Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(4), 4120-4131
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.134412

Hans汉斯

具有空间测量数据的抛物型方程界面问题的半离散误差估计

杨 勋，罗贤兵

贵州大学，数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年6月5日；录用日期：2023年8月15日；发布日期：2023年8月23日

摘 要

本文研究了具有空间测度数据的线性抛物界面问题的先验误差分析，对于空间的离散我们运用有限元离散得到它的半离散问题，由于测度的正则性较低，所以问题的解在整个域内具有很低的正则性。利用 L^2 投影算子和对偶性参数，在最小正则性条件下，导出了空间离散有限元逼近的 L^2 范数中的先验误差估计。

关键词

空间测度数据，半离散，L^2范数，先验误差估计

Semi-Discrete Error Estimation of the Interface Problem of Parabolic Equations with Spatial Measurement Data

Xun Yang, Xianbing Luo

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jun. 5^{th}, 2023; accepted: Aug. 15^{th}, 2023; published: Aug. 23^{rd}, 2023

文章引用: 杨勋, 罗贤兵. 具有空间测量数据的抛物型方程界面问题的半离散误差估计[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(4): 4120-4131. DOI: 10.12677/orf.2023.134412

Abstract

In this paper, we study the a priori error analysis of linear parabolic interface problems with spatial measure data. For the spatial discretization, we use finite element discretization to obtain its semi-discrete problem; because the measure regularity is low, so the solution of the problem has very low regularity in the whole domain. We derive a prior error estimate in the L^2 norm of the spatial discrete finite element approximation under minimum regularity, using the L^2 projection operator and the duality parameter.

Keywords

Spatial Measure Data, Semi-Discrete, L^2 Norm, A Priori Error Estimates

1. 引言

本文研究了具有空间测量数据的线性抛物面界面问题的空间离散有限元逼近的先验误差分析，即

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\beta \nabla u) = \mu & (x,t) \in \quad \Omega_T \\ u = 0 & (x,t) \in \quad \Gamma_T \\ u(\cdot, 0) = u_0 & x \in \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

在 $\Gamma_{T1} = \Gamma_1 \times [0,T]$ 上满足下面的界面跳转条件

$$[u] = 0, \ \ [\beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}] = 0. \tag{1.2}$$

其中，Ω 是 R^2 中的有界的凸多边形区域，$\Omega_T = \Omega \times (0,T]$，$\Gamma_T = \Gamma \times (0,T]$，这里的边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 是利普希茨边界。设 Ω_1 是 Ω 的子区域，且边界 $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$ 具有 C^2 的光滑性。Ω_1 将区域 Ω

划分为两个子区域 Ω_1, Ω_2，满足 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Gamma$ 和 $|\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Gamma\ |$=0。符号 $[u]$ 表示 u 在界面 Γ_1 上的跳跃，即，$[u](x) = u_1(x) - u_2(x), x \in \Gamma_1, u_i(x) = u(x)\ |_{\Omega_i}$。扩散系数 β 是分段常值函数，即，

$$\beta(x) = \beta_i,\ x \in \Omega_i, i = 1, 2.$$

这里的初始函数 $u_0(x) \in L^2(\Omega)$,右端项 $\mu \equiv f\sigma$,这里 $f \in L^2(0,T;C(\bar{\Omega})), \sigma \in \mathcal{M}(\Omega)$，其中 $\mathcal{M}(\Omega)$ 表示一个在区域 Ω 上实的，正则的博雷尔可测空间，我们定义它为空间 $C(\bar{\Omega})$ 的共轭空间，并定义该空间的如下范数

$$\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = sup\{\int_\Omega v d\sigma : v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\ ,\ \|v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq 1\} \tag{1.3}$$

关于带测度数据的偏微分方程的研究是21世纪比较热门的课题之一，这类问题在生活中也比较普遍，例如模拟具有电荷分布(μ)的电场的电势 [1]，声学单极子的建模 [2]，在污水处理系统的设计和管理中，解决从污水处理系统排放的污染污水 [3]。

