

基于状态依赖切换规则的切换控制器设计方法

高平, 周宇生

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年2月6日; 录用日期: 2023年4月3日; 发布日期: 2023年4月10日

摘要

在实际工程应用中, 物理限制或人为约束的存在使得受控系统在单个控制器的作用下通常无法达到稳定, 而具有切换特性的多模态控制器可以更好地提升受控系统的性能。因此, 深入研究切换机制在控制器设计中的作用具有重要实际意义。本文基于状态依赖切换规则将受控系统转化为切换系统。通过合理地选择增益系数以增大切换子系统之间的等效刚度差, 并结合所选择的增益系数和切换系统的能量比值函数设计了弱保守性的状态依赖切换控制器, 解决了受控系统在控制约束下难以被镇定的问题。最后, 仿真结果验证了所给出的切换控制方法的有效性。

关键词

状态依赖切换规则, 受控系统, 切换控制器, 渐近稳定

A Switching Controller Design Method Based on the State-Dependent Switching Rule

Ping Gao, Yusheng Zhou

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Feb. 6th, 2023; accepted: Apr. 3rd, 2023; published: Apr. 10th, 2023

Abstract

In practical engineering applications, the existence of physical limitations or artificial constraints makes the controlled system usually unable to achieve stability under the action of a single controller, and the multi-mode controller with switching characteristics can better improve the performance of the controlled system. Therefore, it is of great practical significance to study the role of switching mechanism in controller design. This paper transforms the controlled system into a switched system based on the state-dependent switching rule, then reasonably selects the gain coefficient to increase the equivalent stiffness difference between the switched subsystems, and

combines the selected gain coefficient with the energy ratio function of the switched system, a weakly conservative state-dependent switching controller is designed, which solves the problem that the controlled system is difficult to be stabilized under control constraints. Finally, the simulation results verify the effectiveness of the proposed switching control method.

Keywords

State-Dependent Switching Rule, Controlled System, Switching Controller, Asymptotic Stability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二十世纪以来,随着复杂系统模型大量地应用于各种生产实践活动中,单一的系统分析方法和单个控制器越来越难以满足实际需要。在大量的实际需求的推动下,切换系统作为一类典型的复杂系统受到越来越多学者的关注,其相关的理论研究在近些年也得到了迅速的发展。此外,通过控制器之间的切换也是得到切换系统的途径之一,并且能够大幅提升控制效果[1]。具有切换特性的多控制器系统相对于单一控制器系统而言,其性能更加优越,适用范围也更加广泛且鲁棒性强。如常见的 Bang-Bang 控制器就是利用切换特性在全状态开启和关闭之间进行切换,从而实现对温度的控制[2]。滑模控制方法通过在设计好的滑模面附近来回切换并逐渐趋近于平衡点,能够通过切换的作用极大地抑制不确定性因素的影响[3][4]。可以这么说,充分利用切换的作用设计控制器能够有效地解决很多实际问题。与单个控制器相比,采用多个控制器切换的优越性在于当系统发生故障时,多控制器系统可以选择恰当的切换规则,使系统切换到最合适的控制器以保证控制系统的稳定性。

在现实的工业系统中,电子原器件本身具有的物理局限性会造成一种非线性特性,即控制约束[5][6]。输入或者输出受约束的控制系统普遍存在于各种各样的工程控制系统中,这些约束条件的存在不仅会造成控制系统的不稳定,还会降低系统的性能,极大地影响操作的安全性。例如在汽车悬架系统中,约束条件使得限位块受到频繁撞击,降低了车辆的舒适性以及行驶的安全性[7];战斗机等飞行控制系统在执行器饱和的约束条件下,控制器的输入信号会增大,而输出信号却没有相应增加,导致系统不能按照既定的方式运行,进而会造成飞机坠毁等重大事故[8]。因此,如何解决工业系统中的约束问题从而提高系统的工作效率以及保障工业操作过程中的安全,成为了控制理论研究中的一大热点。目前对这类问题的主要解决方法是抗饱和法[9][10],即通过设计补偿器来弥补执行器饱和带来的性能缺陷。如文献[11]采取抗饱和神经网络动态的控制方法解决了输入约束条件下的机器人手臂轨迹跟踪控制问题,从而实现对机器人手臂系统的稳定控制,但该方法存在一定的保守性。为了解决这些设备问题或输入饱和的存在给工业生产带来的困难,考虑设计保守性更弱,性能更佳的切换控制器极具研究价值和意义的。

