Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(4), 3699-3709
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.134372

高环同态的模糊稳定性

罗小淋[1]，**陈　琳**[2*]

[1]贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳
[2]常熟理工学院数学与统计学院，江苏　常熟

收稿日期：2023年7月6日；录用日期：2023年8月7日；发布日期：2023年8月15日

摘　要

本论文我们主要采取不动点的方法，通过选取一个特殊的控制函数序列以及利用模糊赋范空间的一些性质来研究模糊Banach代数上一个近似高环同态是一个精确高环同态，从而证得高环同态的模糊稳定性。此外，根据模糊连续性的定义，我们还得到了关于高环同态的模糊连续性。

关键词

模糊稳定，模糊连续，高环同态，Banach代数

Fuzzy Stability of Higher Ring Homomorphism

Xiaolin Luo[1], **Lin Chen**[2*]

[1]School of Mathematical and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
[2]School of Mathematical and Statistics, Changshu Institute of Technology, Changshu Jiangsu

Received: Jul. 6th, 2023; accepted: Aug. 7th, 2023; published: Aug. 15th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly use the fixed point method to study that an approximate higher ring homomorphism in fuzzy Banach algebra is an exact higher ring homomorphism by selecting a special control function sequence and using some properties of fuzzy normed space, thus proving the fuzzy stability of higher ring homomorphisms. In addition, according to the definition of fuzzy continuity, we also get the fuzzy continuity about higher ring homomorphisms.

*通讯作者。

文章引用: 罗小淋, 陈琳. 高环同态的模糊稳定性[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(4): 3699-3709.
DOI: 10.12677/orf.2023.134372

Keywords

Fuzzy Stability, Fuzzy Continuity, Higher Ring Homomorphism, Banach Algebra

1. 引言

函数方程的稳定性问题起源于 Ulam [1]在某一次数学研讨会上提出的度量群中群同态稳定性的问题。一年后，在 Banach 空间的假设条件下，Hyers [2]对 Ulam 关于可加性映射的问题给出了一个肯定的答复，得到了关于柯西函数方程稳定性问题的第一个定理，即：假设 A 和 B 都是 Banach 空间，对于任意的 $x,y\in A$ 和 $\varepsilon>0$，映射 $f:A\to B$ 满足：

$$\left\|f(x+y)-f(x)-f(y)\right\|\le\varepsilon,$$

则存在唯一的可加映射 $F:X\to Y$ 使得

$$\left\|F(x)-f(x)\right\|\le\varepsilon.$$

随后，Aoki [3]将 Hyers 定理推广到了可加映射。1978 年，Rassias [4]对 Hyers 方法中控制条件进行了减弱，换成了 $\varepsilon\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)(\varepsilon>0,0<p<1)$，在此基础上研究了线性映射的稳定性。进一步地，Găvruta [5]对 Rassias 定理中的 $\varepsilon\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$ 替换成更一般的控制函数形式 $\varphi(x,y)$，得到了更一般的结果。这一结果后来有大量的推广形式，统称为函数方程的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性。此后，许多学者研究了不同空间下不同函数方程的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性(可见参考文献[6] [7] [8])。

1996 年，Isac 和 Rassias [9]首次利用不动点定理来证明函数方程的稳定性，使得证明过程更简洁化，后称为不动点法。通过利用不动点法，许多学者对多种函数方程的稳定性进行了深入研究，相关内容可参考书籍[10]。

Katsaras [11]首先在向量空间上定义了模糊范数以及构建了一个模糊拓扑结构。然后，Bag 和 Samanta [12]给出了模糊范数的概念并研究了模糊赋范空间的各种性质。在 1996 年，Jun 和 Park [13]研究了导子在 Banach 代数上的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性。Badora [14]在 2002 年证明了 Banach 代数上环同态和环导子的稳定性。进一步地，Gordji [15]研究了环同态和环导子在模糊 Banach 代数上的稳定性。在 2009 年，Mirmostafaee [16]给出了模糊连续的定义，并证明了四次函数方程在模糊赋范空间的连续性。

