Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(1), 103-117
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.141010

Hans汉斯

基于LSSC的商业银行资产负债组合优化模型研究

刘睿宸[1]，熊晓炼[2]

[1]贵州大学经济学院，贵州 贵阳
[2]贵州大学马克思主义经济学发展与应用研究中心，贵州 贵阳

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月11日；发布日期：2024年2月18日

摘　要

利率市场化后，灵活的市场调控要求商业银行加快提升经营管理水平，在实现利润增长的同时防范风险，优化资金配置。根据我国借贷市场短期收益率波动大于长期的特点，对动态Nelson-Siegel模型引入第二个斜率因子，扩展至LSSC模型，并且将构成LSSC模型的4个维度因子参数引入DNS久期向量，推导出LSSC模型的久期向量，构造以银行月收益最大化为目标、4个维度零久期缺口，以流动性约束为条件的资产负债组合优化模型。实证结果表明：相比于传统Nelson-Siegel模型，改进的LSSC模型近端拟合效果具有明显优势，计算得出的短期利率预测误差较小，并且通过实例应用发现基于LSSC模型实现资产负债组合优化更能有效抵御利率风险。

关键词

商业银行，资产负债管理，利率风险免疫

An Optimization Model of Asset-Liability Portfolio of Commercial Banks Based on LSSC Model

Ruichen Liu[1], Xiaolian Xiong[2]

[1]School of Economics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
[2]Marxist Economics Development and Application Research Center, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Feb. 18th, 2024

文章引用: 刘睿宸, 熊晓炼. 基于 LSSC 的商业银行资产负债组合优化模型研究[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(1): 103-117.
DOI: 10.12677/orf.2024.141010

Abstract

After the marketization of interest rates, the flexible market regulation requires commercial banks to accelerate the improvement of operation and management, to prevent risks and optimize the allocation of funds while achieving profit growth. According to the characteristics of China's lending market where short-term yield fluctuations are greater than long-term ones, a second slope factor is introduced to the dynamic Nelson-Siegel model and extended to the LSSC model, and the parameters of the four dimensional factors constituting the LSSC model are introduced into the DNS duration vector, which is derived to construct a duration vector of the LSSC model, which takes the maximisation of the bank's monthly return as the goal, has a zero duration gap in the four dimensions and an asset-liability portfolio optimisation model conditional on liquidity constraints. The empirical results show that compared with the traditional Nelson-Siegel model, the improved LSSC model has an obvious advantage in its proximal fitting effect, the short-term interest rate prediction error is smaller, and it is found that the optimization of asset-liability portfolios based on the LSSC model is more effective against interest rate risk through the application of examples.

Keywords

Commercial Banks, Asset-Liability Management, Interest Rate Risk Immunity

1. 引言

美联储加息背景下硅谷银行破产倒闭事件，引发人们广泛关注，对美国系统性金融危机担忧的同时，警示硅谷银行倒闭的根本原因是其资产和负债久期的严重错配。资产负债错配是金融机构存在的主要风险之一，是现代金融市场中不能忽视的重要因素，而商业银行则是资产负债错配的典型代表。

商业银行作为我国服务实体经济的主要力量，在经济高质量发展阶段将金融资源高效配置到国家战略性、前瞻性的区域、行业和产品上，是贯彻新发展理念，服务国家发展战略和政策的责任担当。近年来，受新冠疫情、地缘政治冲突、主要发达国家货币政策收缩、新型金融业快速发展等多因素影响，我国商业银行面临更大生存环境和竞争压力的挑战，存款市场呈现出“定期化、长期化、同业化”，贷款则呈现短期化的趋势，存贷款利差收入持续收窄。商业银行在积极落实宏观调控政策、服务实体经济的同时，需要强化资产负债管理，完善银行资产负债管理体系，实现企业价值的可持续增长。

资产负债管理是商业银行根据法律法规及资本结构约束、资产负债数量、结构对称原则，为创造更大的盈利空间而对资产与负债进行适当分配，从而实现营利性、安全性、流动性的统一，是商业银行生存和发展的根基，也是其实现价值创造与风险管理的一项重要工具。资产负债管理工作要求从风险管理出发，确保机构、产品和条线等的局部利益必须服从银行整体利益，各项资产负债与经营管理活动均要以防范风险为导向，注重资本节约与内涵增长，做好银行资产品种配置的科学规划与动态调整，实现资产负债组合优化配置。

基于防范系统性风险，强化商业银行资产负债管理视角，本文可能创新为：考虑利率波动加大、贷

款市场短期化的影响，为商业银行设计出可运用于优化资产负债管理的 LSSC 模型，该模型在银行资产负债配置中注重利率期限结构的近端预测效果，使资产负债缺口计算更为精准，能有效抵御市场利率风险。

2. 文献综述

商业银行实行资产负债管理的主要目的是尽可能减少或避免利率风险带来的损失。继欧洲多国央行采用 Nelson-Siegel 模型预测利率期限结构后，国内学者也陆续引入此模型，研究方向从构建中国国债利率期限结构逐渐延展至风险免疫领域。

2.1. 银行资产负债管理模型研究

银行资产负债管理模型大致可分为两类：随机型优化模型和确定型优化模型。随机型优化模型最早追溯于 Charnes 和 Thore (1966)的机会约束模型[1]，描述在资源有限的情况下如何实现最大化效益。Wolf (1969)在资产负债管理中应用贝叶斯和序贯决策分析，解决未来事件的不确定性以及决策过程的跨期性[2]。冯宝军等(2012)考虑存贷利率的动态变化，构建信用风险和利率风险的区间型持续期缺口，使银行在保证最优资产配置时减少收益率波动的干扰[3]。周颖和柳煦(2018)考虑资产的增量和存量两个角度，通过层次算法为银行得出多组资产优化配置方案，兼顾营利性、安全性和流动性三重目标，满足不同银行的实际需求[4]。