综上所述,本文针对控制输入约束条件下的受控系统,设计了恰当的状态依赖切换控制器以实现受控系统的渐近稳定性。主要研究内容分为三个部分:第一部分描述了待解决的问题;第二部分提出了状态依赖切换控制器的设计方法;第三部分通过数值仿真验证了该切换控制器的有效性。

2. 问题描述

考虑如下的四阶受控系统

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (1)$$

其中, X 为状态向量, A 和 B 分别为系数矩阵和输入矩阵, 分别表示为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

本文主要考虑一类约束条件: 控制输入的增益系数有界。 u 表示在该约束条件下的一个全状态反馈控制器。对于受控系统, 如果单一的控制难以满足系统的性能指标, 我们可以考虑应用切换控制的思想, 设计多个控制器切换以改善系统性能。将多个控制器代入受控系统后, 此时的受控系统就可以看作是多个子系统的切换系统。子系统切换时, 对应的控制器也在进行同步切换。此时, 控制问题就转变为了切换问题。因此, 本文旨在设计一个如下的状态依赖切换控制器

$$u = \begin{cases} u_1, & F(X(t)) - F(X(t-\Delta t)) \geq 0 \\ u_2, & F(X(t)) - F(X(t-\Delta t)) < 0 \end{cases}$$

其中, $u_i = u_{1i}x_1 + u_{2i}x_2 + u_{3i}x_3 + u_{4i}x_4$ 表示两个全状态反馈控制器, $F(X(t))$ 为切换系统的能量函数。状态依赖切换控制器的本质是: 当受控系统在单个控制器下无法实现稳定时, 利用状态依赖切换控制器可以使得系统切换时减少的能量足够补偿不稳定子系统运行时增加的能量, 从而保证了受控系统的渐近稳定性。

3. 状态依赖切换控制器的设计

对于受控系统(1), 将控制器 $u_i (i=1,2)$ 分别代入其中, 可以得到一个四阶切换系统 $\dot{X} = \tilde{A}_i X$, 特别地

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 u_{1i} & a_{12} + b_1 u_{2i} & a_{13} + b_1 u_{3i} & a_{14} + b_1 u_{4i} \\ a_{21} + b_2 u_{1i} & a_{22} + b_2 u_{2i} & a_{23} + b_2 u_{3i} & a_{24} + b_2 u_{4i} \\ a_{31} + b_3 u_{1i} & a_{32} + b_3 u_{2i} & a_{33} + b_3 u_{3i} & a_{34} + b_3 u_{4i} \\ a_{41} + b_4 u_{1i} & a_{42} + b_4 u_{2i} & a_{43} + b_4 u_{3i} & a_{44} + b_4 u_{4i} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

由于受控系统在单一的控制下不能稳定, 所以加入控制器后转换得到的切换子系统 \tilde{A}_i 都是不稳定的, 文献[12]中, 通过引入 1.5 自由度的线性振动系统, 为子系统都不稳定的三阶切换系统构建了合理的能量函数。基于此, 我们引入一个如图 1 所示的二自由度线性振动系统。

