

# Copula-GARCH方法的投资组合VaR分析

余 乐

贵州大学经济学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年12月1日; 录用日期: 2023年12月20日; 发布日期: 2024年2月29日

## 摘 要

在进行金融资产的组合风险分析时, 描述多个金融资产之间的相关结构成为确定最优组合权重的关键因素之一。在定量研究中, 准确刻画金融资产之间的非对称尾部相关结构尤为关键。文章基于沪深300指数和黄金Au9999的日对数收益率数据, 采用Copula-GARCH模型及蒙特卡洛模拟法对沪深300指数和黄金Au9999的日对数收益率进行实证分析。研究结论显示: 1) 对模型进行参数估计及检验之下, 结果显示 $t$ -Copula模型对于两类资产的相关关系拟合优度最高; 2) 使用蒙特卡洛模拟法对组合的风险进行估算, 当沪深300和黄金Au9999投资比例为0.3:0.7时, 在险价值VaR最小, 能够在极端情况下最大程度减少损失规避风险。

## 关键词

Copula-GARCH模型, 投资组合, VaR, 蒙特卡洛模拟

# Analysis of Portfolio VaR Based on Copula-GARCH Method

Le Yu

School of Economics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Dec. 1<sup>st</sup>, 2023; accepted: Dec. 20<sup>th</sup>, 2023; published: Feb. 29<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

In the analysis of portfolio risk for financial assets, describing the correlation structure among multiple financial assets becomes one of the key factors in determining the optimal portfolio weights. In quantitative research, accurately characterizing the asymmetric tail dependencies among financial assets is particularly crucial. The article conducts empirical analysis based on the daily logarithmic returns of the CSI 300 Index and gold Au9999, employing the Copula-GARCH model and Monte Carlo simulation method. The research findings indicate: 1) Under parameter

estimation and testing, the *t-Copula* model demonstrates the highest goodness-of-fit for the correlation between the two asset classes. 2) Using the Monte Carlo simulation method to estimate portfolio risk, when the investment ratio of CSI 300 and gold Au9999 is 0.3:0.7, the Value at Risk (VaR) is minimized, effectively reducing losses and mitigating risk in extreme scenarios.

## Keywords

Copula-GARCH Model, Portfolio, VaR, Monte Carlo Simulation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

当前全球金融市场面临的不确定性和复杂外部环境，对中国金融市场的影响日益凸显。在国内大循环为主体、国内国际双循环相互促进的新发展格局下，研究股票市场与黄金市场之间的动态依赖关系，以及构建多元化投资组合，对于控制风险、提高收益率具有一定的理论与现实意义。截至 2023 年 5 月，据世界黄金协会发布的《世界黄金需求趋势报告》，全球黄金交易基金(ETF)的持仓量达到了 3478 吨，创下历史新高。在国内，自 2002 年 10 月我国开放黄金投资平台以来，黄金投资业务迅速发展，许多金融机构如工商银行、建设银行等大型商业银行和信托基金也纷纷涉足黄金市场[1]。2009 年，我国首只黄金交易基金——诺安黄金 ETF 正式发行，并成功募集了 32 亿元的资金。这些进展表明黄金已成为一种重要的投资工具，被广泛应用于抵御通胀和分散投资风险的策略中[2]。全球黄金 ETF 持仓量创新高的现象反映出投资者对黄金的持续需求，这可能是由于黄金在经济不确定性增加、货币贬值风险上升等因素下的避险特性所致。与此同时，国内黄金投资业务的快速发展意味着投资者对黄金作为一种稳定储备和保值工具的认可。金融机构的参与进一步加强了市场的流动性和黄金投资产品的多样性。

在金融危机时期，投资者常常试图通过选择不同资产类别来改善投资组合的风险回报。这涉及到寻找替代资产，如国债、黄金、原油和股票等，以实现更具防御性的多元化策略[3]。首先，研究黄金与其他资产之间的动态依赖关系是十分必要的。黄金作为一种重要的避险工具，在金融市场中扮演着稳定市场情绪、抵御风险的角色。通过分析黄金与股票市场之间的相关性和时变特征，可以揭示它们之间的联动关系[4]。这有助于投资者更好地理解市场的风险传播机制，并为构建多元化投资组合提供基础。其次，构建多元化投资组合是一种有效的风险管理策略。多元化投资通过将不同资产类别进行适当的组合，可以降低整体投资组合的波动性。在金融危机时期，不同资产类别之间通常存在负相关或非线性相关性，这意味着它们在市场波动中可能表现出不同的走势[5]。因此，通过将黄金市场与股票市场等资产相互组合，可以实现风险的分散，从而降低整体投资组合的风险水平。而资产配置中关键在于如何在两种不同资产之间分配资金。为了给投资者提供有效的投资建议，本文将采用 Copula-GARCH 模型对黄金和股票投资组合进行风险分析，并寻求实现资金的最优配置。以期助力于投资者在决策过程中做出明智抉择，以最大程度地平衡风险和回报，优化资金配置。