确定型优化模型基于线性假设和确定性假设寻求利润最大化，即目标函数和约束条件都是可知线性函数，输入的参数也不存在随机性和不确定性。最早进行此类研究的是 Chambers 和 Charnes (1961)，假设银行家知道未来不同日期活期存款和定期存款、利率及银行净值水平，通过归纳资产负债线性规划的目标函数和约束条件，构建一套资产负债优化的数学模型，实现收益性资产利润最大化组合[5]。此后，Booth 和 Dash (1979)的两阶段线性目标规划模型[6]、Wetmore 和 Brick (1990)的最优缺口模型[7]、Gjerde 和 Semmen (1995)的最优资产风险权重模型等也加深对确定型模型的研究[8]。迟国泰和闫达文(2011)构建以 VaR 技术为约束的控制预留缺口的资产负债组合优化模型，其特点是在保证收益最大化情况下使银行净值在利率有利变动中增加[9]。吴灏文等(2012)基于方向久期和方向凸度的免疫条件控制银行资产配置[10]。彭建刚等(2016)立足新的宏微观审慎监管环境，对目标函数和约束条件引入 RAROC 因素[11]。王晓婷和沈沛龙(2017)设置流动性风险阈值率和流动性资本触发率，计算银行为抵御流动性风险所需持有的资本和或有资本数量[12]。此外，李鸿禧(2018) [13]、周颖(2019) [14]、迟国泰(2020)等[15]，分别选用信用久期、动态利率久期和随机久期对比传统久期零缺口免疫策略构造商业银行资产负债优化模型。

2.2. 动态 Nelson-Siegel 模型免疫策略的研究

Nelson-Siegel 模型首次由 Nelson 和 Siegel (1987)提出，它是基于瞬时远期利率推理得出的，该模型把债券收益率拆分为水平、斜率和曲率三因子，并且能准确地拟合出各种收益率曲线，例如线性、S 型、凸性等[16]。此外由动态 Nelson-Siegel 模型与债券价格模型能推导出 DNS 久期向量。张继强(2004)的研究发现，债券风险管理中使用久期凸度方法存在一定的局限性。相比之下，基于主成分分析与 Nelson-Siegel 模型的三因素方法在准确性方面更为出色[17]。王志强和张姣(2009)比较 Macaulay 久期、修正久期、方向久期、近似久期、Fisher-Weil 久期、Nelson-Siegel 部分久期六种免疫策略，发现表现最佳的是 Nelson-Siegel 部分久期配比策略[18]。余文龙和王安兴(2010)证明 DNS 久期向量在中国国债的被动管理中可以应用，并且其在套期保值方面的效果优于久期凸性方法[19]。杨婉茜和成力为(2014)构建以 DNS 久期向量零缺口和流动性约束为条件的资产负债管理模型，并对比传统久期——凸度零缺口免疫策略，实证了前者的优良性[20]。周颖和杨洁(2019)将 Svensson 模型的 4 个维度参数引入 DNS 久期向量，同样以“目标－约束条件”的范式建立银行资产负债管理模型[21]。

2.3. 文献评述

综上所述，从意义明确、线性规划单一求解容易操作的角度，国内以确定型银行资产负债管理研究为主，多数从久期缺口管理或 VaR 控制的预留缺口管理入手，结合必要约束条件优化资产负债结构。然而，基于经典 Macaulay 久期、Fisher-Weil 久期等的资产负债组合优化模型本身存在假设缺陷，或者计算非常复杂、建模技巧高等原因限制了其在现实中的使用。结合动态 Nelson-Siegel 模型免疫策略相关研究，认为 DNS 久期向量稳定性和免疫效果相对更优。

基于以上研究成果与不足，本文可能的边际贡献在于：第一，把 Nelson-Siegel 模型引入商业银行资产负债组合优化模型中，拓展其在商业银行利率风险防范领域的研究；第二，为增强利率期限结构的近端拟合能力，在 Nelson-Siegel 模型的基础上引入第二个斜率因子，构建 LSSC 模型，从 LSSC 模型衍生出四个维度因子的久期向量，更加精确地衡量短期利率风险；第三，通过实例对比基于 Nelson-Siegel 模型和 LSSC 模型防范利率风险的效果，实证结果后者更优。

3. 基于 LSSC 模型的资产负债组合优化原理

3.1. LSSC 模型

参考沈根祥与陈映洲(2015)在传统 Nelson-Siegel 模型的基础上提出的双斜率动态 Nelson-Siegel 模型(即 LSSC 模型) [22]，该模型的特点是在传统 Nelson-Siegel 模型中增加另一个斜率因子，增强收益率曲线近端拟合能力。具体形式为：

$$y_{t_i}=\beta_1+\beta_2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}}{\frac{t_i}{\tau_1}}\right)+\beta_3\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_2}}}{\frac{t_i}{\tau_2}}\right)+\beta_4\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}}{\frac{t_i}{\tau_1}}-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right) \tag{1}$$

式(1)中 y_{t_i} 表示瞬时即期利率，β_1、β_2、β_3、β_4 和 τ_1、τ_2 是 6 个待估参数，β_1 代表利率期限结构的水平因子，β_2 代表第一个斜率因子，β_3 代表第二个斜率因子，β_4 代表曲度因子；τ_1、τ_2 控制因子衰减速率。

3.2. LSSC 久期向量构建

3.2.1. LSSC 久期向量的基本式

在连续时间下，附息票债券的价格为 $P_t=\sum_{i=1}^{n}F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}}$，其中 F_i 表示第 i 期现金流，t_i 表示据到期日的年数，y_{t_i} 表示 t_i 时的到期收益率，$\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}}$ 代表现金流贴现因子。再根据 $D_{\beta_i}=-\frac{\partial P}{P}\Big/\partial\beta_i$ $(i=1,2,3,4)$，推导得 LSSC 模型 4 个维度久期，分别列为 D_{β_1}、D_{β_2}、D_{β_3}、D_{β_4}，如式(2)~式(5)等号右侧所示：

水平维度久期：

$$D_{\beta_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_1F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}(\tau)}}{\sum_{i=1}^{n}F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}(\tau)}}=\sum_{i=1}^{n}\omega_it_i \tag{2}$$