在[17]中，作者提出了高环同态的定义，即：

设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数，实数 $a,b\ne0,\pm1$，从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}$ 的映射所组成的序列为 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$。如果对所有的 $x,y\in\mathcal{A}$ 和所有的正整数 n，有

$$H_n(ax+by)=aH_n(x)+bH_n(y)$$

和

$$H_n(xy)=\sum_{i=1}^{n}H_i(x)H_i(y)$$

则称 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个高环同态。

本论文组织如下：第二节的内容是本篇论文所涉及到的基础概念和不动点定理。第三节的内容是证明了高环同态在 Banach 代数上的模糊稳定性和模糊连续性，以及关于这两个定理的推论。第四节是本篇论文的总结。

2. 预备知识

本节将介绍本篇论文所涉及到的一些基础概念，其中$\mathbb{R}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{N}$分别代表实数域，有理数域，自然数集。

定义 2.1：设$\mathcal{A}$既是一个代数，又是一个赋范线性空间，且对$\forall x,y\in\mathcal{A}$，满足

$$\|xy\|\le\|x\|\|y\|,$$

则称$\mathcal{A}$是赋范代数。

定义 2.2：设X是一个非空集合，如果对任意的$x,y,z\in X$，集合X上的函数$d:X\times X\to[0,+\infty]$满足：

1) $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$；

2) $d(x,y)=d(y,x)$；

3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$，

则称d为广义度量，为(X,d)广义度量空间。

定义 2.3 [8] [12] 设X是实线性空间，函数$N:X\times\mathbb{R}\to[0,1]$，如果对任意的$x,y\in X$和任意的$s,t\in\mathbb{R}$，函数$N$满足：

(N1) 对$c\le 0$，有$N(x,c)=0$；

(N2) 对任意的$c>0$，$x=0$当且仅当$N(x,c)=1$；

(N3) 若$c\ne 0$，则$N(cx,t)=N\left(x,(|c|)^{-1}t\right)$；

(N4) $N(x+y,t+s)\ge\min\{N(x,t),N(y,s)\}$；

(N5) $N(x,\cdot)$在实数域上是非减函数且$\lim\limits_{t\to\infty}N(x,t)=1$；

(N6) 对$x\ne 0$，$N(x,\cdot)$在实数域上是(上半)连续的，

则称(X,N)为模糊赋范线性空间。

例子 2.4：设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，则

$$N(x,t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ \dfrac{t}{\|x\|}, & 0<t\le\|x\|,\\ 1, & t>\|x\|.\end{cases}$$

是X上的模糊范数。

证明：显然满足定义 2.4 的(N1)，(N2)，(N5)和(N6)。下面我们验证(N3)和(N4)。

令常数$c\ne 0$，当$0<t\le\|x\|$时，有$N(cx,t)=\dfrac{t}{|c|\|x\|}=\dfrac{(|c|)^{-1}t}{\|x\|}N\left(x,(|c|)^{-1}t\right)$，故(N3)成立。当$0<t\le\|x\|$时，对任意的$x,y\in X$有

$$N(x+y,s+t)=\frac{t+s}{\|x+y\|}\ge\frac{t+s}{\|x\|+\|y\|}\ge\begin{cases}\dfrac{t}{\|x\|}, & N(x,t)\le N(y,s),\\ \dfrac{s}{\|y\|}, & N(x,t)\ge N(y,s).\end{cases}$$

故 $N(x,t)=0$ 是模糊范数。

定义 2.5 [11] [12] 设 (X,N) 是模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列。如果在 X 中存在一个 x 使得对任意的 $t>0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} N(x_n-x,t)=1$，则称序列 $\{x_n\}$ 是收敛的。我们将其记作 $N-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 2.6 [8] [12] 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列。如果对每一个 $\varepsilon>0$ 和 $t>0$，存在 n_0 使得对任意的 $n\ge n_0$ 和 $p>0$，有 $N(x_{n+p}-x_n,t)\ge 1-\varepsilon$，则称序列 $\{x_n\}$ 是柯西序列的。若模糊赋范线性空间中每个柯西序列都是收敛的，则这个模糊范数是完备的，并将该空间称为模糊 Banach 空间。