研究表明，金融市场中的金融资产收益率一般呈现出尖峰厚尾分布，并存在着非对称的相关关系[6] [7] [8] [9]。这说明在金融市场中，极端事件发生的概率较高，而不同资产之间的关系并非完全对称。

当前广泛使用的风险管理模型通常仅独立评估市场风险和信用风险，未能实现全面的风险综合管理。在理论上，金融市场中不同类型的风险相互关联、相互影响，信用风险的波动往往引发资产价格和收益

率的波动，反之亦然。2008年的金融危机明确表明，独立考虑市场风险和信用风险可能导致对整体风险的严重低估。因此，迫切需要采用综合性的风险管理方法，以更全面、准确地评估和应对金融市场复杂的风险结构。市场和信用风险都不可忽视，需综合考虑各类风险相关性，实施整体风险评估和度量[10][11][12]。为了准确评估投资组合的风险水平，需要选择适当的边缘分布函数来描述各项资产的收益率分布，并采用多元联合分布来刻画它们之间的相关结构[13]。通过建立准确的联合分布模型，可以更好地捕捉到不同资产之间的依赖关系，从而更精确地估计投资组合的风险水平[14]。在此背景下，Copula函数被广泛认可具有重要优势。相较于其他方法，Copula函数的显著优势是不受特定边缘分布函数的限制。这意味着可以选择更适合描述资产收益率分布特征的边缘分布函数，而不仅局限于传统假设所采用的分布形式。这样能更好地适应实际市场情况，并提供更准确的风险度量结果。此外，Copula函数还具备高度的灵活性，根据实际需求，可以选择适当的Copula函数族，如高斯Copula、*t*-Copula等。这些不同类型的Copula函数能够更准确地刻画金融时间序列之间的相关性，并提供更具体、更精确的风险度量结果。

## 2. 文献综述

伴随着中国金融领域的快速演变，风险管理研究正经历着显著的变革。投资组合风险的评估和度量在近年来的研究中成为金融领域的热门话题之一。早期的研究，如Jondeau和Rockinger(2006)、Engle和Manganelli(2004)、Patton(2006)等，指出传统方法在捕捉多个金融资产之间相关性和风险方面存在不足。为了解决这一问题，研究者们引入了Copula-GARCH模型，通过将Copula函数与GARCH模型相结合，有效地估计了投资组合的在险价值。该模型在捕捉资产之间非线性相关性和尾部厚尾特征方面表现出色[15][16][17]。

随着金融创新的不断深入，金融市场之间的联系日益紧密，市场之间的相依关系更加复杂，Copula作为相关性分析和多元统计研究强有力的工具，不少学者将其运用在金融领域，用于刻画金融资产之间的相互依赖程度。当前文献在风险管理以及相关性分析方面呈现出活跃态势。蔡光辉等(2021)引入广义自回归得分模型作为参数演变过程，将其嵌入混频Copula模型中，构建了GAS MIDAS Copula模型，实证结果表明，该模型在时变性和长记忆性的捕捉、投资组合风险预测方面均表现出优越的性能和稳健性[18]。占梦雅和许伟(2011)考虑沪深股指收益率的长相依性和厚尾性的基础上，采用Copula-ARMA-ARCH模型处理不同噪声情形，并通过蒙特卡洛模拟法对VaR进行拟合，研究结果表明*t*-Copula-ARMA-ARCH模型对沪深股指收益率的VaR拟合度最优[19]。另一方面，在碳市场和供应链金融领域的研究也备受关注。曾诗鸿(2023)引入流动性风险，建立了叠加风险评估模型，结果显示中国碳试点市场中的流动性风险与市场风险呈现负相关关系，验证了流动性溢价理论在该市场的适用性[20]。茅啸天和刘胜题(2023)以碳中和债市场为例，采用Copula函数对收益率序列进行耦合，揭示了碳试点与碳债指数市场风险的正相关性[21]。胡海青等(2020)以白银、铝和铜三种供应链金融质物为研究对象，引入Copula模型揭示其“尖峰厚尾”特征和非线性相关结构，使用CVaR更全面有效地度量了质物组合的价格风险。研究结果表明*t*-Copula模型在刻画相依关系方面最优，提示长期视角下质物组合价格风险逐渐增大[22]。

综上，伴随着中国金融市场的不断发展，对投资组合风险的深入研究已成为金融领域的前沿课题。相关研究主要集中在对不同资产相关性的准确建模和对投资组合VaR的精确度量上，通过引入Copula-GARCH模型，研究者们成功地解决了传统方法在捕捉多元相关性和尾部特征上的不足。尽管Copula方法在风险研究领域相较于传统方法表现更为准确和有效，然而目前的文献主要关注于利用Copula模型研究股票指数之间与碳市场和供应链金融的相关性和风险，对于具体金融资产组合的风险研究相对较少，并且缺乏涉及不同市场中不同资产投资组合的风险分析。因此，本研究旨在运用Copula-GARCH模型来评估黄金和股票投资组合的风险水平，以便为投资者提供有针对性的投资建议。