第一个斜率维度久期：

$$D_{\beta_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}}{\frac{t_i}{\tau_1}}\right]F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}(\tau)}}{\sum_{i=1}^{n}F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}(\tau)}}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\tau_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right) \tag{3}$$

第二个斜率维度久期：

$$D_{\beta_3}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i\left[\dfrac{1-e^{-\frac{t_i}{\tau_2}}}{\dfrac{t_i}{\tau_2}}\right]F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}{\sum_{i=1}^{n}F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\tau_2\left(1-e^{-\frac{t_i}{\tau_2}}\right) \tag{4}$$

曲度维度久期：

$$D_{\beta_4}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i\left[\dfrac{1-e^{-\frac{t_i}{\tau_1}}}{\dfrac{t_i}{\tau_1}}-e^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right]F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}{\sum_{i=1}^{n}F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left[\tau_1\left(1-e^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right)-t_i e^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right] \tag{5}$$

上述式中 $\omega_i=\dfrac{F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}{\sum_{i=1}^{n}F_i e^{-t_i y_{t_i}(\tau)}}$ 表示资产或负债第i期现金流现值占总现金流现值的比重。式(2)~式(5)共同构成 LSSC 久期向量的基本式。

3.2.2. 各类资产和负债的久期计算

以利息的支付时间和方式划分商业银行资产和负债为到期一次还本付息类以及分期付息、到期还本类。

1) 到期一次还本付息类 LSSC 久期向量计算

参考周颖(2019)的公式推导方法[21]，由于到期一次还本付息类资产负债只在到期时产生一次现金流，即第$1\sim n-1$期现金流 $F_i\left(i=1,2,\cdots,n-1\right)$ 都等于 0，第 n 期现金流为全部本金加利息，即 $F_n=P\times\left(1+r\right)$，$r$ 为资产负债的利率，P 为债券的本金。将上述 n 期现金流公式分别代入式(2)~式(5)，得到 4 个维度到期一次还本付息类资产负债的久期计算公式。

水平维度久期：

$$D_{\beta_1}=t_n \tag{6}$$

第一个斜率维度久期：

$$D_{\beta_2}=\tau_1\left(1-e^{-\frac{t_n}{\tau_1}}\right) \tag{7}$$

第二个斜率维度久期：

$$D_{\beta_3}=\tau_2\left(1-e^{-\frac{t_n}{\tau_2}}\right) \tag{8}$$

曲度维度久期：

$$D_{\beta_4}=\tau_1\left(1-e^{-\frac{t_n}{\tau_1}}\right)-t_n e^{-\frac{t_n}{\tau_1}} \tag{9}$$

2) 分期付息、到期还本类 LSSC 久期向量计算

分期付息、到期还本类资产负债在存续期内产生 n 次现金流，其中前 $n-1$ 期每次现金流为 $P\times r$；第

n 期现金流为 $P\times(1+r)$。同理，得到 4 个维度分期付息、到期还本类资产负债的久期计算公式。

水平维度久期：

$$D_{\beta_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}rt_i\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}t_n}{\sum_{i=1}^{n}r\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}} \tag{10}$$

第一个斜率维度久期：

$$D_{\beta_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}r\tau_1 e^{-R(t_i)t_i}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right)+\tau_1\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_n}{\tau_1}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}r\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}} \tag{11}$$

第二个斜率维度久期：

$$D_{\beta_3}=\frac{\sum_{i=1}^{n}r\tau_2\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_2}}\right)+\tau_2\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_n}{\tau_2}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}r\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}} \tag{12}$$

曲度维度久期：

$$D_{\beta_4}=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}r\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}\left[\tau_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right)-t_i\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau_1}}\right]+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}\left[\tau_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_n}{\tau_1}}\right)-t_i\mathrm{e}^{-\frac{t_n}{\tau_1}}\right]\right\}}{\sum_{i=1}^{n}r\mathrm{e}^{-R(t_i)t_i}+\mathrm{e}^{-R(t_n)t_n}} \tag{13}$$

3.3. 基于 LSSC 模型久期向量方法的免疫条件

3.3.1. 久期缺口的建立

式(14)是传统久期缺口模型，D_{gap} 表示商业银行资产负债总体久期缺口，A 为资产总额，L 为负债总额，D_A 为资产加权的平均久期，D_L 为负债加权的平均久期。

$$D_{gap}=D_A-\frac{L}{A}D_L \tag{14}$$

现在把式(14)扩展到 LSSC 模型 4 个维度的久期上，得到以下表达式(15)~式(18)，式(15)中，$D_{\beta_1}^{gap}$ 为资产负债水平维度久期缺口，A_i ($i=1,2,\cdots,m$)表示第 i 种资产的市场价值，$D_{\beta_1}^{A}$ 表示水平维度资产的加权平均久期，$D_{\beta_1}^{A_i}$ 表示第 i 种资产的水平维度久期，L_j ($j=1,2,\cdots,n$)表示第 j 种负债的市场价值，$D_{\beta_1}^{L}$ 表示水平维度负债的加权平均久期，$D_{\beta_1}^{L_j}$ 表示第 j 种负债的水平维度的久期。

$$D_{\beta_1}^{gap}=D_{\beta_1}^{A}-\frac{L}{A}D_{\beta_1}^{L}=\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}A_i\right)D_{\beta_1}^{A_i}-\left(\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}L_j\right)D_{\beta_1}^{L_j} \tag{15}$$

同理，式(16)~式(18) $D_{\beta_2}^{gap}$、$D_{\beta_3}^{gap}$、$D_{\beta_4}^{gap}$ 分别为资产负债第一、二个斜率维度久期缺口和曲率维度久期缺口。

$$D_{\beta_2}^{gap}=D_{\beta_2}^{A}-\frac{L}{A}D_{\beta_2}^{L}=\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}A_i\right)D_{\beta_2}^{A_i}-\left(\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}L_j\right)D_{\beta_2}^{L_j} \tag{16}$$

$$D_{\beta_3}^{gap}=D_{\beta_3}^{A}-\frac{L}{A}D_{\beta_3}^{L}=\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}A_i\right)D_{\beta_3}^{A_i}-\left(\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}L_j\right)D_{\beta_3}^{L_j} \tag{17}$$

$$D_{\beta_4}^{gap}=D_{\beta_4}^{A}-\frac{L}{A}D_{\beta_4}^{L}=\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}A_i\right)D_{\beta_4}^{A_i}-\left(\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}L_j\right)D_{\beta_4}^{L_j} \tag{18}$$

