Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 117-122
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23019 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

New Subclass of p-Valent Meromorphic Functions*

Jingyu Yang[1,2], Shuhai Li[2]

[1]Department of Mathematics, Chifeng University, Chifeng
[2]School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian
Email: yjy923@163.com, lishms66@sina.com

Received: Jan. 21st, 2012; revised: Feb. 14th, 2012; accepted: Feb. 25th, 2012

Abstract: In this paper, we introduce a subclass $\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$ of the class $\sum_{p,j}$ by use of Hadamard operator $L_p(a,c)$ and subordination principle. The main objective of this paper is to provide coefficient inequality, inclusion properties, extreme points, convexity and starlike radius of this class. In this paper, we extend relevant results of univalent meromorphic functions and p-valent meromorphic functions to the subclass $\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$.

Keywords: Hadamard Convolution; Meromorphic Functions; Coefficient Inequality; Extreme Point; Convexity Radius; Starlike Radius

p-叶亚纯函数的新子类*

杨静宇 1,2，李书海 2

1 赤峰学院数学学院，赤峰
2 大连理工大学数学科学学院，大连
Email: yjy923@163.com, lishms66@sina.com

收稿日期：2012 年 1 月 21 日；修回日期：2012 年 2 月 14 日；录用日期：2012 年 2 月 25 日

摘 要：本文运用线性算子$L_p(a,c)$和从属关系定义了含绝对值形式的 p-叶亚纯函数$\sum_{p,j}$的一个新子类$\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。讨论了该函数类的系数不等式，包含关系，极值定理以及凸半径和星象半径。本文将已有的某些单叶亚纯函数及 p-叶亚纯函数的相关结果推广至 p-叶亚纯数子类$\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$上。

关键词：Hadamard 卷积；亚纯函数；系数不等式；极值点；凸半径；星象半径

1. 引言

设$\sum_{p,j}$表示在$U^*=\{z:z\in C,0<|z|<1\}$内解析，形如

$$f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}a_n z^n \quad \left(j\in N^*=\{2i-1:i\in N=1,2,\cdots\}\right) \tag{1}$$

的 p-叶亚纯函数全体所成的函数类。设$\beta\in R,0\le\beta<1$，若$f(z)$满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{zf'(z)}{pf(z)}\right\}>\beta \qquad \left(z\in U^*\right) \tag{2}$$

*基金项目：内蒙古自然科学基金(No. 2009MS0113)。

则称 $f(z)$ 是 β -级亚纯星象函数；若 $f(z)$ 满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{-\left(\frac{1}{p}+\frac{zf''(z)}{pf'(z)}\right)\right\}>\beta \qquad \left(z\in U^{*}\right) \tag{3}$$

则称 $f(z)$ 是 β -级亚纯凸象函数。

设 $f(z)=\frac{1}{z^{p}}+\sum_{n=j}^{\infty}a_{n}z^{n}\in\sum_{p,j}$， $g(z)=\frac{1}{z^{p}}+\sum_{n=j}^{\infty}b_{n}z^{n}\in\sum_{p,j}$，则 $f(z),g(z)$ 的 Hadamard 卷积定义为：

$$(f*g)(z)=\frac{1}{z^{p}}+\sum_{n=j}^{\infty}a_{n}b_{n}z^{n}=(g*f)(z) \qquad \left(z\in U^{*}\right) \tag{4}$$

令 $(v)_{n}=\frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v)}=\begin{cases}1 & (n=0)\\ v(v+1)\cdots(v+n-1) & (n\in N)\end{cases}$，定义函数 $\varphi_{p}(a,c;z)$

$$\varphi_{p}(a,c;z)=\frac{1}{z^{p}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n}}{(c)_{n}}z^{n-1} \quad \left(a\in R;c\setminus z_{0}^{-};z_{0}^{-}:=\{0,-1,-2,\cdots\};z\in U^{*}\right) \tag{5}$$