定义 2.7 [14] 设 (Y,N) 是模糊赋范空间，函数 $f:\mathbb{R}\to Y$ 且 $0<\alpha<1$，如果对任意的 $t>0$ 有某个 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $N(f(x)-f(x_0),t)\ge\alpha$，则称 f 为 α-模糊连续。若 $f:\mathbb{R}\to Y$ 对每个 $0<\alpha<1$ 都 α-模糊连续，则称 f 为模糊连续。

定义 2.8 [8] 设 X 是代数，(X,N) 是模糊赋范空间。如果对 $\forall x,y\in X$ 和 $\forall s,t\in\mathbb{R}^+$，有

$$N(xy,st)\ge N(x,s)N(y,t),$$

则称 (X,N) 是模糊赋范代数。此外，完备的模糊赋范代数被称为模糊 Banach 代数。

引理 2.9 [17] **(不动点定理)** 设 (X,d) 是广义完备度量空间，$J:X\to X$ 是严格压缩映射，即对某些常数 $0<L<1$ 和 $\forall x,y\in X$，有

$$d(Jx,Jy)\le Ld(x,y),$$

那么，对 X 中一个给定的元素 x，要么对所有的非负整数 n 有

$$d(J^n x, J^{n+1}x)=\infty$$

成立，要么存在一个正整数 n_0 使得

1) 当 $n\ge n_0$ 时，有 $d(J^n x, J^{n+1}x)<\infty$；
2) 设 J 的不动点为 y^*，则序列 $\{J^n x\}$ 收敛到 y^*；
3) y^* 是 J 的唯一不动点且 $y^*\in\{y\in X: d(J^{n_0}x,y)<\infty\}$；
4) 对所有的 $y\in\{y\in X: d(J^{n_0}x,y)<\infty\}$，有 $d(y,y^*)\le\frac{1}{1-L}d(y,Jy)$。

3. 主要结果

在本节中，通过采取不动点的方法研究高环同态在模糊 Banach 代数上的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性以及模糊连续性。

定理 3.1： 设 $(\mathcal{A},N)$ 是模糊(复) Banach 代数，实数 $a,b\ne 0,\pm1$. 假设 $\{\varphi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\}$ 和 $\{\psi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\}$ 是由函数所组成的序列，且存在常数 $0<\theta,\lambda<1$ 使得对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和任意的 $x,y\in\mathcal{A}$，有

$$\varphi_n(ax,ay)\le|a|\theta\varphi_n(x,y) \tag{1}$$

与

$$\psi_n(ax,ay)\le|a|^2\lambda\psi_n(x,y). \tag{2}$$

如果从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}$ 的映射所组成的序列为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (n 为正整数)满足 $f_n(0)=0$，且对 $\forall x,y\in\mathcal{A}$ 和 $\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(ax+by)-af_n(x)-bf_n(y),t\right)\ge\frac{t}{t+\varphi_n(x,y)} \tag{3}$$

和

$$N\left(f_n(xy)-\sum_{i=1}^{n} f_i(x)f_i(y),t\right)\geq\frac{t}{t+\psi_n(x,y)} \tag{4}$$

成立，则存在唯一的高环同态 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对每个正整数 n 和 $\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(x)-H_n(x),t\right)\geq\frac{|a|(1-\theta)t}{|a|(1-\theta)t+\varphi_n(x,0)}. \tag{5}$$

证明：令(3)中 $y=0$，则根据(N3)，当 $x\in\mathcal{A}$ 和 $t>0$ 时，有

$$N\left(\frac{1}{a}f_n(ax)-f_n(x),\frac{1}{|a|}t\right)\geq\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)}. \tag{6}$$

设正整数 n 是固定的。定义集合 $S:=\{g_n:\mathcal{A}\to\mathcal{A},g_n(0)=0\}$ 和广义距离 $d:X\times X\to[0,+\infty]$ 为

$$d(g_n,h_n):=\inf\left\{\lambda>0:N\left(g_n(x)-h_n(x),\lambda t\right)\geq\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)},\forall x\in\mathcal{A},t>0\right\}.$$