3.3.2. 银行净资产变化计算

同时对附息票债券的价格 $P_t=\sum_{i=1}^{n}F_i\mathrm{e}^{-t_iy_{t_i}}$ 和式(1)取微分，整理后得：

$$dP=-P\left(D_{\beta_1}^{gap}d\beta_1+D_{\beta_2}^{gap}d\beta_2+D_{\beta_3}^{gap}d\beta_3+D_{\beta_4}^{gap}d\beta_4\right) \tag{19}$$

$d\beta_i\,(i=1,2,3,4)$为即期利率 y_{t_i} 在 4 个维度的瞬时改变量。将式(19)中的 P 分别替换为 A 和 L，设商业银行净资产的改变量为ΔV， $\Delta V=\Delta A-\Delta L$，即可得：

$$\Delta V=\Delta A-\Delta L=-A\left(D_{\beta_1}^{gap}d\beta_1+D_{\beta_2}^{gap}d\beta_2+D_{\beta_3}^{gap}d\beta_3+D_{\beta_4}^{gap}d\beta_4\right) \tag{20}$$

3.4. 资产负债组合优化模型

3.4.1. 目标函数

假设银行资产组合的月利息收益为 Z_A，式(21)中 r_{A_i} 表示第 i 类资产项目的月利率，整个目标函数旨在于保证商业银行资产组合的月收益最大化。

$$obj:\max Z_A=\sum_{i=1}^{a}A_ir_{A_i} \tag{21}$$

3.4.2. 约束条件

1) 久期模型零缺口

即式(15)~式(18)等于 0，含义是市场利率的波动不会使商业银行净资产遭到损失。

$$D_{\beta_1}^{gap}=D_{\beta_2}^{gap}=D_{\beta_3}^{gap}=D_{\beta_4}^{gap}=0 \tag{22}$$

2) 流动性约束条件

式(23)的含义是资产必须满足非负条件。式(24) a_i 作为 A_i 的系数，其具体数值取决于相关法律法规及银行经营管理约束规定，具体取值在下文中展示，式(23)、(24)的作用是在商业银行追求利润的情况下，保证其运营的流动性、合法性。

$$A_i\ge 0,i=1,2,\cdots,m \tag{23}$$

$$s.t.\sum_{i=1}^{m}a_iA_i\le(\text{或}=,\ge)b_i \tag{24}$$

4. 实例应用

4.1. LSSC 模型参数计算

4.1.1. 数据来源

本文选取银行间债券交易的中证国债到期收益率(月末数据)为样本，样本区间为 2013 年 3 月 29 日至 2023 年 3 月 31 日，选用的债券到期期限为 0.08 年、0.17 年、0.25 年、0.5 年、0.75 年、1 年、3 年、5 年、7 年、10 年、15 年、20 年、30 年，一共 13 种，整个面板数据共 1573 组观测值，数据来源于英为财情网。

4.1.2. 描述性统计

从表 1 第(6)列可知，我国债券市场短期收益率标准差大于长期，到期期限越短，收益率震荡越剧烈，对利率期限结构近端信息的把控难度越高；从偏度上看，收益率偏度均分布在 0.8 以内，呈现右偏趋势，但不严重；从峰度上看，收益率峰度均远小于 3，整体分布较为平缓。

Table 1. Descriptive statistics of CSI treasury bond yields for 13 different maturities
表 1. 13 个不同到期期限的中证国债收益率的描述统计

(1) 到期期限(年)	(2) 均值(%)	(3) 中位数(%)	(4) 最小值(%)	(5) 最大值(%)	(6) 标准差(%)	(7) 偏度	(8) 峰度
0.08	2.3942	2.1747	0.8848	4.7710	0.7935	0.8121	0.3716
0.17	2.4601	2.2457	0.9436	4.6202	0.7179	0.6712	0.0242
0.25	2.5031	2.2976	0.8923	4.6113	0.6784	0.6429	0.1339
0.5	2.5956	2.4791	0.9978	4.1741	0.6307	0.4387	−0.3349
0.75	2.6333	2.542	1.1409	4.1648	0.6110	0.4004	−0.4549
1	2.6789	2.6036	1.1465	4.2189	0.6060	0.3444	−0.4734
3	2.9657	2.8945	1.4395	4.4162	0.5439	0.3689	−0.1124
5	3.1132	3.0375	1.7886	4.4583	0.5105	0.4557	−0.2369
7	3.2859	3.2126	2.3639	4.5824	0.4728	0.6295	−0.2472
10	3.3010	3.2254	2.5380	4.5518	0.4824	0.7135	−0.1632
15	3.6003	3.5497	2.8145	4.7883	0.4588	0.5898	−0.1950
20	3.7084	3.6712	2.9018	5.0115	0.4889	0.6693	0.0526
30	3.8517	3.8074	3.0653	5.1135	0.4773	0.6661	0.0614

4.1.3. 动态 LSSC、Nelson-Siegel 模型参数拟合

参考文忠桥(2013)的两步拟合动态模型方法[23]，以 LSSC 模型为例，具体操作步骤如下。

第一，原始数据一共有 1573 组，囊括了 121 个时间截点，用非线性最小二乘法拟合每个时间截点的 β 和 τ 值($\tau_{1,t}$， $\tau_{2,t}$， $\widehat{\beta_{1,t}}$， $\widehat{\beta_{2,t}}$， $\widehat{\beta_{3,t}}$， $\widehat{\beta_{4,t}}$， $t=1,2,\cdots,121$)，重复 121 次后得参数的时间序列数据。