根据函数的 Hadamard 卷积的定义和函数 $\varphi_{p}(a,c;z)$，引进线性算子 $L_{p}(a,c)$ [1,2]

$$L_{p}(a,c)f(z)=\varphi_{p}(a,c;z)*f(z) \qquad \left(f(z)\in\Sigma_{p,j}\right) \tag{6}$$

文[3]中 Aouf，Silverman 和 Srivastava，运用算子 $L_{p}(a,c)$ 定义了 p-叶解析函数的子类 $P_{a,c}(A,B,p,\alpha)$ 并且考察了子类 $P_{a,c}(A,B,p,\alpha)$ 的系数不等式等性质。文[4]Aouf 及 El-Ashwah 研究了正系数单叶亚纯函数类的性质。J. Patel，N. E. Cho，H. M. Srivastava 在[5]中给出了 p-叶解析函数类的包含关系等一系列的性质 Kim，Lee 及 Owa 在文[6]中讨论了一类正系数单叶亚纯函数类。本文受文献[4]的启发，利用算子 $L_{p}(a,c)$ 和从属关系定义了含绝对值形式的 p-叶亚纯函数类，并用文[4]中的方法，研究该类函数的性质，得到该函数类的系数不等式，包含关系，极值定理以及凸半和星象半径。所得结果推广了文[4]的相应结论。

定义 1 设 $p\in N,a>0,c>0,\ -1\le A<B\le 1,\lambda\in R,\ 0\le\alpha\le\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!},\ m\in N^{*},\ m\le j,$ 若函数 $f(z)\in\sum_{p,j}$ 满足条件

$$\frac{1}{-\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}+\alpha}\left(z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|+\alpha\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz} \qquad \left(z\in U^{*}\right) \tag{7}$$

则称 $f(z)$ 属于函数类 $\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，显然式(7)等价与

$$\left|\frac{z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}}{B\left(z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_{p}(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|\right)+\left(B\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}+(A-B)\left(\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)\right)}\right|<1 \tag{8}$$

注 1 在本文的研究过程中，参数 B 的取值范围是 $0<B\le 1$。

2. 系数不等式

定理 1 设 $f(z)=\frac{1}{z^{p}}+\sum_{n=j}^{\infty}a_{n}z^{n}\in\sum_{p,j}$，若

$$\sum_{n=j}^{\infty}\phi_n\left(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda\right)\left|a_n\right|\le\left(B-A\right) \tag{9}$$

那么 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，其中

$$\phi_n\left(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda\right)=\frac{(1+B)(1+|\lambda|)(a)_{n+1}\,n!}{(c)_{n+1}(n-m)!\left(\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)} \tag{10}$$

证明：设 $f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}a_nz^n\in\sum_{p,j}$，则

$$\begin{aligned}
&\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right| \\
&-\left|B\left(z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|\right)\right. \\
&\left.+\left(B\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}+(A-B)\left(\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)\right)\right| \\
=&\left|\sum_{n=j}^{\infty}a_n\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}z^{n+p}-\lambda\left|\sum_{n=j}^{\infty}a_n\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}z^{n+p}\right|\right| \\
&-\left|B\sum_{n=j}^{\infty}a_n\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}z^{n+p}-\lambda B\left|\sum_{n=j}^{\infty}a_n\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}z^{n+p}\right|+(A-B)\left(\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)\right| \\
\le&\left(1+|\lambda|\right)(1+B)\sum_{n=j}^{\infty}|a_n|\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}|z|^{n+p}-(B-A)\left(\frac{(p-m+1)!}{(p-1)!}-\alpha\right) \\
=&\left(1+|\lambda|\right)(1+B)\sum_{n=j}^{\infty}|a_n|\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}-(B-A)\left(\frac{(p-m+1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)\left(|z|=1\right)
\end{aligned}$$