### 3. 理论模型介绍

#### (一) GARCH 模型

设  $\{X_t\}$  是某资产的收益率序列, 假定  $X_t$  的条件均值方程为:

$$X_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

收益率无条件均值  $\mu = E(X_t)$  且条件方差  $\sigma_t^2$  满足

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2)$$

其中  $\varepsilon_t$  独立同分布于  $N(0,1)$ , 且  $\alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, j=1, \dots, p; \beta_i \geq 0, i=1, \dots, q$  为常数, 则由上述方程定义的模型称为  $(p, q)$  阶 GARCH 模型, 记为 GARCH( $p, q$ )。

在实际中, GARCH(1, 1) 可以满足大多数需要, 其可对金融收益率序列的异方差进行较好的描述。它的条件方差函数为

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (3)$$

其中  $\alpha_0 > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 。GARCH(1,1) 是平稳的充要条件是  $\alpha + \beta < 1$ 。

#### (二) Copula 模型

Copula 模型主要分为 Elliptical Copula 和 Archimedean Copula 两大类。由椭圆分布生成 Copula 的属于 Elliptical Copula, 描述线性相关性和尾部相关性, 用于金融领域的常见模型有 Gaussian Copula 和  $t$ -Copula。而常见的 Archimedean Copula 包含 Clayton Copula、Gumbel Copula 以及 Frank Copula。

##### 1) Sklar 定理

令  $H(\cdot, \cdot)$  为具有边缘分布  $F(\cdot)$  和  $G(\cdot)$  的联合分布函数, 那么存在一个 Copula 函数  $C(\cdot, \cdot)$ , 满足:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (4)$$

若  $F(\cdot), G(\cdot)$  连续, 则  $C(\cdot, \cdot)$  唯一确定; 反之  $F(\cdot), G(\cdot)$  为一元分布函数,  $C(\cdot, \cdot)$  为相应的 Copula 函数, 那么由式(1)定义的函数  $H(\cdot, \cdot)$  是具有  $F(\cdot), G(\cdot)$  的联合分布函数。则  $F^{(-1)}(\cdot), G^{(-1)}(\cdot)$  分别为函数  $F(\cdot), G(\cdot)$  的伪逆函数, 那么对于函数  $C(\cdot, \cdot)$  定义域内的任意  $(u, v)$ , 均有

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \quad (5)$$

由上述二元函数可推广至多元, 即一个基于上述论证, 我们得出结论: 对于包含  $n$  个变量的多元分布函数, 可将其分解为  $n$  个边际分布和一个由  $n$  个变量的边际分布函数所构成的复合函数, 即所谓的函数 Copula。函数 Copula 在描述变量之间的相关性结构时具有显著优势, 因为它无需考虑单个变量的边际分布, 并且允许变量的边际分布不必相同。这使得利用函数 Copula 来研究多元随机变量的相关结构变得极为便利。采用这种方法能够避免对多元正态分布假设的依赖, 从而更准确地度量金融风险并使其与实际情况更为吻合。此方法的应用不仅在学术上具有重要意义, 同时也对提升金融风险管理的精确性和实用性具有显著作用。

##### 2) 常见的二元 Copula 函数

###### ① Gaussian Copula

二元 Gaussian Copula 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C(u, v; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(r^2 + s^2 - 2\rho rs)}{2(1-\rho^2)}\right) dr ds \quad (6)$$

$$c(u, v, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(u)^2 + \Phi^{-1}(v)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v)}{2(1-\rho^2)}\right) \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(u)^2 \cdot \Phi^{-1}(v)^2}{2}\right) \quad (7)$$

其中  $\Phi^{-1}(\cdot)$  是标准一元正态分布  $\Phi(\cdot)$  的逆函数,  $\rho \in (-1, 1)$ , 为相关参数, 它实际上是  $\Phi^{-1}(u)$  和  $\Phi^{-1}(v)$  的线性相关系数。

二元正态 Copula 函数在一般情况下能够较好地拟合样本数据, 但由于其对称性特征的限制, 无法充分捕捉金融市场之间存在的非对称关系。

### ② *t-Copula*

二元 *t-Copula* 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C(u, v; \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\nu(1-\rho^2)}\right]^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt \quad (8)$$

$$c(u, v; \rho, \nu) = \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right]^2} \frac{\left[1 + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right]^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+2}{2}}} \quad (9)$$

其中  $\rho \in (-1, 1)$  为线性相关系数;  $T_v^{-1}(\cdot)$  为自由度为  $\nu$  的一元分布函数  $T_v^{(\cdot)}$  的逆函数;  $\zeta_1 = T_v^{-1}(u)$ ,  $\zeta_2 = T_v^{-1}(v)$ 。

二元 *t-Copula* 函数具有对称性, 因此能够精确捕捉金融市场中的对称相关关系。由于其尾部厚重的特性, 它对变量间尾部相关性的变化更为敏感, 从而能够更有效地捕获金融市场之间的尾部相关性。