第二，对上述求出的 $\tau_{1,t}$、 $\tau_{2,t}$，值取平均数作为固定值，带入原 LSSC 模型，重新以最小二乘法拟合($\widehat{\beta_{1,t}}$， $\widehat{\beta_{2,t}}$， $\widehat{\beta_{3,t}}$， $\widehat{\beta_{4,t}}$) 4 个参数，得到面板数据和动态 LSSC 模型。

表 2 是静态 LSSC 模型 6 个参数的拟合结果的描述性统计，由表 2 第(1)列第 5、6 行可知，取 $\tau_1=2.7679$ 、 $\tau_2=0.0195$ 得到式(25)。

Table 2. Descriptive statistics of β and τ values for static LSSC models (%)
表 2. 静态 LSSC 模型 β 和 τ 值的描述性统计(%)

	(1) 均值	(2) 中位数	(3) 最大值	(4) 最小值	(5) 标准差
(1) β_1	3.3215	3.4022	5.6000	1.3860	1.0226
(2) β_2	−0.8610	−0.6144	0.791	−2.8910	0.7155
(3) β_3	0.2653	0.7349	5.6352	−27.4090	3.2087
(4) β_4	0.6746	0.0003	5.1895	−3.3222	1.5997
(5) τ_1	2.7679	1.0303	15.9866	0.2679	3.0410
(6) τ_2	0.0195	0.0536	0.5436	0.0000	0.0727

$$y_{t_i}=\beta_1-\beta_2\left[\frac{1-e^{\left(-\frac{t_i}{2.7679}\right)}}{\frac{t_i}{2.7679}}\right]-\beta_3\left[\frac{1-e^{\left(-\frac{t_i}{0.0195}\right)}}{\frac{t_i}{0.0195}}\right]-\beta_4\left[\frac{1-e^{\left(-\frac{t_i}{2.7679}\right)}}{\frac{t_i}{2.7679}}-e^{-\frac{t_i}{2.7679}}\right] \tag{25}$$

表 3 是动态 LSSC 模型参数 β 的拟合结果描述性统计，动态模型下 4 个 β 对应的标准差均小于静态模型，说明动态模型在固定 τ 的情况下保证了模型参数的稳定性，为下文检验两种模型的拟合能力提供了数据基础。

Table 3. Descriptive statistics of β and τ values for dynamic LSSC models (%)
表 3. 动态 LSSC 模型 β 和 τ 值的描述性统计(%)

	(1) β_1	(2) β_2	(3) β_3	(4) β_4
均值	4.2855	−1.2134	−0.679	−0.954
中位数	4.2827	−1.1378	−0.7565	−1.0233
最大值	5.4741	−0.0326	3.4151	3.9714
最小值	3.3451	−3.422	−2.9157	−3.611
标准差	0.5182	0.6371	0.9964	1.3936

4.2. 拟合效果比较

对于 Nelson-Siegel 模型与 LSSC 模型拟合效果的比较选取平均绝对误差(MAE)和均方根误差(RMSE)两种指标来衡量，如表 4 所示，整体上，两种模型的拟合残差数值都较小，说明两模型拟合效果皆可。在各种到期期限取值下，LSSC 模型的拟合残差几乎都小于传统 Nelson-Siegel 模型，LSSC 模型的拟合优度在长端和短端都较为明显。

Table 4. Comparison of LSSC model and Nelson-Siegel model fit under MAE and RMS Ecriteria (%)
表 4. LSSC 模型和 Nelson-Siegel 模型在 MAE 和 RMSE 标准下拟合效果比较(%)

到期期限	MAE		RMSE	
(年)	Nelson-Siegel	LSSC	Nelson-Siegel	LSSC
0.08	0.1870	0.0407	0.2388	0.0513
0.17	0.0950	0.0760	0.1217	0.0981
0.25	0.0683	0.0662	0.0916	0.0886
0.5	0.0819	0.0370	0.1061	0.0495
0.75	0.0963	0.0475	0.1289	0.0667
1	0.1000	0.0553	0.1281	0.0739
3	0.0874	0.0609	0.1063	0.0714
5	0.0397	0.0276	0.0488	0.0357
7	0.0423	0.0368	0.0522	0.0462
10	0.1245	0.1282	0.1370	0.1360
15	0.0525	0.0471	0.0664	0.0564
20	0.0449	0.0363	0.0524	0.0426
30	0.0569	0.0568	0.0712	0.0673

4.3. LSSC 模型的拟合

以 2023 年 3 月 31 日的中证国债到期收益率数据为标准，确定 LSSC 模型的 β 估计值，该时间截点

具体数据如表 5 所示：

Table 5. Yields on CSI Treasuries with different maturities on March 31, 2023
表 5. 2023 年 3 月 31 日不同到期期限的中证国债收益率

(1) 到期期限(年)	(2) 到期收益率(%)
0.08	1.8294
0.17	1.9296
0.25	1.9006
0.50	2.1097
0.75	2.1771
1.00	2.2328
3.00	2.5089
5.00	2.6837
7.00	2.8304
10.00	2.8528
15.00	2.9989
20.00	3.0754
30.00	3.2332

式(25)中τ_1、τ_2的值已经固定，将表 5 中第(1)、(2)列数据代入式(25)，用最小二乘法拟合得到 4 个β的估计值，结果如表 6 所示，由第(4)列可知，R^2为 99.04%，即模型整体的拟合效果较好。

Table 6. LSSC model parameter estimation results (%)
表 6. LSSC 模型参数估计结果(%)

(1) 变量	(2) 估计值	(3) 标准差	(4) R^2
β_1	3.279	0.0569	
β_2	−1.2567	0.0609	99.04
β_3	−0.9948	0.3509	
β_4	−0.0531	0.2208	

把表 6 第(2)列对应的β估计值代入模型(25)中，得到最终模型式(26)：

$$y_{t_i}=3.279-1.2567\left[\frac{1-e^{-\frac{t_i}{2.7679}}}{\frac{t_i}{2.7679}}\right]-0.9948\left[\frac{1-e^{-\frac{t_i}{0.0195}}}{\frac{t_i}{0.0195}}\right]-0.0531\left[\frac{1-e^{-\frac{t_i}{2.7679}}}{\frac{t_i}{2.7679}}-e^{-\frac{t_i}{2.7679}}\right] \tag{26}$$