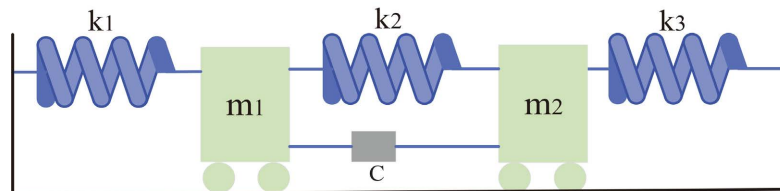


Figure 1. Vibration systems with 2-DOFs

图 1. 二自由度振动系统

其中, m_1 和 m_2 表示两个物块的质量, $k_i (i=1,2,3)$ 表示弹簧的刚度系数, c 表示阻尼系数。

$$\text{系统的动力学方程为} \begin{cases} \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0, \\ \ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

在可逆变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \dot{x}_1, \\ y_3 = x_2, \\ y_4 = \dot{x}_2, \end{cases}$ 的作用下, 该振动系统可以转换为一个四阶线性系统

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y}, \quad (3)$$

$$\text{其中 } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -k_1 - k_2 & -c & k_2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & c & -k_2 - k_3 & -c \end{pmatrix}.$$

由于切换系统 $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$ 可以与图 1 的二自由度系统匹配, 具有明确的物理意义, 因而我们将其定义为标准形四阶系统, 其能量函数为动能与势能之和, 具体表示为

$$E = \mathbf{Y}^T \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \frac{k_2 + k_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Y}.$$

特别地, 文献[12]表明, 无明确物理意义的一般子系统可以通过可逆变换 P 转换为标准形系统, 即一般形系统相似于对应的标准形系统。因此, 一般的四阶子系统的能量函数为

$$E = (\mathbf{P}\mathbf{X})^T \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \frac{k_2 + k_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mathbf{P}\mathbf{X}).$$

系统切换时所减少的势能实际上是子系统的等效刚度之间的切换所造成的。所以, 为了保证切换系统减少的能量足以补偿不稳定子系统增加的能量, 必须增大子系统之间的刚度差。而含有控制增益系数的系统(2)作为一个一般形系统, 可以通过可逆变换转换为形如(3)的标准形系统, 且相似矩阵的特征多项式是对应相等的。故而, 标准形系统中的刚度系数 k_i 影响着系统(2)中的控制增益系数。

为此, 我们给出设计切换控制器的步骤:

- 1) 为了增大子系统的刚度差, 我们可以分别为两个标准形子系统选择一组较大与较小的刚度系数, 从而得到控制器 u_i 的两组增益系数。
- 2) 根据对应二自由度力学系统计算子系统能量函数。
- 3) 利用能量比值函数设计状态依赖切换规则, 基于切换规则设计切换控制器。

按上述步骤设计的切换控制器能够充分利用切换的作用减少系统的能量, 从而达到受控系统渐近稳定的目的。

4. 仿真实例

考虑四阶受控系统 $\dot{X} = AX + Bu$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -10 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -190 & -3 & 403 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

将控制器 $u_i (i=1,2)$ 代入到受控系统, 得到一个四阶切换系统 $\dot{X} = \tilde{A}_i X$, 其中系数矩阵 \tilde{A}_i 为

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -10+u_{1i} & 4+u_{2i} & -3+u_{3i} & -2+u_{4i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -190-u_{1i} & -3-u_{2i} & 403-u_{3i} & 2-u_{4i} \end{pmatrix}.$$

而 \tilde{A}_i 对应的标准形四阶矩阵 B_i 为

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{1i}-k_{2i} & -c_i & k_{2i} & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{2i} & c_i & -k_{2i}-k_{3i} & -c_i \end{pmatrix}.$$