### ③ *Clayton Copula*

*Clayton Copula* 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C_{Cl}(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (10)$$

$$c_{cl}(u, v; \theta) = (1+\theta)(uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta} \quad (11)$$

其中  $\theta \in (0, \infty)$ , 为相关参数。当  $\theta \rightarrow 0$  时, 随机变量趋向于独立, 即  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{Cl}(u, v; \theta) = uv$ ; 当  $\theta \rightarrow \infty$  时, 随机变量  $u, v$  趋向于完全相关, 且  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{Cl}(u, v; \theta) = \min(u, v) = C^+$ , 即当  $\theta \rightarrow \infty$  时, *Clayton Copula* 函数趋向于上界  $C^+$ 。

*Clayton Copula* 密度函数展现了非对称性, 其分布呈现“L”字形状, 即上尾低下尾高的特征。该函数对于变量在下尾部的分布变化非常敏感, 能够迅速捕捉到下尾相关性的变动。然而, 在分布的上尾部, 由于变量渐近独立, 因此对于上尾部分布的变化不敏感。这种特性使得 *Clayton Copula* 函数在不同尾部区域表现出差异的敏感性, 为我们分析和理解变量之间的相关关系提供了重要洞察。

### ④ *Gumbel Copula*

*Gumbel Copula* 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C_G(u, v; \alpha) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\frac{1}{\alpha}} + (-\ln v)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right) \quad (12)$$

$$c_G = \frac{C_G(u, v; \alpha)(\ln u \cdot \ln v)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{uv \left[(-\ln u)^{\frac{1}{\alpha}} + (-\ln v)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{2-\alpha}} \left\{ \left[(-\ln u)^{\frac{1}{\alpha}} + (-\ln v)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 1 \right\} \quad (13)$$

其中  $a \in (0, 1]$ ，为相关参数。当  $a = 1$  时，随机变量  $u, v$  独立，即  $C_G(u, v; 1) = uv$ ，当  $a \rightarrow 0$  时，随机变量  $u, v$  趋向于完全相关，且  $\lim_{a \rightarrow 0} C_G(u, v; a) = \min(u, v) = C^+$ ，即当  $a \rightarrow 0$  时，Gumbel Copula 函数趋向于上界  $C^+$ 。

Gumbel Copula 概率密度函数呈现非对称性，与 Clayton Copula 函数截然相反。其密度分布以“J”字形形态展现，对于分布的上尾部变化极为敏感，能够迅速捕捉到极端正相关性的变动。然而，在分布的下尾部，由于变量趋向渐近独立，因此对于该区域的变化不敏感。这种特性使得 Gumbel Copula 在捕捉上尾相关性方面表现出色，但在下尾部的变化分析中相对较弱。

### ⑤ Frank Copula

Gumbel Copula 和 Clayton Copula 函数只能描述变量间的非负相关关系，而 Frank Copula 函数还可描述变量之间的负相关关系，其分布函数和密度函数为：

$$C_F(u, v; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\lambda u} - 1)(e^{-\lambda v} - 1)}{e^{-\lambda} - 1} \right) \quad (14)$$

$$c_F(u, v; \lambda) = \frac{-\lambda(e^{-\lambda} - 1)e^{-\lambda(u+v)}}{\left[ (e^{-\lambda} - 1) + (e^{-\lambda u} - 1)(e^{-\lambda v} - 1) \right]^2} \quad (15)$$

其中  $\lambda$  为相关参数， $\lambda \neq 0$ 。 $\lambda > 0$  表示随机变量  $u, v$  正相关， $\lambda \rightarrow 0$  表示随机变量  $u, v$  趋向于独立， $\lambda < 0$  表示随机变量  $u, v$  负相关。

Frank Copula 的密度分布呈“U”字形，具有对称性，因此无法捕捉到随机变量间非对称的相关关系，其只适合描述具有对称相关结构变量的相关关系，对于上尾和下尾相关性变化均不敏感，难以捕捉尾部相关变化。

### (三) VaR 的定义及计算步骤

VaR 方法指的是在正常的市场波动下，某一金融资产或证券组合所面临的最大损失，表达式为：

$$P(\Delta P \Delta t \leq \text{VaR}) = \alpha \quad (16)$$

其中， $P$  表示资产价值损失小于可能损失上限的概率， $\Delta P \Delta t$  表示某一金融资产在一定持有期  $\Delta t$  的价值损失额，VaR 表示在给定制信水平  $\alpha$  下的最大损失值。

两种资产组合的 VaR 计算步骤如下：

- 1) 分别估计两支资产  $X$  和  $Y$  收益率的边缘分布函数  $F(\cdot)$  和  $G(\cdot)$ ；
- 2) 选择合适的 Copula 函数  $C(u, v)$ ，其中  $u = F(r_x)$ ， $v = G(r_y)$ ， $u, v$  服从  $(0, 1)$  均匀分布；
- 3) 根据 Copula 的参数结果，用计算机产生 1000 组随机数组  $(u, v)$ ，其中随机数  $u, v$  服从  $(0, 1)$  均匀分布；
- 4) 分别计算  $u, v$  所对应的资产收益率  $r_x, r_y$ ；
- 5) 根据自定义权重  $w$  计算投资组合收益率；
- 6) 根据 VaR 定义求出在险价值。