显然 (X,d) 是完备的广义度量空间（证明见参考文献[18]）。定义映射 $J:X\to X$ 为

$$J(g_n)(x)=\frac{1}{a}g_n(ax)$$

其中 $x\in\mathcal{A}$。令 $g_n,h_n\in S$，且存在某个 $\varepsilon>0$，使得 $d(g_n(x),h_n(x))=\varepsilon<\infty$。因为

$$\begin{aligned}N\left(Jg_n(x)-Jh_n(x),\theta\varepsilon t\right)&=N\left(g_n(ax)-h_n(ax),|a|\theta\varepsilon t\right)\\&\geq\frac{|a|\theta t}{|a|\theta t+\varphi_n(ax,0)}\\&\geq\frac{|a|\theta t}{|a|\theta t+|a|\theta\varphi_n(x,0)}\\&=\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)},\end{aligned}$$

所以

$$d\left(Jg_n(x),Jh_n(x)\right)\leq\theta\varepsilon=\theta d\left(g_n(x),h_n(x)\right).$$

于是，可得 J 是压缩映射。下面证明 $d(Jf_n,f_n)<\infty$。
根据(6)，可得

$$N\left(Jf_n(x)-f_n(x),t\right)=N\left(\frac{1}{a}f_n(ax)-f_n(x),t\right)\geq\frac{|a|t}{|a|t+\varphi_n(x,0)}$$

即

$$N\left(Jf_n(x)-f_n(x),\frac{t}{|a|}\right)\geq\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)},$$

故可得 $d(Jf_n,f_n)\leq\frac{1}{|a|}<\infty$，满足引理 2.10 的条件，从而有：

i) 设 $H_n:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，则 H_n 是 J 的唯一不动点，其中 $J\in\{g_n\in S:d(Jf_n,g_n)<\infty\}$.

ii) $\{J^n x\}$ 收敛到 H_n，可定义 H_n 为

$$H_n(x) := N - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a^k} f_n(a^k x),$$

其中 $x \in \mathcal{A}$。

iii) $d(f_n, H_n) \le \frac{1}{1-\theta} d(f_n, Jf_n) \le \frac{1}{|a|(1-\theta)}$。根据距离的定义，可得

$$N(f_n(x) - H_n(x), t) \ge \frac{|a|(1-\theta)t}{|a|(1-\theta)t + \varphi_n(x,0)}.$$

下面证明 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足定义 2.3 的两个方程。首先，对(1)作归纳假设得：

$$\varphi_n(a^k x, a^k y) \le (|a|)^k \theta^k \varphi_n(x,y).$$

显然 $k=1$ 时，(1)是成立的。假设 $k=m\ge 2$ 时假设成立，验证 $k=m+1$ 时，有

$$\varphi_n(a^{m+1}x, a^{m+1}y) \le |a|\theta\varphi_n(a^m x, a^m y) \le (|a|)^{m+1} \theta^{m+1}\varphi_n(x,y).$$

故假设成立。同理，类似可得

$$\psi_n(a^k x, a^k y) \le (|a|^2 \lambda)^k \psi_n(x,y).$$

其次，在(3)中，用 $a^k x$，$a^k y$ 分别替代 x 和 y，得

$$N\left(\frac{1}{a^k} f_n(a^k(ax+by)) - \frac{1}{a^{k-1}} f_n(a^k x) - b\frac{1}{a^k} f_n(a^k y), t\right) \ge \frac{a^k t}{a^k t + \varphi_n(a^k x, a^k y)}$$
$$\ge \frac{t}{t+\theta^k \varphi_n(x,y)}.$$

因为当 $k\to\infty$ 时，$\frac{t}{t+\theta^k\varphi_n(x,y)} \to 1$，所以

$$N\left(\frac{1}{a^k} f_n(a^k(ax+by)) - \frac{1}{a^{k-1}} f_n(a^k x) - b\frac{1}{a^k} f_n(a^k y), t\right) \ge 1. \tag{7}$$