4.4. 银行基本信息

为了证明 LSSC 久期向量模型的有效性，本文假设某银行的负债、所有者权益信息如表 7 所示，第(1)列 1~9 行为已知项，代表各类负债子项目的市场价值，第 10 行为负债总额 45,500 亿元，第 11 行为所有者权益 14,500 亿元，第 12 行为负债与所有者权益总和 60,000 亿元；第(2)列为已知项，代表每项负债子项目对应的月利率；第(3)列为已知项，代表每项负债子项目对应的到期期限。第(4)~(7)列为四个维度

的久期，为待求数据。

表 9 为该银行资产子项目名称、月利率等信息，其中 A_i （$i=1,2,\cdots,9$）的具体数值、以及第(2)~(5)列为待求数据。

4.4.1. 负债类久期的计算

活期存款平均到期间隔 t_n，按照以往文献统计分析取 2.4 个月，填入表 7 第(3)列第 1 行。

由于 L1~L8 属于到期一次性还本付息类负债，所以久期的计算适用于前文式(6)~式(9)。具体做法是：将表 7 第(3)列 1~8 行 t_n 带入式(6)，得到 $D_{\beta_1}^{L_j}$ (对应表 7 第(4)列 1~8 行)；将表 7 第(3)列 1~8 行 t_n 带入式(7)，得到 $D_{\beta_2}^{L_j}$ (对应表 7 第(5)列 1~8 行)；同理，得到 $D_{\beta_3}^{L_j}$ 和 $D_{\beta_4}^{L_j}$ （$j=1,2,\cdots,8$）。

由于 L9 三年期债券属于分期付息、到期还本类负债，每年年末付息一次，共产生 3 次现金流，所以久期的计算适用于前文式(10)~式(13)。具体做法是：将表 8 第(1)列 t_i 带入式(26)，分别得到对应的 $R(t_i)$ (见表 8 第(2)列 1~3 行)。再将表 8 第(1)列 t_i、第(2)列 $R(t_i)$、表 7 第(2)列第 9 行 $r_9=3.12\%(0.26\%\times12)$ 带入式(10)，得到 $D_{\beta_1}^{L_9}=1.9817$，填入表 7 第(4)列第 9 行。同理，得到 $D_{\beta_2}^{L_9}$、$D_{\beta_3}^{L_9}$、$D_{\beta_4}^{L_9}$ (见表 7 第(5)、(6)、(7)列第 9 行)。

Table 7. Liabilities, owners' equity and duration of a bank
表 7. 某银行负债、所有者权益及久期信息

序号	负债和所有者权益	(1) 市场价值(亿元)	(2) 月利率 r_i (%)	(3) 到期期限(t_n)	(4) $D_{\beta_1}^{L_j}$	(5) $D_{\beta_2}^{L_j}$	(6) $D_{\beta_3}^{L_j}$	(7) $D_{\beta_4}^{L_j}$
1	活期存款(L1)	3000	0.032	0.24	0.24	0.2299	0.0195	0.0098
2	1 个月存款(L2)	1600	0.12	0.16	0.16	0.1555	0.0195	0.0044
3	3 个月存款(L3)	1800	0.123	0.25	0.25	0.239	0.0195	0.0106
4	6 个月存款(L4)	4200	0.146	0.5	0.5	0.4574	0.0195	0.0401
5	1 年期存款(L5)	14,000	0.168	1	1	0.8393	0.0195	0.1425
6	2 年期存款(L6)	5000	0.236	2	2	1.4241	0.0195	0.4531
7	3 年期存款(L7)	10,000	0.309	3	3	1.8316	0.0195	0.8167
8	1 年期债券(L8)	5100	0.203	1	1	0.8393	0.0195	0.1425
9	3 年期债券(L9)	800	0.26	3	1.9817	1.7896	0.0195	0.7856
10	负债总额(L)	45,500						
11	所有者权益(E)	14,500						
12	负债与所有者权益总额	60,000						

Table 8. 3-year bond duration calculation
表 8. 3 年期债券久期计算

序号	(1) t_i (年)	(2) $R(t_i)$
1	1	0.0220
2	2	0.0236
3	3	0.0249

4.4.2. 资产类久期的计算

因现金(A1)、法定存款准备金(A2)、超额准备金(A3)几乎不产生现金流，对利率风险完全免疫，所以

对表 9 第(2)、(3)、(4)、(5)列第 1~3 行取值为 0。

由于商业银行的其他贷款 A4~A9 一般为分期付息、到期还本，所以久期的计算适用于式(10)~式(13)，与前文内容一致，不做赘述。计算的久期结果分别填入表 9 的第(2)~(5)列第 4~9 行。

Table 9. Asset, interest rate and duration information of a bank
表 9. 某银行资产、利率及久期信息

序号	资产项目	(1) 月利率 r_A^i (%)	(2) $D_{\beta_1}^{A_j}$	(3) $D_{\beta_2}^{A_j}$	(4) $D_{\beta_3}^{A_j}$	(5) $D_{\beta_4}^{A_j}$
1	现金(A1)	0	0	0	0	0
2	法定存款准备金(A2)	0.135	0	0	0	0
3	超额准备金(A3)	0.06	0	0	0	0
4	1 个月贷款(A4)	0.28	0.0833	0.0821	0.0192	0.0012
5	3 个月贷款(A5)	0.3	0.2493	0.2383	0.0195	0.0106
6	6 个月贷款(A6)	0.363	0.4955	0.4535	0.0195	0.0396
7	1 年贷款(A7)	0.37	0.9802	0.8237	0.0195	0.1388
8	2 年贷款(A8)	0.396	1.9139	1.3703	0.0195	0.4285
9	3 年贷款(A9)	0.408	2.8029	1.7329	0.0195	0.7518