## 4. 实证分析

### (一) 数据来源与描述性统计

由于 Au9999 是上海黄金交易所的代表性产品，沪深 300 指数覆盖了沪深两市 75% 以上的市值。因此本文所指黄金、股票分别为 Au9999、沪深 300 指数。本文选取上海黄金交易所 Au9999、沪深 300 指数与自 2011 年 6 月 30 日至 2023 年 6 月 30 日的收盘价为样本，数据来自 Choice 金融终端，剔除无效数

据,共得到 2908 组有效数据,旨在通过对日收益率的研究得出投资组合的相关性对投资组合损失的影响。数据来源为 Choice 金融终端,本文所有程序采用 RStudio 软件编写。

对沪深 300 和黄金 Au9999 日收益率进行建模,记  $P_t$  为第  $t$  交易日指数的收盘价,定义为第  $t$  交易日的对数收益率为  $r_t$  即

$$r_t = \ln p_t - \ln p_{t-1} \quad (17)$$

将价格序列转化为对数收益率序列,并对其基本统计特征进行分析。图 1 为沪深 300 和黄金 Au9999 日对数收益率的时序图,从图中可以看出其日对数收益率的波动十分强烈,具有明显的异方差性。

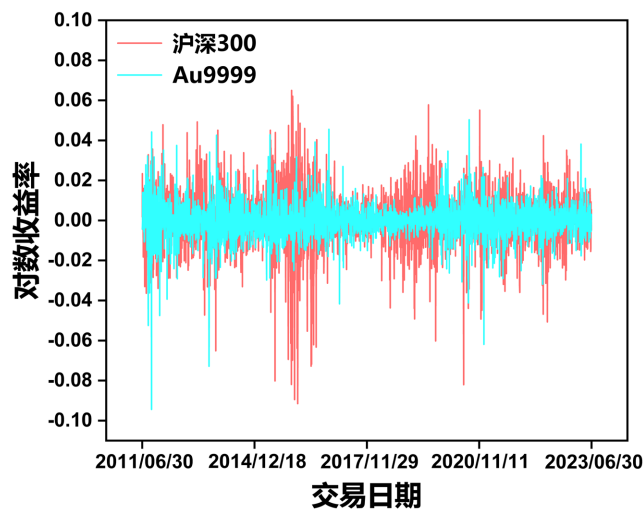


Figure 1. Logarithmic returns time series  
图 1. 对数收益率时序图

图 2 给出了上述沪深 300 和黄金 Au9999 的日收益率序列的频率直方图,由图可得沪深 300 和黄金 Au9999 对数收益率具有显著的尖峰厚尾特征。表 1 给出样本数据日对数收益率描述性统计分析,沪深 300 和黄金 Au9999 的偏度系数均小于 0,说明其分布函数存在左偏,沪深 300 和黄金 Au9999 的峰度均大于 3,说明这沪深 300 和黄金 Au9999 的价格收益率序列的分布函数均存在尖峰厚尾的特征。对两序列进行正态性检验,沪深 300 和黄金 Au9999 的 J-B 统计量分别为 3500.208 和 11210.51, p 值均小于 0.05,拒绝原假设,即表明其不服从正态分布。时间序列的平稳性是保证模型得以拟合成功的前提,本文对沪深 300 和黄金 Au9999 时间序列进行 ADF 平稳性检验,原假设为该时间序列数据是非平稳的(存在趋势或季节性等),而备择假设为该时间序列数据是平稳的。由于 p 值均为 0.01 (小于通常选择的显著性水平如 0.05),我们可以拒绝原假设,接受备择假设,即认为该时间序列数据是平稳的。

Table 1. Descriptive statistics of daily logarithmic returns in the sample data

表 1. 样本数据日对数收益率描述性统计分析

名称	平均值	标准差	偏度	峰度	J-B 统计量 (p 值)	ADF 检验 (p 值)
沪深 300	0.00008	0.01404	-0.64623	5.21118	3500.208*** (0.0000)	-13.67*** (0.01)
Au9999	0.00012	0.00902	-0.63488	9.52592	11210.51*** (0.0000)	-13.878*** (0.01)