最后，利用定义 2.4 的(N4)，得

$$\begin{aligned} N(H_n(ax+by) - aH_n(x) - bH_n(y), t) \ge \min\Bigg\{ & N\left(H_n(ax+by) - \frac{1}{a^k} f_n(a^k(ax+by)), \frac{t}{4}\right), \\ & N\left(\frac{1}{a^{k-1}} f_n(a^k x) - aH_n(x), \frac{t}{4}\right), N\left(\frac{b}{a^k} f_n(a^k y) - bH_n(y), \frac{t}{4}\right), \\ & N\left(\frac{1}{a^k} f_n(a^k(ax+by)) - \frac{1}{a^{k-1}} f_n(a^k x) - \frac{b}{a^k} f_n(a^k y), \frac{t}{4}\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$

由(N5)可得：对 $\forall z \in X$ 和 $s>0$，有 $\lim_{k\to\infty} N\left(H_n(z) - \frac{1}{a^k} f_n(a^k x), s\right) = 1$。由(7)可得

$$N(H_n(ax+by) - aH_n(x) - bH_n(y), t) = 1.$$

通过模糊范数的定义可知

$$H_n(ax+by) = aH_n(x) + bH_n(y), \tag{8}$$

其中 $\forall x\in\mathcal{A}$ 。因此，$\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足可加性。在(4)中，用 $a^k x$， $a^k y$ 分别替代 x 和 y，得

$$N\left(\frac{1}{a^{2k}}f_n\left(a^kx\cdot a^ky\right)-\frac{1}{a^{2k}}\sum_{i=1}^{n}f_i\left(a^kx\right)f_i\left(a^ky\right),t\right)\ge\frac{a^{2k}t}{a^{2k}t+\psi_n\left(a^kx,a^ky\right)}$$
$$\ge\frac{t}{t+\lambda^k\psi_n\left(x,y\right)}.$$

因为当 $k\to\infty$ 时，$\frac{t}{t+\lambda^k\psi_n\left(x,y\right)}\to 1$，所以

$$N\left(\frac{1}{a^{2k}}f_n\left(a^kx\cdot a^ky\right)-\frac{1}{a^{2k}}\sum_{i=1}^{n}f_i\left(a^kx\right)f_i\left(a^ky\right),t\right)\ge 1. \tag{9}$$

结合(N4)和(9)得

$$\begin{aligned}N\left(H_n(xy)-\sum_{i=1}^{n}H_i(x)H_i(y),t\right)\ge\min\Bigg\{&N\left(H_n(xy)-\frac{1}{a^{2k}}f_n\left(a^kx\cdot a^ky\right),\frac{t}{3}\right),\\&N\left(\frac{1}{a^{2k}}\sum_{i=1}^{n}f_i\left(a^kx\right)f_i\left(a^ky\right)-\sum_{i=1}^{n}H_i(x)H_i(y),\frac{t}{3}\right),\\&N\left(\frac{1}{a^{2k}}f_n\left(a^kx\cdot a^ky\right)-\frac{1}{a^{2k}}\sum_{i=1}^{n}f_i\left(a^kx\right)f_i\left(a^ky\right),\frac{t}{3}\right)\Bigg\}\\\ge\,&1.\end{aligned}$$

故 $H_n(xy)=\sum_{i=1}^{n}H_i(x)H_i(y)$，其中 $\forall x\in\mathcal{A}$ 。证毕。

下面给出由定理 3.1 所得到的两个推论。

推论 3.2： 设 $(\mathcal{A},N)$ 是模糊(复) Banach 代数，实数 $a,b\ne 0,\pm1$ 。假设 $\{\varphi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\}$ 和 $\{\psi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\}$ 是由函数所组成的序列，且存在常数 $0<\theta,\lambda<1$ 使得对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和所有的 $x,y\in\mathcal{A}$，有

$$\theta\varphi_n(ax,ay)\ge|a|\varphi_n(x,y)$$

与

$$\lambda\psi_n(ax,ay)\ge|a|^2\psi_n(x,y).$$

如果从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}$ 的映射所组成的序列为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (n 为正整数)满足 $f_n(0)=0$，且对 $\forall x,y\in\mathcal{A}$ 和 $\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(ax+by)-af_n(x)-bf_n(y),t\right)\ge\frac{t}{t+\varphi_n(x,y)}$$

和

$$N\left(f_n(xy)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x)f_i(y),t\right)\ge\frac{t}{t+\psi_n(x,y)}$$