2006 年Araya 和Bhrens 对具有狄拉克源项的椭圆问题的后验误差估计 [2]。2013 年龚伟研究了带有测度的抛物方程有限元逼近的误差估计 [3]。2014 年Casas 等人研究了带测度的半线性椭圆方程的最优控制 [4]。2019 年Shakya 和Sinha 研究了带测度的抛物方程最优控制问题的有限元逼近 [5]。2021 年Gupta 研究了时间上是测度的抛物界面问题的有先验误差估计. 关于抛物型界面问题的有限元方法已经被许多作者广泛研究, 我们可以参考文献 [6] [7]。对于带有测度数据的抛物方程的界面问题的研究中还有很多的工作需要完成，例如空间中带有测度数据的抛物界面问题的半离散的误差估计，带有测度数据的抛物界面问题的完全离散的误差估计，关于带有测度数据的抛物界面问题的最优控制等等。

对于本文的而言，我们将推导出具有空间测量数据的抛物界面问题的先验误差界。由于系数在界面 Γ_1 上的不连续以及右端项带有测度数据，导致我们问题的解的正则性很低, 因此我们引入对偶性参数，和一些标准的估计可以推导出带有测度数据的抛物界面问题L^2 的半离散误差估计。

2. 预备知识

2.1. 一些空间和符号的说表示

接下来我们介绍一些常见的空间和一些符号表示。空间 $L^p(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上 p 次方勒贝格可积的函数全体，并定义下面的范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx.$$

$1 \leq p \leq \infty$， 特别的当 $p = 2$,该空间为 $L^2(\Omega)$，我们用$W^{m,p}(\Omega)$ 表示区域 Ω 上的Sobolev空间，这里m$\geq 0, 1 \leq p \leq \infty$ 对应的范数用符号 $\|\cdot\|_{w^{m,p}(\Omega)}$表示。特别的，p=2, $W^{m,2}(\Omega)$=$H^m(\Omega)$ 满足$\|\cdot\|_{w^{m,2}(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$，$H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0\ , \forall x \in\ \partial\Omega\}$。$H^{-1}(\Omega)$ 表

示 $H_0^1(\Omega)$ 的共轭空间，同时在此空间定义如下的范数；

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{w\in H_0^1(\Omega), w\neq 0} \frac{(v,w)}{\|w\|_{H^1(\Omega)}}.$$

我们用 $L^n(0,T;W^{m,p}(\Omega))$ 表示所有 $v:[0,T]\longrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ 的强可测函数组成的全体。

$$\|v\|_{L^n(0,T;W^{m,p}(\Omega))} = (\int_0^T \|v\|^n_{W^{m,p}(\Omega)}dt)^{\frac{1}{n}} \quad 0\leq n<\infty.$$

我们用 $D(\Omega_T)$ 表示在 Ω_T 上具有紧支集的 $C^\infty(\Omega_T)$ 函数的集合，我们规定一些符号。

$$W(\Omega) := H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega_1)\cap H^2(\Omega_2),$$
$$X(0,T) := L^2(0,T;W(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$Y(0,T) := L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
$$L^2(\Omega_T) = L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

我们容易知道 $X(0,T)\hookrightarrow C([0,T];H_0^1)$，同时我们在 W 空间定义如下的范数

$$\|u\|_{W(\Omega)} := \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega_1)} + \|u\|_{H^2(\Omega_2)},$$

下面来我们定义双线性算子 $a(\cdot,\cdot)$ 分别在 Ω 和 Ω_T上的表形式。

$$a(u,v) = \int_\Omega \beta\nabla u\nabla v dx, \quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega),$$

$$a(u,v)_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \beta\nabla u\nabla w dxdt \quad \forall u,v\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

2.2. 抛物面界面问题的稳定性结果

为了方便后面的误差估计，我们还需要引入下面的标准的界面问题的解的正则性与稳定性结果。我们考虑了以下形式的前后时间抛物线接口问题：我们设 ϕ 是下面问题的解。

$$\begin{cases} \phi_t(x,t) + \nabla\cdot(\beta\nabla\phi) = g & (x,t)\in \quad \Omega_T \\ \phi(x,0) = 0 & x\in \quad \Omega \\ \phi = 0 & (x,t)\in\Gamma_T, \end{cases} \tag{2.1}$$

同时在 $\Gamma_T = \Gamma\times[0,T]$ 上满足下面的界面跳转条件

$$[\phi] = 0, \quad [\beta\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}] = 0. \tag{2.2}$$