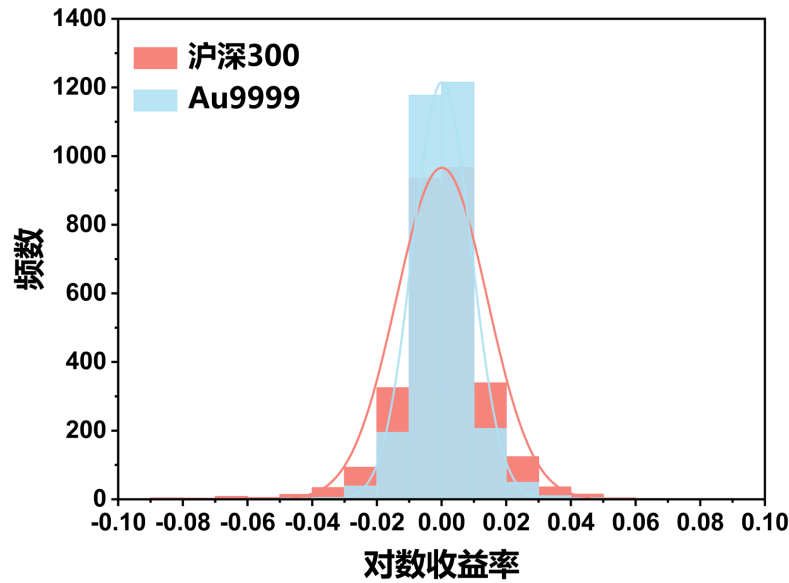


Figure 2. Frequency histograms of logarithmic returns for SSE 300 and Gold Au9999  
图 2. 沪深 300 和黄金 Au9999 对数收益率频率直方图

### (二) ARCH 效应检验

如表 2，对各序列进行 ARCH-LM 检验与基于秩次的检验，两个序列 p 值均小于 0.05，表明均存在 ARCH 效应，可以使用 GARCH 模型进行拟合。

Table 2. Results of ARCH effects test  
表 2. ARCH 效应检验结果

名称	LMtest	p-value	Rank-based Test	p-value
沪深 300	259.9217***	0.0000	26.69769***	1.59467e <sup>-6</sup>
Au9999	151.2429***	0.0000	112.9648***	0.0000

注：其中\*、\*\*、\*\*\*分别代表在 1%、5%、10%的显著水平下。

### (三) 边缘分布的模型确立及其参数估计

在金融时间序列的尾部分布特征方面，GARCH 模型能够提供较为精确的描述，并且表明收益率方差具有一定的可预测性。因此，我们基于 GARCH 模型获取时间序列的边缘分布，并运用 Copula 函数将经过概率积分变换的序列进行联结，以揭示沪深 300 和黄金 Au9999 日对数收益率之间的相关结构。相较于传统线性模型，Copula-GARCH 模型通过采用不同的边缘分布，能够更有效地分析非线性关系。本文选择的 GARCH(1, 1)-t 模型对沪深 300 和黄金 Au9999 的日对数收益率序列进行残差过滤，估计结果如表 3 所示。通过对边际分布检验，消除了原序列中存在的自回归和异方差问题，得到独立同分布的序列，并关注过滤后的收益率序列是否存在自相关性及其分布特性。Ljung-Box 检验表明，两序列拒绝自相关性，ADF 检验表明残差序列不存在单位根。因此，通过 GARCH(1, 1)-t 模型对两日对数收益率序列过滤得到了不相关和无异方差的平稳残差序列。表 3 给出了边缘分布 GARCH(1, 1)-t 的参数估计以及模型的检验结果，可以看出在显著性水平为 0.05 时，Q (5)与 LM (7)检验统计量对应的 p 值均大于 0.05，不能拒绝原假设，即各残差序列均不存在自相关现象以及 ARCH 效应，模型拟合较理想。因此可以进行联合分布，将标准化残差序列经过概率积分化处理，使其服从 0~1 均匀分布并参与 Copula 建模。



**Table 3.** Parameter estimates of marginal distribution models  
**表 3.** 边缘分布模型的参数估计结果

名称	沪深 300	Au9999
$\mu$	0.000331* (0.076969)	0.000110 (0.341041)
$\omega$	0.000002 (0.161577)	0.000001* (0.052401)
$\alpha$	0.060644*** (0.000000)	0.059439*** (0.000000)
$\beta$	0.933338*** (0.000000)	0.937116*** (0.000000)
$\nu$	5.031554*** (0.000000)	4.495295*** (0.000000)
LL	8735.142	10048.96
Q (5)	3.515 (0.10185)	1.1448 (0.8261)
LM (7)	2.640 (0.5840)	1.37748 (0.8456)
AIC	-6.0042	-6.9078

注：LL 为模型估计的对数似然值，Q (5)为滞后阶数是 5 的 Ljung-Box 检验，LM (7)为 ARCH 效应检验，括号中的数字对应检验统计量的 p 值，其中\*、\*\*、\*\*\*分别代表在 1%、5%、10%的显著水平下。