成立，则存在唯一的高环同态 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对每个正整数 n 和 $\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(x)-H_n(x),t\right)\ge\frac{\theta(1-\theta)t}{\theta(1-\theta)t+|a|\varphi_n(x,0)}.$$

证明： 根据定理 3.1 的证明，类似考虑完备广义度量空间 (X,d) 和压缩映射 J，并定义 J 为

$$J\left(g_n\right)(x)=ag_n\left(\frac{x}{a}\right).$$

令 $g_n,h_n\in S$，存在某个 $\varepsilon>0$，使得 $d\left(g_n(x),h_n(x)\right)=\varepsilon<\infty$。因为

$$\begin{aligned}N\left(Jg_n(x)-Jh_n(x),\theta\varepsilon t\right)&=N\left(g_n\left(a^{-1}x\right)-h_n\left(a^{-1}x\right),\left(|a|\right)^{-1}\theta\varepsilon t\right)\\&\geq\frac{\left(|a|\right)^{-1}\theta t}{\left(|a|\right)^{-1}\theta t+\varphi_n\left(a^{-1}x,0\right)}\\&\geq\frac{\left(|a|\right)^{-1}\theta t}{\left(|a|\right)^{-1}\theta t+\left(|a|\right)^{-1}\theta\varphi_n(x,0)}\\&=\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)},\end{aligned}$$

所以

$$d\left(Jg_n(x),Jh_n(x)\right)\leq\theta d\left(g_n(x),h_n(x)\right).$$

故 J 是压缩映射。由(6)可得

$$\begin{aligned}N\left(Jf_n(x)-f_n(x),\left(|a|\right)^{-1}\theta t\right)&=N\left(af_n\left(\frac{1}{a}x\right)-f_n(x),\left(|a|\right)^{-1}\theta t\right)\\&\geq\frac{\left(|a|\right)^{-1}\theta t}{\left(|a|\right)^{-1}\theta t+\varphi_n\left(a^{-1}x,0\right)}\\&\geq\frac{t}{t+\varphi_n(x,0)}.\end{aligned}$$

故 $d\left(Jf_n,f_n\right)\leq\dfrac{\theta}{|a|}<\infty$。于是对 $\forall x\in\mathcal{A}$ 和 $\forall t>0$，利用不动点方法，有

$$d\left(f_n,H_n\right)\leq\frac{1}{1-\theta}d\left(f_n,Jf_n\right)\leq\frac{1}{\left(|a|\right)^{-1}(1-\theta)\theta}$$

和

$$H_n(x):=N-\lim_{k\to\infty}a^kf_n\left(\frac{1}{a^k}x\right).$$

剩余部分证明与定理 3.1 类似。证毕。

推论 3.3： 设 $\left(\mathcal{A},N\right)$ 是模糊(复) Banach 代数，实数 $a,b\neq0,\pm1$ 和 $\rho_n,\rho_n'\geq0$。假设由函数所组成的序列 $\left\{\varphi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\right\}$ 和 $\left\{\psi_n:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,+\infty)\right\}$，且当 $0<|a|<1$ 时 $p>1$；当 $|a|>1$ 时 $0<p<1$。如果从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}$ 的映射所组成的序列为 $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (n 为正整数)满足 $f_n(0)=0$，且对 $\forall x,y\in\mathcal{A}$ 和 $\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(ax+by)-af_n(x)-bf_n(y),t\right)\geq\frac{t}{t+\rho_n\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)}$$

和

$$N\left(f_n(xy)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x)f_i(y),t\right)\geq\frac{t}{t+\rho_n'\|x\|^p\|y\|^p}$$

成立，则存在唯一的高环同态$\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$使得对每个正整数 n 和$\forall t>0$，有

$$N\left(f_n(x)-H_n(x),t\right)\geq\frac{|a|\left(1-|a|^{p-1}\right)t}{|a|\left(1-|a|^{p-1}\right)t+\rho_n\|x\|^p}.$$

证明：根据定理 3.1 的证明，令$\varphi_n(x,y)=\rho_n\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$和$\psi_n(x,y)=\rho_n'\|x\|^p\|y\|^p$。采取相同方法，选取$\theta$，$\lambda$分别为$|a|^{p-1}$和$|a|^{2p-2}$，可证得该推论。