我们引入另一个问题，设 ψ 是如下问题的解。

$$\begin{cases} -\psi_t(x,t)+\nabla\cdot(\beta\nabla\psi)=g & (x,t)\in\quad\Omega_T \\ \psi(x,T)=0 & x\in\quad\Omega \\ \psi=0 & (x,t)\in\Gamma_T. \end{cases} \tag{2.3}$$

满足 $\Gamma_T=\Gamma\times[0,T]$ 上满足下面的界面跳转条件

$$[\psi]=0,\quad [\beta\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}]=0, \tag{2.4}$$

上面的 $g\in H^1(0,T;L^2(\Omega))$，下面一个引理我们得到上面两个界面问题的稳定性结果 [6] [7]。

引理2.1. *设 $g\in H^1(0,T;L^2(\Omega))$，则问题(2.1)-(2.2) 和问题(2.3)-(2.4) 有唯一的解v $(v=\phi,v=\psi)$,$v\in L^2(0,T;W(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$，而且，$v\in L^2(0,T;W(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))\hookrightarrow C([0,T];H^1(\Omega))$，满足下面的稳定估计。*

$$\|v\|_{L^2(0,T;W(\Omega))}+\|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le c\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.5}$$

$$\|\phi(T)\|_{H^1(\Omega)}\le c\|g\|_{L^2(\Omega_T)},\qquad \|\psi(0)\|_{H^1((\Omega)}\le c\|g\|_{L^2(\Omega_T)}. \tag{2.6}$$

2.3. 带有测度数据的抛物界面问题弱解的存在唯一性

我们将讨论具有空间测量数据的抛物线界面问题（1.1）-（1.2）的解的存在唯一性。我们通过参考 [3] [8]，运用转位技术可以证明该类问题具有唯一的弱解。

引理2.2. *设 $f\in L^2(0,T;C(\bar\Omega))$ 和 $\sigma\in\mathcal{M}(\Omega)$,则问题(1.1)-(1.2) 在下列问题意义下有唯一的解 $u\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$*

$$-(u,v_t)_{\Omega_T}+a(u,v)_{\Omega_T}=\langle\mu,v\rangle_{\Omega_T}+(u_0,v(x,0))\quad\forall v\in X(0,T), \tag{2.7}$$

这里的 $v(x,T)=0$

$$\langle\mu,v\rangle_{\Omega_T}=\int_{\bar\Omega_T}v\,d\mu=\int_\Omega(\int_0^T f(x,t)v(x,t)dt)d\sigma(x)\quad\forall v\in L^2(0,T;C(\bar\Omega)),$$

满足

$$\|y\|_{L^2(\Omega_T)}\le C(\|g\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\omega\|_{\mathcal{M}(\Omega)}+\|y_0\|_{L^2(\Omega)}+\|q\|_{L^2(\Omega_T)}), \tag{2.8}$$

而且

$$y\in L^1(0,T;W^{1,p}(\Omega))\cap C([0,T];W^{1,q}(\Omega)'),\ \ \partial_t y\in L^1(0,T;W^{1,q}(\Omega)'),$$

有

$$\|y\|_{L^1(0,T;W^{1,p}(\Omega))}\le C\,(\|g\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\omega\|_{\mathcal{M}(\Omega)}+\|y_0\|_{L^2(\Omega)}+\|q\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.9}$$

这里 $p\in[1,\frac{d}{d-1})$， p ， q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

2.4. 区域Ω的有限元离散

为了定义区域 Ω 的有限元近似，我们在区域 $\bar{\Omega}$ 上剖分为符合规则的三角剖分 $\mathcal{T}_h=\{K\}$，我们用一个边界为 Γ_p 的多边形 P_{Ω_1} 来近似域 Ω_1，使多边形的所有顶点都位于界面上。因此，Γ_p 将域 Ω 划分为两个子区域 P_{Ω_1} 和 P_{Ω_2}，其中 P_{Ω_2} 是一个近似于域 Ω_2 的多边形区域。接下来我们对三角剖分 $\mathcal{T}_h=\{K\}$ 做出以下假设，我们参考文献[6]。

A1. 如果 K_1，$K_2\in\mathcal{T}_h$ 且 $K_1\neq K_2$，满足 $K_1\cap K_2=\emptyset$ 或者 $K_1\cap K_2$ 共享一个共同的边或一个共同的顶点。每个三角形只能是是在 P_{Ω_1} 或者是在 P_{Ω_2} 上，它与界面最多相交于一条边。