根据相似矩阵的特征多项式相等, 解得

$$\begin{cases} u_{1i} = \frac{(2k_{2i} + 2k_{3i} - c_i - 400)k_{1i}}{801} + \frac{(2k_{2i} - c_i - 400)k_{3i}}{801} - \frac{800k_{2i}}{801} + \frac{400c_i}{801} + \frac{88010}{801}, \\ u_{2i} = \frac{(k_{2i} + k_{3i} + 400c_i - 200)k_{1i}}{160200} + \frac{(k_{2i} + 400c_i - 200)k_{3i}}{160200} - \frac{2k_{2i}}{801} - \frac{2402c_i}{801} - \frac{3004}{801}, \\ u_{3i} = \frac{2c_i k_{1i}}{801} + \frac{2c_i k_{3i}}{801} + \frac{k_{1i} k_{3i}}{160200} + \frac{k_{2i} k_{3i}}{160200} - \frac{800c_i}{801} + \frac{800k_{1i}}{801} + \frac{1600k_{2i}}{801} + \frac{800k_{3i}}{801} - \frac{157597}{801}, \\ u_{4i} = \frac{(k_{2i} + k_{3i} + 400c_i - 200)k_{1i}}{160200} + \frac{(k_{2i} + 400c_i - 200)k_{3i}}{160200} - \frac{2k_{2i}}{801} - \frac{800c_i}{801} + \frac{1802}{801}. \end{cases}$$

为了增大子系统的刚度系数差, 进行以下取值

$$\begin{cases} k_{11} = 200, \\ k_{21} = 400, \\ k_{31} = 1500, \\ c_1 = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} k_{11} = 200, \\ k_{21} = 400, \\ k_{31} = 10, \\ c_1 = -1. \end{cases}$$

得到控制器的增益系数为

$$\begin{cases} u_{11} = 1310, \\ u_{21} = -2, \\ u_{31} = 2303, \\ u_{41} = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} u_{12} = -180, \\ u_{22} = -2, \\ u_{32} = 813, \\ u_{42} = 2. \end{cases}$$

由于一般形子系统 \tilde{A}_i 相似于标准形系统 B_i , 求解得到一个可逆变换

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

进而, 得到子系统 \tilde{A}_i 的能量函数为

$$E_{\tilde{A}_1} = 100x_1^2 + \frac{(x_2 + x_4)^2}{2} + 200x_3^2 + 750(x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{2}x_4^2,$$

$$E_{\tilde{A}_2} = 100x_1^2 + \frac{(x_2 + x_4)^2}{2} + 200x_3^2 + 5(x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{2}x_4^2,$$

则切换系统的能量比值函数为

$$F(X(t)) = \frac{E_{\tilde{A}_1}}{E_{\tilde{A}_2}}$$

最后, 设计了如下的状态依赖切换控制器

$$u = \begin{cases} u_1 = 1310x_1 - 2x_2 + 2303x_3 + 2x_4, & F(X(t)) - F(X(t-\Delta t)) \geq 0 \\ u_2 = -180x_1 - 2x_2 + 813x_3 + 2x_4, & F(X(t)) - F(X(t-\Delta t)) < 0 \end{cases}$$