下面将研究高环同态在 Banach 代数上的模糊连续性。假设定理 3.1 是成立的，并使用定理 3.1 中的术语。

定理 3.4：若对任意的$x\in\mathcal{A},u\in\mathbb{R}$，从$\mathbb{R}\to\mathcal{A}$的映射$u\to f_n(ux)$是模糊连续的和从$\mathbb{R}\to[0,+\infty)$的映射$u\to\varphi_n(ux,0)$是模糊连续的，则映射$u\to H_n(ux)$也是模糊连续的。

证明：固定$x\in X,u_0\in\mathbb{R},t>0,0<\alpha<1$，可得：$\exists k_0\in\mathbb{N}$，使得

$$\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}u_0x,0\right)}>\alpha.$$

于是，根据(5)和$H_n(x):=N-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{a^k}f_n\left(a^kx\right)$，利用$H_n$的可加性，推得

$$\begin{aligned}N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}u_0x\right)-H_n(u_0x),\frac{t}{3}\right)&=N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}u_0x\right)-\frac{1}{2^{k_0}}H_n\left(2^{k_0}u_0x\right),\frac{t}{3}\right)\\&\geq\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}u_0x,0\right)}\\&>\alpha.\end{aligned}$$

因为映射$u\to f_n(ux)$和$u\to\varphi_n(ux,0)$是模糊连续的，所以存在$0<\delta<1$，使得当$0<|u-u_0|<\delta$时，有

$$N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}ux\right)-\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}u_0x\right),\frac{t}{3}\right)>\alpha$$

和

$$\left|\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}ux,0\right)}-\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}u_0x,0\right)}\right|>\alpha.$$

于是，可得

$$\begin{aligned}N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}ux\right)-H_n(ux),\frac{t}{3}\right)&=N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}ux\right)-\frac{1}{2^{k_0}}H_n\left(2^{k_0}ux\right),\frac{t}{3}\right)\\&\geq\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}ux,0\right)}\\&\geq\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}ux,0\right)}-\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}u_0x,0\right)}\\&\quad+\frac{2^{k_0}|a|(1-\theta)t}{2^{k_0}|a|(1-\theta)t+3\varphi_n\left(2^{k_0}u_0x,0\right)}\\&>2\alpha.\end{aligned}$$

故而

$$N\left(H_n(ux)-H_n(u_0x),t\right)\ge\min\left\{N\left(H_n(ux)-\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}ux\right),\frac{t}{3}\right),N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}ux\right)-\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}u_0x\right),\frac{t}{3}\right),\right.$$
$$\left.N\left(\frac{1}{2^{k_0}}f_n\left(2^{k_0}u_0x\right)-H_n\left(u_0x\right),\frac{t}{3}\right)\right\}$$
$$>\alpha.$$

因此，结合定义 2.8 就可证得映射 $u\to H_n(ux)$ 也是模糊连续的。

推论 3.5： 在定理 3.4 满足的情况下，对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\forall x\in\mathcal{A}$，有 $H_n(\lambda ax)=\lambda aH_n(x)$ 成立。

证明： 在式(8)中，设 k 为正整数。令 $y=0$，得 $H_n(ax)=aH_n(x)$，所以 $k=1$ 时是成立的。又令 $ax=by$，则

$$H_n(2ax)=aH_n(x)+bH_n\left(\frac{a}{b}x\right)=aH_n(x)+b\cdot\frac{a}{b}H_n(x)=2aH_n(x),$$

所以 $k=2$ 时是成立的。现用数学归纳法，假设 $k\le m\,(m\in\mathbb{N})$ 时是成立的，我们证明当 $k=m+1$ 时，$H_n(kax)=kaH_n(x)$ 也是成立的。我们令 $y=\frac{\max}{b}$，则

$$\begin{aligned}H_n((m+1)ax)&=H_n(ax+by)\\&=aH_n(x)+bH_n\left(\frac{ma}{b}x\right)\\&=aH_n(x)+b\cdot\frac{ma}{b}H_n(x)\\&=(m+1)aH_n(x),\end{aligned}$$