A2. 对于每个元素 $K\in\mathcal{T}_h$，我们假设两个参数 d_k，σ_k，这里 d_k 表示元素 K 的直径，σ_k 表示 K 中所有内接圆的直径的最大值，$h=\max_{K\in\mathcal{T}_h}d_k$。同时我们假设满足以下正则性假设，存在一个正常数 C，使

$$\frac{d_K}{\sigma_k}\leq C,\ \ \frac{h}{d_K}\leq C.$$

与 $\mathcal{T}_h$ 相关联的有限维的子空间

$$V_h:=\{v\in H_0^1(\Omega)|v|_K\in P_1(K),\ \ \forall K\in\mathcal{T}))h\},$$

其中 $P_1(K)$ 是三角单元 K 上最多为 1 次的多项式空间。我们还需要引入如下的反估计，$v_h\in V_h$ [9]

$$\|v_h\|_{H^{s,2}(\Omega)}\leq Ch^{l-s}\|v_h\|_{H^{l,2}(\Omega)},\quad 0\leq l\leq s\leq 1, \tag{2.10}$$

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leq Ch^{-\frac{d}{2}}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

这里的 $d=dim(\Omega)$，本文后续用到的 c 表示不依赖于 h 的常数。

2.5. 插值估计

下面的插值估计我们可以参考文献 [6] [10]。

引理2.3. 设 $\Pi_h:C(\bar{\Omega})\to V_h$ 是标准的拉格朗日插值算子，则有下面的插值估计。

$$\|v-\Pi_hv\|+h\|\nabla(v-\Pi_hv)\|\leq ch^2\mid log\,h\mid^{\frac{1}{2}}\|v\|_{W(\Omega)},\quad \forall v\in W(\Omega). \tag{2.12}$$

3. 先验误差估计

3.1. 空间离散形式和一些投影算子

为了得到后面的先验误差估计，我们引入问题 (1.1)-(1.2) 的空间离散形式。

$$-(u_h,v_{h,t})_{\Omega_T}+a(u_h,v_h)_{\Omega_T}=\langle\mu,v_h\rangle_{\Omega_T}+(\Pi_0u_0,v_h(x,0))\quad \forall v_h\in H^1(0,T;V_h), \tag{3.1}$$

其中 Π_0u_0 是从 $L^2(\Omega)$ 到 V_h 的投影算子。而且

$$\langle \mu, v_h \rangle_{\Omega_T} = \int_{\bar{\Omega}_T} v_h d\mu = \int_{\Omega} (\int_0^T f(x,t) v_h(x,t) dt) d\sigma(x) \quad \forall v_h \in H^1(0,T;V_h),$$

接下来我们引入一些投影算子。

设 L_h 是 L^2 投影算子，满足，$L_h : L^2(\Omega) \to V_h$，使得对于 $y \in L^2(\Omega)$ 有

$$(L_h y, v_h) = (y, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.2}$$

设 R_h 是 $Ritz$ 投影算子，满足，$R_h : H_0^1(\Omega) \to V_h$，使得对于 $y \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$a(R_h y, v_h) = a(y, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.3}$$

下面我们引入 L^2 投影算子和 $Ritz$ 投影算子的一些性质,我们可以参考 [3] [11] [12]。

引理3.1. *设 L_h 是（3.2）定义 L^2 投影算子，R_h 是（3.3）定义 $Ritz$ 投影算子，则有以下的结果成立。*

$$\|y - L_h y\|_{-1} + h\|y - L_h y\| \le ch^2 \|y\|_1, \tag{3.4}$$

$$\|y - R_h y\| + h|log\, h|^{\frac{1}{2}} \|y - R_h y\|_1 \le ch^2 |log\, h| \|y\|_{W(\Omega)}. \tag{3.5}$$

在估计问题（1.1）-（1.2）的空间离散的误差估计时，我们需要定义后向抛物型界面问题（2.3）-（2.4）的空间离散有限元近似，因此我们先给出了接口问题（2.3）-（2.4）的弱公式，这里 $\psi(\cdot, T) = 0$。

$$-(\psi_t, v)_{\Omega_T} + a(\psi, v)_{\Omega_T} = (g, v)_{\Omega_T} \quad \forall v \in H^1(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.6}$$