#### (四) Copula 参数的估计

上述已拟合沪深 300 和黄金 Au9999 日对数收益率的边缘分布，那么就需要找到一种能够描述这种相关结构的 Copula 函数。利用两个经过概率积分转换后的数据序列建立二元 Gaussian、学生 t、Clayton、Gumbel、FrankCopula 模型并估计其参数。通过比较各个模型的 AIC，选择最优的 Copula 函数。由表 4 可得，五种 Copula 函数的相关参数估计值均为正数，说明黄金和股票之间具有正相关关系。但总体而言，两种资产的相关系数不大，可见采用不同种资产形成投资组合可以降低投资风险。AIC 适用于对模型的拟合优度进行检验，AIC 值越小说明模型拟合优度越高，BIC 判断原则同理，比较不同种 Copula 函数的 AIC 以及 BIC 值，结果显示 *t-Copula* 的 AIC 和 BIC 值最小，说明 *t-Copula* 对于沪深 300 和 Au9999 的日对数收益率之间的相依结构拟合度较优。因此选择 *t-Copula* 函数作为二者的联合分布函数来描述两序列间的相关结构。

**Table 4.** Parameter estimates of copula models  
**表 4.** Copula 参数估计结果

指标	Gaussian Copula	<i>t-Copula</i>	Clayton Copula	Gumbel Copula	Frank Copula
Parameters	0.01	0.02	0.03	1.02	0.2
Kendll	0.01	0.02	0.01	0.02	0.02
AIC	1.4	-16.41	0.07	-1.15	-1.28
BIC	7.37	-4.86	6.04	4.82	4.7
Loglik	0.3	10.41	0.97	1.58	1.64

(五) 采用蒙特卡洛模拟计算投资组合 VaR

在投资组合中沪深 300 和黄金 Au9999 的权重分别为  $\omega$  和  $1-\omega$ ，采用蒙特卡洛模拟法，重复模拟 10,000 次而得到由 Copula-GARCH 模型二维仿真数据后，将其还原为资产的收益率数据，记沪深 300 收益率为  $r_1$ ，黄金 Au9999 收益率为  $r_2$ ，则其投资组合收益率为  $r = \omega r_1 + (1-\omega)r_2$ ，进而得到损失序列。由损失序列的经验分布，给定置信水平下 95% 和 99% 的投资组合 VaR 值。从表 5 数据可得，在相同的置信水平下，当  $w \in (0, 0.3)$  时，随着沪深 300 指数投资权重的增加，投资组合的 VaR 值不断减少，当  $w \in (0.3, 1)$  时，随着沪深 300 指数投资权重的增加，投资组合的 VaR 值不断增加。沪深 300 在投资组合中所占比重与风险价值(VaR)之间存在非单调变化的关系。如图 3 所示，随着沪深 300 比重的增加，VaR 起初减小，达到最小值后又开始增加。说明沪深 300 和黄金 Au9999 的最有投资组合权重为 0.3:0.7 时，其在险价值为在 95% 的置信水平下为 1.131%，在 99% 置信水平下为 1.844%。换言之，在给定 95% 和 99% 的置信水平下，该投资组合遭受极端风险时所导致的最大损失率分别为 1.131% 和 1.844%。相较于其余权重而言，当沪深 300 和黄金 Au9999 投资比例为 0.3:0.7 时，能够在极端情况下最大程度减少损失规避风险。

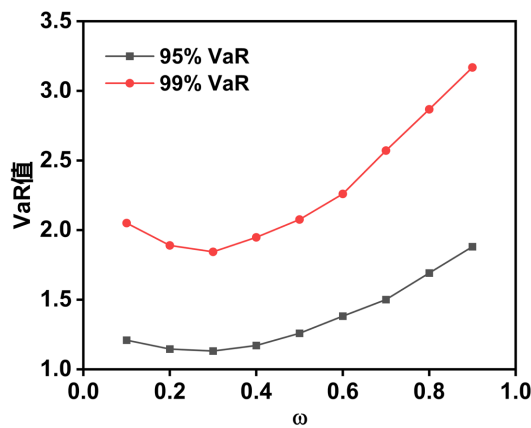


Figure 3. Portfolio VaR values at different confidence levels

图 3. 不同置信水平下投资组合 VaR 值

Table 5. Portfolio VaR values under different weights

表 5. 不同权重下投资组合 VaR 值

	不同置信水平下的 VaR 值(%)	
	95% VaR	99% VaR
$\omega = 0.1$	1.2097	2.050519
$\omega = 0.2$	1.145639	1.889985
$\omega = 0.3$	1.131488	1.843936
$\omega = 0.4$	1.171305	1.948081
$\omega = 0.5$	1.258721	2.07608
$\omega = 0.6$	1.381885	2.26009
$\omega = 0.7$	1.501069	2.57137
$\omega = 0.8$	1.691788	2.867298
$\omega = 0.9$	1.880441	3.168304