所以 $k=m+1$ 时也是成立的。设 $p,q\in\mathbb{N}$，则

$$H_n\left(\frac{p}{q}ax\right)=paH_n\left(\frac{1}{q}x\right)=p\frac{1}{q}aH_n(x).$$

故对任意的 $r\in\mathbb{Q}$ 有 $H_n(rax)=raH_n(x)$。令 $\lambda\in\mathbb{R}$，则存在一个有理数列 $\{r_i\}(i\in\mathbb{N})$ 使得 $r_i\to\lambda$。又因为 $H_n(x)$ 的连续性，所以有 $H_n(\lambda ax)=\lim\limits_{i\to\infty}H_n(r_iax)=\lim\limits_{i\to\infty}r_iaH_n(x)=\lambda aH_n(x)$ 成立。

4. 总结

本文通过利用不动点定理，结合模糊范数的定义与性质，证明了在模糊 Banach 代数上高环同态的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性。通过改变控制函数的条件和控制函数的形式，得到了两个推论。此外，我们结合模糊连续的定义，证得了高环同态的模糊连续性。这一结果对于后续研究其它同态在模糊 Banach 代数上的稳定性和连续性有一定的借鉴作用。

致　谢

感谢匿名审稿人的宝贵修改建议，这些大大提高了论文的发表。本论文得到了国家自然科学基金(No. 12061018)的资助。

参考文献

[1] Ulam, S.M. (1960) Collection of Mathematical Problems.

[2] Hyers, D.H. (1941) On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **27**, 222-224. https://doi.org/10.1073/pnas.27.4.222

[3] Aoki, T. (1950) On the Stability of the Linear Transformation in Banach Spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **2**, 64-66. https://doi.org/10.2969/jmsj/00210064

[4] Rassias, Th.M. and Themistocles, M. (1978) On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **72**, 297-297. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1

[5] Găvruta, P. (1994) A Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias Stability of Approximately Additive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, **184**, 431-436. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1211

[6] 纪培胜, 赵英姿. Jensen-二次函数方程及其 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 数学学报(中文版), 2015, 58(2): 251-260.

[7] Gao, Z.X., Cao, U.X., Zheng, E.T. and Lu, X.U. (2009) Generalized Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Inequalities and Functional Equations. *Journal of Mathematical Inequalities*, **3**, 63-77. https://doi.org/10.7153/jmi-03-06

[8] 赵英姿, 纪培胜. 模糊 Banach 代数上高阶环导子的稳定性[J]. 青岛大学学报(自然科学版), 2012, 25(3): 13-16.

[9] Isac, G. and Rassias, Th.M. (1996) Stability of ψ-Additive Mappings: Applications to Nonlinear Analysis. *International Journal of Mathematics and Mathematical Science*, **19**, 21-228. https://doi.org/10.1155/S0161171296000324

[10] Cho, Y.J., Park, C. and Rassias, Th.M. (2015) Stability of Functional Equations in Banach Algebras. Springer International Publishing, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18708-2

[11] Katsaras, A.K. (1984) Fuzzy Topological Vector Spaces II. *Fuzzy Sets and Systems*, **12**, 143-154. https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90034-4

[12] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[13] Jun, K.W. and Park, D.W. (1996) Almost Derivations on the Banachalgebra C^n[0,1]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **33**, 359-366.

[14] Badora, R. (2002) On Approximate Ring Homomorphisms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **276**, 589-597. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00293-7

[15] Gordji, M.E. (2009) On Approximate n-Ring Homomorphisms and n-Ring Derivations.

[16] Mirmostafaee, A.K. (2009) A Fixed Point Approach to Almost Quartic Mappings in Quasi Fuzzy Normed Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **160**, 1653-1662. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.01.011

[17] Ekrami, S.K. (2022) Higher Homomorphisms and Their Approximations. *Journal of Mahani Mathematical Research*, **12**, 327-337.

[18] Mihet, D. and Radu, V. (2008) On the Stability of the Additive Cauchy Functional Equation in Random Normed Spaces. *Mathematical Analysis and Application*, **343**, 567-572. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.100