(3.6) 中的 $\psi \in H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$。

我们在（3.6）的基础之上，我们给出问题（2.3）-（2.4）的空间离散形式，这里 $\psi_h(\cdot, T) = 0$。

$$-(\psi_{h,t}, v_h)_{\Omega_T} + a(\psi_h, v_h)_{\Omega_T} = (g, v_h)_{\Omega_T} \quad \forall v_h \in H^1(0,T;V_h), \tag{3.7}$$

(3.7) 中的 $\psi_h \in H^1(0,T;V_h)$，因此通过（3.6）和（3.7）我们得到下面的正交性质。

$$-(\psi_t - \psi_{h,t}, v_h)_{\Omega_T} + a(\psi - \psi_h, v_h)_{\Omega_T} = 0 \quad \forall v_h \in H^1(0,T;V_h). \tag{3.8}$$

下面的引理给出了后向抛物面界面问题（2.3）-（2.4）的一个先验误差界,我们可以参考 [13] [14]。

引理3.2. *设 $\psi \in L^2(0,T;W(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T];H_0^1(\Omega))$ 和 ψ 分别是问题（2.3）-*

（*2.4*）和（*3.7*）的解，$\psi_h(0) = L_h\psi(0)$,则我们有

$$\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2+\int_0^t\|\psi(s)-\psi_h(s)\|_1^2ds \le ch^2(\|\partial_t\psi\|^2_{L^2(\Omega_T)}+|log\ h|\|\psi\|^2_{L^2(0,T;W(\Omega))}). \tag{3.9}$$

证明. 我们运用（3.6）-（3.7）获得下面的（3.9）。

$$-(\psi_t-\psi_{h,t},v_h)_{\Omega_T}+a(\psi(t)-\psi_h(t),v_h)_{\Omega_T}=0 \quad \forall v_h\in H^1(0,T;V_h), \tag{3.10}$$

设 $v_h(t) = L_h\psi(t), t\in(0,T]$，运用（3.2）我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2+a(\psi(t)-\psi_h(t),\psi(t)-\psi_h(t))\\
&=(\psi_t(t)-\psi_{h,t}(t),\psi(t)-v_h(t))+a(\psi(t)-\psi_h(t),\psi(t)-v_h(t))\\
&=(\psi_t(t)-L_h\psi_t(t),\psi(t)-L_h\psi(t))+(L_h\psi_t(t)-\psi_{h,t}(t),\psi(t)-L_h\psi(t))\\
&+a(\psi(t)-\psi_h(t),\psi(t)-L_h\psi(t))\\
&=(\psi_t(t)-L_h\psi_t(t),\psi(t)-L_h\psi(t))+a(\psi(t)-\psi_h(t),\psi(t)-L_h\psi(t))\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)-L_h\psi(t)\|^2+a(\psi(t)-\psi_h(t),\psi(t)-L_h\psi(t)),
\end{aligned}$$

这里 $\partial_t(L_h\psi(t)-\psi_h(t))\in V_h$，由上面的推导，两边同时在0到t上积分，结合柯西-施瓦茨不等式我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2+\gamma\int_0^t\|\psi(s)-\psi_h(s)\|_1^2ds\\
&\le c(\|\psi(t)-L_h\psi(t)\|^2+\|\psi(0)-\psi_h(0)\|^2-\|\psi(0)-L_h\psi(0)\|^2+\int_0^t\|\psi(s)-L_h\psi(s)\|_1^2ds),
\end{aligned}$$

□

我们知道 $\psi_h(0)=L_h\psi(0)$，因为 $\|w-L_hw\|_1\le c\|w-R_hw\|_1\ \forall\, w\in H_0^1(\Omega)$ 所以我们得到下面的式子

$$\begin{aligned}
&\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2+\gamma\int_0^t\|\psi(s)-\psi_h(s)\|_1^2ds\\
&\le c(\|\psi(t)-L_h\psi(t)\|^2+\int_0^t\|\psi(s)-R_h\psi(s)\|_1^2ds)\\
&\le c(\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)-L_h\psi(t)\|^2+\int_0^t\|\psi(s)-R_h\psi(s)\|_1^2ds),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

又因为 $Y(0,T) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega))$ 我容易知道。

$$\max_{t\in[0,T]} \|w(t)\| \le c(\|w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t w\|_{L^2(0,T;H_0^{-1}(\Omega))}), \tag{3.12}$$