## 5. 结论

本文采用 Copula-GARCH 模型对沪深 300 指数和黄金 Au9999 的日对数收益率进行实证分析, 首先对两类资产日对数收益率进行描述性统计分析, 发现其具有尖峰、厚尾、波动聚集性等程序性现象。因此采用 GARCH(1, 1)-t 模型进行边缘分布拟合, 并得出参数估计结果。边缘分布确定后, 采用不同的 Copula 模型刻画两类资产之间的相依关系。在对模型进行参数估计及检验之下, 认为 *t-Copula* 模型对于两类资产的相关关系拟合优度最高, 在此模型中, 假设两类资产的尾部相依关系是对称的, 即无论是在看涨还是看跌的情况下, 这两类资产同时经历暴涨或暴跌的可能性是相等的。在两类资产作为投资组合可行的基础下, 使用蒙特卡洛模拟法对组合的风险进行估算, 比较认为相较于其余权重而言, 当沪深 300 和黄金 Au9999 投资比例为 0.3:0.7 时, 在险价值 VaR 最小, 能够在极端情况下最大程度减少损失规避风险。在金融风险管理和金融投资领域, 对不同市场不同资产之间的相关性进行系统分析与风险度量具有重要意义。这种分析能够为风险管理提供决策依据, 使其能够做出更加合理的决策。同时, 投资者也能够通过对当前风险的判断和分析, 及时调整资产配置, 以追求更大的收益。因此, 对不同类别资产相关性的研究不仅对风险管理者而言至关重要, 也对投资者具有重要价值。

## 参考文献

- [1] 曹培慎, 武昭, 张静. 基于 Copula-GARCH 模型的黄金, 股票与债券投资组合风险分析[J]. 西安电子科技大学学报: 社会科学版, 2012(5): 34-40.
- [2] 戴志锋, 朱皓阳, 尹华. 我国石油, 黄金, 房地产和金融部门间系统风险动态溢出效应研究[J]. 系统工程理论与实践, 2022, 42(10): 2603-2616.
- [3] 丛颖男, 刘宜鑫, 杨达森. 基于 Copula 方法的中国金融市场间相依结构研究[J]. 金融经济研究, 2023, 38(2): 51-65.
- [4] 张乖利. 黄金与股票价格指数之间的关系研究[J]. 技术经济与管理研究, 2020(5): 87-91.
- [5] 刘志蛟, 刘力臻. 黄金能对冲人民币汇率和股市风险吗? [J]. 金融论坛, 2018, 23(4): 43-55.
- [6] Bollerslev, T. (1987) A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, **69**, 542-547. <https://doi.org/10.2307/1925546>
- [7] Hansen, B.E. (1994) Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, **35**, 705-730. <https://doi.org/10.2307/2527081>
- [8] Zhu, D. and Galbraith, J.W.A. (2010) Generalized Asymmetric Student-t Distribution with Application to Financial Econometrics. *Journal of Econometrics*, **157**, 297-305. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2010.01.013>
- [9] 吴鑫育, 马超群, 汪寿阳. 随机波动率模型的参数估计及对中国股市的实证[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(1): 35-44.
- [10] Wang, W. and Yao, D. (2016) Risk Assets Optimized Configuration under Integrated Risks-in View of Banker's Risk Appetite. *International Journal of Simulation-Systems, Science & Technology*, **17**, 5.1-5.6. <https://ijssst.info/Vol-17/No-6/paper5.pdf>
- [11] 陈荣达, 陆金荣. 可违约零息债券风险综合度量 Monte Carlo 方法[J]. 管理科学学报, 2012, 15(4): 88-98.
- [12] 汪冬华, 黄康, 龚朴. 我国商业银行整体风险度量及其敏感性分析——基于我国商业银行财务数据和金融市场公开数据[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(2): 284-295.
- [13] 钱玲玲, 蒋岳祥. 基于 Copula 理论的最优边缘分布模型构建[J]. 统计与决策, 2020, 36(12): 125-129.
- [14] 蒋伟, 阮青松. 投资组合风险预测: 非线性动态依赖与市场极端行为[J]. 投资研究, 2017, 36(8): 129-142.
- [15] Jondeau, E. and Rockinger, M. (2006) The Copula-Garch Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application. *Journal of International Money and Finance*, **25**, 827-853. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2006.04.007>
- [16] Engle, R.F. and Manganelli, S. (2004) CAViAR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, **22**, 367-381. <https://doi.org/10.1198/073500104000000370>
- [17] Patton, A.J. (2006) Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review*, **47**, 527-556.

<https://doi.org/10.1111/j.1468-2354.2006.00387.x>

- [18] 蔡光辉, 徐君, 应雪海. 基于 GAS 的混频 Copula 模型的投资组合风险预测[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(8): 2030-2044.
- [19] 占梦雅, 许伟. Copula 相依结构下沪深股指波动及动态 VaR 计量[J]. 华东师范大学学报: 哲学社会科学版, 2011(6): 123-130.
- [20] 曾诗鸿, 贾婧敏, 姚树洁, 等. 基于 Copula 模型的中国碳市场叠加风险度量[J]. 金融研究, 2023, 513(3): 93-111.
- [21] 茅啸天, 刘胜题. 碳中和债券市场对碳交易市场的风险溢出效应研究[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(5): 5896-5904.
- [22] 胡海青, 陈迪, 张丹, 等. 基于 Copula 的供应链金融质物组合价格风险测度研究[J]. 运筹与管理, 2020, 29(3): 77-90.