4.5. 资产负债组合优化模型的建立

4.5.1. 目标函数

以该商业银行月利息收入最大化为目标，将表 9 中第(1)列 1~9 行数据 r_A^i $(i=1,2,\cdots,9)$带入式(21)，得到以下目标函数表达式：

$$\max.Z_A = 0A_1 + 0.135\%A_2 + 0.06\%A_3 + 0.28\%A_4 + 0.3\%A_5 + 0.363\%A_6 + 0.37\%A_7 + 0.396\%A_8 + 0.408\%A_9 \quad (27)$$

4.5.2. 约束条件

1) 基于 LSSC 模型的久期向量零缺口约束条件

将表 9 第(2)~(5)列第 1~9 行、表 7 第(4)~(7)列第 1~9 行、$A=60000$、$L=45500$ 分别带入式(15)~式(18)，得到零久期缺口风险免疫条件式(28)~式(31)。

$$\left(0.0833A_4 + 0.2493A_5 + 0.4955A_6 + 0.9802A_7 + 1.9139A_8 + 2.8029A_9 - 64954.5876\right) \div 60000 = 0 \quad (28)$$

$$\left(0.0821A_4 + 0.2383A_5 + 0.4535A_6 + 0.8237A_7 + 1.3703A_8 + 1.7329A_9 - 46187.9592\right) \div 60000 = 0 \quad (29)$$

$$\left(0.0192A_4 + 0.0195A_5 + 0.0195A_6 + 0.0195A_7 + 0.0195A_8 + 0.0195A_9 - 887.2411\right) \div 60000 = 0 \quad (30)$$

$$\left(0.0012A_4 + 0.0106A_5 + 0.0396A_6 + 0.1388A_7 + 0.4285A_8 + 0.7518A_9 - 14006.6115\right) \div 60000 = 0 \quad (31)$$

2) 流动性约束条件

① 资产总规模约束

已知恒等式“资产 = 负债 + 所有者权益”，基于表 7 第(1)列 10、11 行，设定：

$$s.t.\sum_{i=1}^{9} A_i = 60000 \quad (32)$$

② 基于盈利性的库存现金比例：

$$s.t.A_1 \le 1.5\% \times \sum_{j=1}^{7} L_j = 1.5\% \times 39600 = 594 \quad (33)$$

③ 基于流动性的库存现金比例：

$$s.t.A_1 \geq 0.6\% \times \sum_{i=1}^{7} L_j = 0.6\% \times 39600 = 237.6 \tag{34}$$

④ 法定存款准备金比例：

$$s.t.A_2 \geq 20\% \times \sum_{j=1}^{7} L_j = 20\% \times 39600 = 7920 \tag{35}$$

⑤ 超额存款准备金比例：

$$s.t.A_1 + A_3 \geq 5\% \times \sum_{j=1}^{7} L_j = 5\% \times 39600 = 1980 \tag{36}$$

⑥ 资产流动性比例(一个月内变现的资产不低于一个月内到期负债的 25%)：

$$s.t.A_1 + A_3 + A_4 \geq 25\% \times L_1 = 25\% \times 3000 = 750 \tag{37}$$

⑦ 中长期贷款比例：

$$s.t.A_8 \geq A_9 \tag{38}$$

⑧ 非负约束：

$$s.t.A_i \geq 0\left(i = 1, 2, \cdots, 9\right) \tag{39}$$

4.6. 模型对比与求解

4.6.1. 模型求解

用 Python 求解由式(27)~式(39)组成的线性规划模型，可得控制利率风险和流动性风险的收益最大化资产配置方案，具体结果见表 10 第(1)列。

4.6.2. 基于 Nelson-Siegel 模型对比

选用的对比模型是基于 Nelson-Siegel 久期向量的资产负债组合优化模型，做法是：① 目标函数，与本文模型相同，如式(27)所示；② 利率风险免疫约束，将式(28)~式(31)换成 DNS 久期缺口模型，形式例如式(14)所示；③ 法律法规及行业管理约束，均与本文模型相同，形式例如式(32)~式(39)所示。

4.6.3. 对比模型的优化结果

各类资产子项目 A_i $(i = 1, 2, \cdots, 9)$，优化结果见表 10 第(2)列 1~9 行。

银行净资产变化 ΔV，计算公式见式(20)，具体算法：

① 本文模型

将表 10 第(1)列 1~9 行资产配置结果 A_i $(i = 1, 2, \cdots, 9)$代入式(28)~式(31)左端，得到 4 个维度久期缺口：$D_{\beta_1}^{gap} = D_{\beta_2}^{gap} = D_{\beta_3}^{gap} = D_{\beta_4}^{gap} = 0$。假设当利率在 4 个维度分别上升 1%，即 $d\beta_1 = d\beta_2 = d\beta_3 = d\beta_4 = 0.01$，将上述参数的值以及 $A = 60000$ 代入式(20)，得到本文模型的 $\Delta V = 0$，结果填入表 10 第(1)列第 10 行。$\Delta V = 0$ 表示商业银行对利率风险完全免疫，不受利率变动方向与大小的影响；假设当利率在 4 个维度上升 30%[1]，运算过程同理。

② 对比模型

将表 10 第(2)列第 1~9 行资产配置结果 A_i $(i = 1, 2, \cdots, 9)$代入式(28)~式(31)左端，得到 4 个维度久期缺口：$D_{\beta_1}^{gap} = 0.0292\%$、$D_{\beta_2}^{gap} = 0.0339\%$、$D_{\beta_3}^{gap} = 0.0975\%$、$D_{\beta_4}^{gap} = -0.049\%$。假设当利率在 4 个维度分别上升 1%，即 $d\beta_1 = d\beta_2 = d\beta_3 = d\beta_4 = 0.01$。将上述参数的值以及 $A = 60000$ 代入式(20)，得到本文模型的 $\Delta V = -0.6682$，结果填入表 10 第(2)列第 10 行。假设当利率在 4 个维度分别上升 30%，运算过程同理，