运用引理3.1，结合（3.10）-（3.11）我们获得

$$\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(s)-\psi_h(s)\|_1^2 ds \le ch^2(\|\partial_t\psi\|^2_{L^2(\Omega_T)} + |log\ h|\|\psi\|^2_{L^2(0,T;W(\Omega))}). \tag{3.13}$$

于是我们完成了该引理的证明，并得到如下重要的引理。

引理3.3. *设 $\psi \in X(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H_0^1)$，$\psi_h$ 分别是问题（2.3）-（2.4）和（3.7）的解，若 $\psi_h(0) = L_h\psi(0)$,则我们有*

$$\|\psi-\psi_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le ch(\|\psi_t\|_{L^2(\Omega_T)} + |log\ h|^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))}), \tag{3.14}$$

$$\|\psi-\psi_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \le ch(\|\psi_t\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))}). \tag{3.15}$$

证明. 这里的（3.13）的证明我们可以利用引理3.2很容易证明，所以我们省略（3.13）的证明过程。接下来我们证明（3.14)，我们引用标准拉格朗日插值算子 $\Pi_h\psi$， 则

$$\begin{aligned}\|\psi-\psi_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} &\le \|\psi-\Pi_h\psi\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\Pi_h\psi-\psi_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\\ &\le ch^{2-\frac{d}{2}}\|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))} + ch^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_h\psi-\psi_h\|_{L^2(\Omega_T)}\\ &\le ch^{2-\frac{d}{2}}\|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))} + ch^{-\frac{d}{2}}\|\psi-\psi_h\|_{L^2(\Omega_T)},\end{aligned} \tag{3.16}$$

我们参考 [14]，不难证明以下时间向后的抛物型方程的先验误差估计。

$$\|\psi(t)-\psi_h(t)\|_{L^2(\Omega_T)} \le Ch^2(\|\psi\|_{L^2(H^2(\Omega))} + \|\psi_t\|_{L^2(\Omega_T)}). \tag{3.17}$$

这里$d = dim(\Omega) = 2$，于是利用（3.16）-（3.17）我们就证明了（2.14）的有效性。

最后利用上面的性质得到本文最重要的一个定理，

定理3.1. *设 $f \in L^2(0,T;C(\bar\Omega))$，$\sigma \in \mathcal{M}(\Omega)$ 和 $u_0 \in L^2(\Omega)$, 同时设 u, u_h 分别是问题（2.7）和（3.1）的解，则我们有下面的估计。*

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega_T)} \le ch\, max\{1, |log\ h|^{\frac{1}{2}}\}(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)}). \tag{3.18}$$

这里的证明思路我们参考 [1] [3] [15]中定理3.4证明思想。

证明. 设 ψ 是问题（2.3）-（2.4）的解，这里 $f \in L^2(0,T;C(\bar\Omega))$，我们应用 (2.7), (3.1) 和

（3.8）我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_T}(u-u_h)gdxdt &= (u-u_h,-\psi_t(x,t)+\nabla\cdot(\beta\nabla\psi)) \\
&= (u,-\psi_t(x,t))_{\Omega_T}+a(u,\psi)_{\Omega_T}+(u_h,\psi_t(x,t))_{\Omega_T}-a(u_h,\psi)_{\Omega_T} \\
&= (u,-\psi_t(x,t))_{\Omega_T}+a(u,\psi)_{\Omega_T}+(u_h,\psi_t(x,t))_{\Omega_T}-a(u_h,\psi)_{\Omega_T} \\
&= \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T}+(u_0,\psi(x,0))-(u_h,\psi_{t,h}(x,t))_{\Omega_T}-a(u_h,\psi_h)_{\Omega_T} \\
&= \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T}+(u_0,\psi(x,0))-\langle\mu,\psi_h\rangle_{\Omega_T}+(L_hu_0,\psi_h(x,0)) \\
&= \langle\mu,\psi-\psi_h\rangle_{\Omega_T}+(u_0,\psi(0)-\psi_h(0)) \\
&= \int_\Omega(\int_0^T f(x,t)(\psi-\psi_h)dt)d\sigma(x)+(u_0,\psi(0)-\psi_h(0)) \\
&\leq \|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|\psi-\psi_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|\psi-\psi_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq ch\|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)}(\|\psi_t\|_{L^2(\Omega_T)}+\|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))}) \\
&+ch\|u_0\|_{L^2(\Omega)}(\|\psi_t\|_{L^2(\Omega_T)}+|log\ h|^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^2(0,T;W(\Omega))}) \\
&\leq ch\ max\{1,|log\ h|^{\frac{1}{2}}\}((\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)})\|g\|_{L^2(\Omega_T)},
\end{aligned}
$$

