|k|\times1+|r|\times\frac{v-1-\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}+|s|\times\frac{v-1+\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}\\&=k+\frac{\lambda-\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}{2}\times\frac{v-1-\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}\\&\quad-\frac{\lambda-\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}{2}\times\frac{v-1+\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}}{2}\\&=k+\frac{(k+2-2v)\mu+k(2v-\lambda-2)}{\sqrt{4k+(\lambda-\mu)^2-4\mu}}\end{aligned}\tag{2}$$

根据定理 2.3，$\overline{G}$ 是带有参数 $(\overline{v},\overline{k},\overline{\lambda},\overline{\mu})$ 的强正则图，将 $\overline{v}=v$，$\overline{k}=v-k-1$，$\overline{\lambda}=v-2-2k+\mu$，$\overline{\mu}=v-2k+\lambda$ 代入(4)得

$$E(\overline{G})=v-k-1+\frac{(1-v)(\lambda+\mu)+k(2v+\mu-\lambda-4)}{\sqrt{4k+(\lambda-\mu)^2-4\mu}}\tag{3}$$

定理 3.2 和定理 3.3 给出了本文构造的不同构且互补等能量的强正则图。

定理 3.2 G 是一个带参数 $\left((2n+t)^2,2n^2+(t-1)n,n^2-n+t,n^2-n\right)\left(n>1,t\in Z^+\right)$ 的强正则图，则 $E(G)=E(\overline{G})$。

证明： 将 G 的参数代入公式(2)，利用 mathematica 计算可得

$$E(G)=\frac{n(-1+2n+t)\left(4n^2+2t^2+6nt+4n+2t\right)}{2n+t},$$

将 $\overline{G}$ 的参数代入公式(3)，$\overline{G}$ 的能量计算为

$$E(\overline{G})=\frac{\left(-1+n+2n^2+3nt+t^2\right)\left(4n^2+2nt\right)}{2n+t},$$

化简得 $E(G)=E(\overline{G})$。

在得出 G 与 $\overline{G}$ 等能量之后，再判断是否同构，若其特征值不相等，则 G 与 $\overline{G}$ 不同构。将 G 与 $\overline{G}$ 的参数代入公式(1)，则可得到 G 与 $\overline{G}$ 的特征值，见表 1：

Table 1. Eigenvalues of G and $\bar{G}$
表 1. G 与 $\bar{G}$ 的特征值

	k	r	s
G	$2n^2+(t-1)n$	$n+t$	$-n$
$\bar{G}$	$2n^2+t^2+3nt+n-1$	$n-1$	$-n-t-1$

由此可见，G 与 $\bar{G}$ 不同构且等能量，则称强正则图 G 是互补等能量的。

另外我们利用编程搜索得到了存在的 $n>1, t=3$ 时互补等能量的强正则图的参数[9]，见表 2：

Table 2. Parameters of complementaryequienergetic strongly regular graph ($t = 3$)
表 2. 互补等能量的强正则图的参数($t = 3$)

v	k	λ	μ
49	12	5	2
81	24	9	6
121	40	15	12
169	60	23	20
225	84	33	30
289	112	45	42
361	144	59	56
441	180	75	72
529	220	93	90
625	264	113	110
729	312	135	132
841	364	159	156
961	420	185	182
1089	480	213	210
1225	544	243	240

定理 3.3 G 是一个带参数 $\left((2n+t)^2,(n+t)(2n+t-1),(n+t)(n+t-1)-t,(n+t)(n+t-1)\right)\left(n>1,t>1,t\in Z^+\right)$ 的强正则图，则 $E(G)=E(\bar{G})$。

证明： 将 G 的参数代入公式(2)，同样利用 mathematica 计算可得

$$E(G)=\frac{\left(4n^2+2nt+4n+2t\right)\left(2n^2+(-1+t)t+n(-1+3t)\right)}{2n+t},$$

将 $\bar{G}$ 的参数代入公式(3)，$\bar{G}$ 的能量计算为

$$E(\bar{G})=\frac{(1+n)(-1+2n+t)\left(4n^2+2t^2+6nt\right)}{2n+t},$$

化简得 $E(G)=E(\overline{G})$。

同样判断 G 与 $\overline{G}$ 是否同构，将 G 与 $\overline{G}$ 的参数代入公式(1)，则可得到 G 与 $\overline{G}$ 的特征值，见表 3：

Table 3. Eigenvalues of G and $\overline{G}$

表 3. G 与 $\overline{G}$ 的特征值

	k	r	s
G	$(n+t)(2n+t-1)$	n	$-n-t$
$\overline{G}$	$2n^2+(n+1)t+n-1$	$n+t-1$	$-n-1$

由此可见，G 与 $\overline{G}$ 不同构且等能量，则称强正则图 G 是互补等能量的。

表 4 给出了编程搜索到的存在的 $n>1, t=3$ 时互补等能量的强正则图的参数[9]，见表 4：

Table 4. Parameters of complementary equienergetic strongly regular graph ($t = 3$)

表 4. 互补等能量的强正则图的参数($t = 3$)

v	k	λ	μ
25	16	9	12
49	30	17	20
81	48	27	30
121	70	39	42
169	96	53	56
225	126	69	72
289	160	87	90
361	198	107	110
441	240	129	132
529	286	153	156
625	336	179	182
729	390	207	210
841	448	237	240
961	510	269	272
1089	576	303	306
1225	646	339	342

参考文献

[1] Gutman, I. (1978) The Energy of a Graph, Berichte Math. *Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz*, **103**, 1-22.

[2] Li, X., Shi, Y. and Gutman, I. (2012) Graph Energy. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4220-2

[3] Hou, Y. and Xu, L. (2007) Equienergetic Bipartite Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **57**, 363-370.

[4] Bonifácio, A.S., *et al.* (2008) Constructing Pairs of Equienergetic and Noncospectral Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **21**, 338-341. https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.04.002

[5] Ramane, H.S., *et al.* (2019) Graphs Equienergetic with Their Complements. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **82**, 471-480.

[6] Ramane, H.S., *et al.* (2020) On Complementary Equienergetic Strongly Regulargraphs. *Discrete Mathematics Letters*, **4**, 50-55.

[7] Cvetkovi´c, D.M., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs: Theory and Application. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[8] Cvetkovi’c, D.M., Rowlinson, P. and Simi’c, S. (2010) An Introduction to the Theory of Graph Spectra. Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Brouwer, A.E. and Van Maldeghem, H. (2022) Strongly Regular Graphs. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/9781009057226