[1] 中国 2013 年 6 月 20 日上海银行间市场隔夜拆借利率 13.444%，最高 30%，因此取 $d\beta_1 = d\beta_2 = d\beta_3 = d\beta_4 = 0.3$ 作为极端情况讨论。

$\Delta V = -20.0469$，结果填入表 10 第(2)列第 11 行。对比模型之所以产生负向缺口，可能的原因是，经 Nelson-Siegel 模型预测的收益率整体上不够精确，导致资产负债的久期测算不准。因此，本文模型相比于对比模型更适合抵御利率风险。

Table 10. Optimal allocation of each asset in a commercial bank under the objective of maximizing monthly returns
表 10. 商业银行在月收益最大化目标下各项资产的最佳分配方案

序号	资产	(1) 本文优化结果(亿元)	(2) 对比模型的优化结果(亿元)
1	A1	237.6	237.6
2	A2	12520.456	9516.4988
3	A3	1742.4	1742.4
4	A4	0	0
5	A5	0	0
6	A6	17571.557	25822.238
7	A7	7039.3041	967.0884
8	A8	10444.341	10857.087
9	A9	10444.341	10857.087
10	利率在 4 个维度上升 1%时银行净资产损失	0	−0.6682
11	利率在 4 个维度上升 30%时银行净资产损失	0	−20.0469

5. 结论

本文在传统 DNS 久期向量的基础上引入 LSSC 久期向量，构造银行月收益最大化为目标，4 个维度零久期缺口辅加流动性约束为条件的资产负债组合优化模型。实证结果表明：1) 相比 Nelson-Siegel 模型，LSSC 模型的近端拟合效果具有明显优势。2) 基于 LSSC 模型实现资产负债组合优化更能有效抵御利率风险。

本文的资产负债组合优化设计注重“久期零缺口”以及银行“净资产零损失”，规避利率风险的同时也容易限制银行在有利时机增加净值。因此，未来可能的进一步研究将对久期缺口约束条件改进，把“零缺口”变为“预留缺口”，以满足银行多样的经营理念。

参考文献

[1] Thore, C.S. (1966) Planning for Liquidity in Financial Institutions: The Chance-Constrained Method. *Journal of Finance*, **21**, 649-674. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1966.tb00272.x

[2] Wolf, C.R. (2001) A Model for Selecting Commercial Bank Government Security Portfolios. *Review of Economics and Statistics*, **51**, 40-52. https://doi.org/10.2307/1926946

[3] 冯宝军，闫达文，迟国泰．基于非线性区间数风险控制的资产负债优化模型[J]．中国管理科学，2012，20(1): 79-90.

[4] 周颖，柳煦．基于多组最优解的银行资产负债多目标优化模型构建[J]．管理评论, 2018, 30(6): 13-27.

[5] Chambers, D. and Charnes, A. (1961) Inter-Temporal Analysis and Optimization of Bank Portfolios. *Management Science*, **7**, 393-410. https://doi.org/10.1287/mnsc.7.4.393

[6] Booth, G.G. and Dash, G.H. (1979) Alternate Programming Structures for Bank Portfolios. *Journal of Banking & Finance*, **3**, 67-82. https://doi.org/10.1016/0378-4266(79)90006-2

[7] Wetmore, J.L.T. and Brick, J.R. (1990) Interest Rate Risk and the Optimal Gap for Commercial Banks: An Empirical

Study. *Financial Review*, **25**, 539-557. https://doi.org/10.1111/j.1540-6288.1990.tb01297.x

[8] Gjerde, Ø. And Semmen, K. (1995) Risk-Based Capital Requirements and Bank Portfolio Risk. *Journal of Banking & Finance*, **19**, 1159-1173. https://doi.org/10.1016/0378-4266(94)00077-G

[9] 迟国泰，闫达文. 基于 VaR 控制预留缺口的资产负债管理优化模型[J]. 管理工程学报, 2011, 25(3): 123-132.

[10] 吴灏文，迟国泰. 基于方向久期与凸度免疫的资产负债优化模型[J]. 系统工程学报, 2012, 27(4): 506-512.

[11] 彭建刚，张倚胜，刘凡璠. 基于监管协调创新的银行资产负债比例管理的改进[J]. 湖南大学学报(社会科学版), 2016, 30(4): 72-78.

[12] 王晓婷，沈沛龙. 基于资本的商业银行系统流动性风险管理研究[J]. 当代经济研究, 2017(10): 71-80.

[13] 李鸿禧，迟国泰. 基于违约强度信用久期的资产负债优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(6): 1387-1403.

[14] 周颖，吴琼. 基于动态利率风险免疫的银行资产负债优化模型[J]. 运筹与管理, 2019, 28(4): 118-129.

[15] 迟国泰，张志鹏，刘艳. 基于随机久期缺口控制的全资产负债优化模型[J]. 管理工程学报, 2020, 34(3): 199-213.

[16] Nelson, C. and Siegel, A.F. (1987) Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, **60**, 473-489. https://doi.org/10.1086/296409

[17] 张继强. 债券利率风险管理的三因素模型[J]. 数量经济技术经济研究, 2004, 21(1): 62-67.

[18] 王志强，张姣. 久期配比策略的免疫性分析——来自中国国债市场的经验证据[J]. 财经问题研究，2009(11): 48-55.

[19] 余文龙，王安兴. 基于动态 Nelson-Siegel 模型的国债管理策略分析[J]. 经济学(季刊), 2010, 9(4): 1403-1426.

[20] 杨婉茜，成力为. 基于 Nelson-Siegel 模型控制利率风险的资产负债组合优化模型[J]. 系统工程，2014，32(2): 12-20.

[21] 周颖，杨洁. 基于“四维久期”利率风险免疫的资产负债组合优化模型[J]. 系统管理学报, 2019, 28(1): 86-97.

[22] 沈根祥，陈映洲. 双斜率因子动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型及其应用[J]. 中国管理科学，2015，23(10): 1-10.

[23] 文忠桥. 中国银行间国债市场利率期限结构实证分析——基于 Nelson-Siegel 模型[J]. 财贸研究，2013，24(3): 124-129.