最后应用 L^2 范数的定义，我们就得到

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{L^2(\Omega_T)} &= \sup_{g\in L^2(\Omega_T),g\neq 0}\frac{(g,u-u_h)_{\Omega_T}}{\|g\|_{L^2(\Omega_T)}} \\
&\leq ch\ max\{1,|log\ h|^{\frac{1}{2}}\}(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

□

因此我们完成了该定理的证明。

4. 总结

本文研究了在 R^2 上有界凸区域上带有度量数据的抛物界面问题的先验误差分析，在误差分析中只考虑了空间离散近似。关于误差估计我们还可以扩展到具有测量数据的抛物线界面问题的完全离散近似中，但是关于这类抛物界面问题完全离散下的误差估计不是一件简单的事，后续的数值实验也是值得研究的事。

基金项目

随机最优控制问题的高效Monte Carlo有限元法合同编号:国家自然科学基金项目(11961008)。

参考文献

[1] Shakya, P. and Sinha, R.K. (2019) A Posteriori Error Analysis for Finite Element Approximations of Parabolic Optimal Control. *Applied Numerical Mathematics*, **136**, 23-45. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.09.015

[2] Araya, R., Behrens, E. and Rodríguez, R. (2006) A Posteriori Error Estimates for Elliptic Problems with Dirac Delta Source Terms. *Numerische Mathematik*, **105**, 193-216. https://doi.org/10.1007/s00211-006-0041-2

[3] Gong, W. (2013) Error Estimates for Finite Element Approximations of Parabolic Equations with Measure Data. *Mathematics of Computation*, **82**, 69-98. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2012-02630-5

[4] Casas, E. (2014) Optimal Control of Semilinear Elliptic Equations in Measure Spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **52**, 339-564. https://doi.org/10.1137/13092188X

[5] Shakya, P. and Sinha, R.K. (2021) Finite Element Approximations of Parabolic Optimal Control Problem with Measure Data in Time. *Applicable Analysis*, **100**, 2706-2734. https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1698722

[6] Chen, Z. and Zou, J. (1998) Finite Element Methods and Their Convergence for Elliptic and Parabolic Interface Problems. *Numerische Mathematik*, **79**, 175-202. https://doi.org/10.1007/s002110050336

[7] Huang, J. and Zou, J. (2002) Some New A Priori Estimates for Second-Order Elliptic and Parabolic Interface Problems. *Journal of Differential Equations*, **184**, 570-586. https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4154

[8] Lions, J.-L. and Magenes, E. (1972) Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, New York-Heidelberg. (Translated from the French by P. Kenneth)

[9] Bramble, J.H. and King, J.T. (1996) A Finite Element Method for Interface Problems in Domains with Smooth Boundaries and Interfaces. *Advances in Computational Mathematics*, **6**, 109-138. https://doi.org/10.1007/BF02127700

[10] Ciarlet, P.G. (2002) The Finite Element Method for Elliptic Problems. In: *Classics in Applied Mathematics*, Vol. 40, SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898719208

[11] Rannacher, R. and Scott, R. (1982) Some Optimal Error Estimates for Piecewise Linear Finite Element Approximations. *Mathematics of Computation*, **38**, 437-445. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1982-0645661-4

[12] Thomée, V. (2006) Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. In: *Springer Series in Computational Mathematics*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[13] Chrysafinos, K. and Hou, L.S. (2002) Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Approximations of Linear and Semilinear Parabolic Equations under Minimal Regularity Assumptions.

SIAM Journal on Numerical Analysis, **40**, 282-306.
https://doi.org/10.1137/S0036142900377991

[14] Ciarlet, P.G. (1978) The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam. https://doi.org/10.1115/1.3424474

[15] Sinha, R.K. and Deka, B. (2005) Optimal Error Estimates for Linear Parabolic Problems with Discontinuous Coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **43**, 733-749.
https://doi.org/10.1137/040605357