仿真结果见图 2, 受控系统在状态依赖切换控制器的作用下可以实现稳定, 各系统状态都能快速收敛到平衡点。

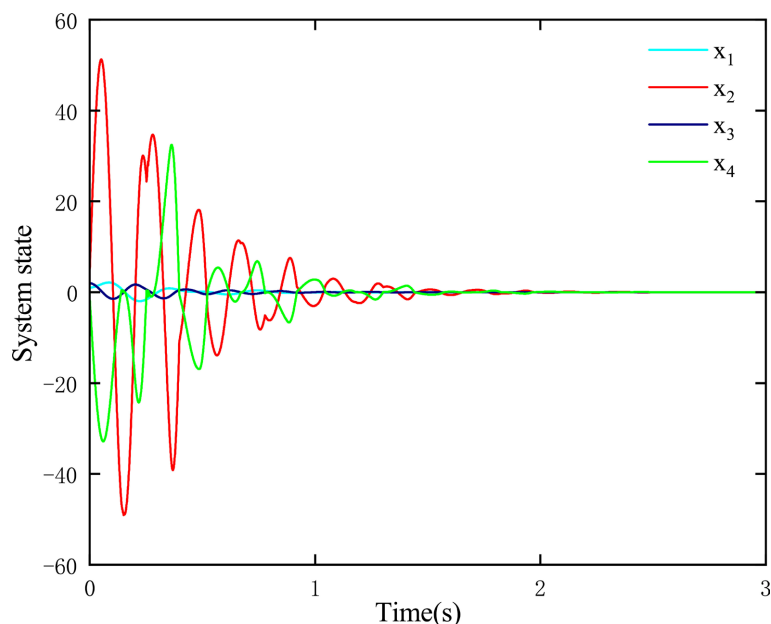


Figure 2. The time histories of system states

图 2. 系统状态的时间历程图

5. 结论与展望

本文基于子系统所对应的二自由度力学系统的物理意义设计了状态依赖切换规则, 设计了保守性弱的状态依赖切换控制器用以稳定增益系数有界的受控系统。该类切换控制器为更复杂系统的控制设计提供了新的思想和方向。

基金项目

本文获得国家自然科学基金(11802065)的资助。

参考文献

- [1] Skafidas, E., Evans, R.J., Savkin, A.V. and Petersen, I.R. (1999) Stability Results for Switched Controller Systems. *Automatica*, **35**, 553-564. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(98\)00167-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(98)00167-8)
- [2] 强明辉, 马文学, 马永炜. 基于 S7-200 改进 Bang-Bang 控制算法在温度控制中的应用[J]. 自动化与仪器仪表, 2013(6): 97-99.
- [3] Zhang, L., Cheng, D. and Li, C. (2005) Disturbance Decoupling of Switched Nonlinear Systems. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, **152**, 49-54. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:20051120>
- [4] Shtessel, Y.B., Raznopolov, O.A. and Ozerov, L.A. (1998) Control of Multiple Modular DC-to-DC Powers Converters in Conventional and Dynamic Sliding Surfaces. *IEEE Transactions on Circuits & Systems Part I Fundamental Theory & Applications*, **45**, 1091-1100. <https://doi.org/10.1109/81.728863>
- [5] Hu, T. and Lin, Z. (2001) Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design. In: *Control Engineering*, Springer Science and Business Media, Boston, 9-10. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0205-9>
- [6] Huang, J., Yang, L. and Trinh, H. (2021) Robust Control for Incremental Quadratic Constrained Nonlinear Time-Delay Systems Subject to Actuator Saturation. *Applied Mathematics and Computation*, **405**, Article ID: 126271. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126271>
- [7] 陈长征, 王刚, 于慎波. 考虑时变输入时滞及频段约束的车辆主动悬架预瞄控制[J]. 机械工程学报, 2016, 52(16): 124-131.
- [8] Stein, G. (2003) Respect the Unstable. *IEEE Control Systems Magazine*, **4**, 12-25. <https://doi.org/10.1109/MCS.2003.1213600>
- [9] Hu, T., Teel, A.R. and Zaccarian, L. (2005) Regional Anti-Windup Compensation for Linear Systems with Input Saturation. *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, Portland, 8-10 June 2005, 3397-3402.
- [10] Hu, T., Teel, A.R. and Zaccarian, L. (2008) Anti-Windup Synthesis for Linear Control Systems with Input Saturation: Achieving Regional, Nonlinear Performance. *Automatica*, **44**, 512-519. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.06.003>
- [11] Mohammadi, A., Tavakoli, M. and Marquez, H.J. (2013) Nonlinear Disturbance Observer Design for Robotic Manipulator. *Control Engineering Practice*, **21**, 253-267. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.10.008>
- [12] Fu, T. and Zhou, Y. (2022) Stabilization of Switched Time-Delay Systems with Only Unstable Subsystems: A New Approach Based on a Vibration Model of 1.5 Degrees of Freedom. *Applied Mathematics and Computation*, **415**, Article ID: 126740. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126740>