根据最大模原理，对任意 $z\in U^*$ 都有

$$\begin{aligned}
&\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right| \\
&-\left|B\left(z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}-\lambda\left|z^{m+p}\left(L_p(a,c)f(z)\right)^{(m)}+\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}\right|\right)\right. \\
&\left.+\left(B\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}+(A-B)\left(\frac{(p+m-1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)\right)\right| \\
\le&\left(1+|\lambda|\right)(1+B)\sum_{n=j}^{\infty}|a_n|\frac{n!(a)_{n+1}}{(n-m)!(c)_{n+1}}-(B-A)\left(\frac{(p-m+1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)
\end{aligned}$$

从而由从属原理得 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

3. 包含关系

定理 2 设 $a>0$，则 $\sum_{p,j}(a+1,c,A,B,\alpha,m;\lambda)\subset\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

证明：因为

$$\frac{(1+B)(1+|\lambda|)(a)_{n+1}n!}{(c)_{n+1}(n-m)!(B-A)\left(\frac{(p-m+1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)}\le\frac{(1+B)(1+|\lambda|)(a+1)_{n+1}n!}{(c)_{n+1}(n-m)!(B-A)\left(\frac{(p-m+1)!}{(p-1)!}-\alpha\right)}$$

所以根据定理 1 可以推出 $\sum_{p,j}(a+1,c,A,B,\alpha,m;\lambda)\subset\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

定理 3 设 v 是复数且 $\mathrm{Re}\,v>0$， $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，若

$$F(z)=\frac{v}{z^{p+v}}\int_0^z t^{p+v-1}f(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

证明：设 $f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}a_nz^n\in\sum_{p,j}$，那么

$$F(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}\frac{v}{n+p+v}a_nz^n$$

因为 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$ 且

$$\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)\left|\frac{v}{n+p+v}a_n\right|\le\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)|a_n|$$

所以由定理 1 可知 $F(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

4. 极值点

定理 4 设 $f_p(z)=\frac{1}{z^p},f_{n+p}(z)=\frac{1}{z^p}+\frac{B-A}{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}z^n$，则 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，当且仅当

$$f(z)=\lambda_pf_p(z)+\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{n+p}f_{n+p}(z)$$

其中 $\lambda_{p+n}>0,\lambda_p=1-\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{n+p}$。

证明：充分性。设 $f(z)=\lambda_pf_p(z)+\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{n+p}f_{n+p}(z)$，则

$$f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{p+n}\frac{B-A}{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}z^n$$

进一步的

$$\sum_{n=j}^{\infty}\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)\left|\frac{B-A}{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}\lambda_{n+p}\right|=\sum_{n=j}^{\infty}(B-A)\lambda_{n+p}=(B-A)(1-\lambda_p)\le(B-A)$$

由定理 1 得 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$。

必要性。假设 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，则有

$$|a_n|\le\frac{B-A}{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}$$

令 $\lambda_{n+p}=\frac{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{B-A}|a_n|$， $\lambda_p=1-\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{n+p}$，则有

$$f(z)=\lambda_pf_p(z)+\sum_{n=j}^{\infty}\lambda_{n+p}f_{n+p}(z)$$

5. 星象半径与凸半径

定理 5 设 $f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}a_n z^n \in \sum_{p,j}$，$f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，那么 $f(z)$ 在 $|z|<r_\zeta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$ 内是 ζ -级星象函数 $(0\le\zeta<1)$，其中

$$r_\zeta=\inf_{n\ge j}\left\{\frac{p(1-\zeta)\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)(n+2p-p\zeta)}\right\}^{\frac{1}{n+p}} \tag{11}$$

证明：根据星象函数的定义及(2)式，只需证对任意 $|z|<r_\zeta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$ 内都有

$$\left|1+\frac{zf'(z)}{pf(z)}\right|\le 1-\zeta \tag{12}$$

由于

$$\left|1+\frac{zf'(z)}{pf(z)}\right|=\left|\frac{\sum_{n=j}^{\infty}(n+p)a_n z^{n+p}}{p+\sum_{n=j}^{\infty}pa_n z^{n+p}}\right|\le\frac{\sum_{n=j}^{\infty}(n+p)|a_n||z|^{n+p}}{p-\sum_{n=j}^{\infty}p|a_n||z|^{n+p}} \tag{13}$$

所以只要证当 $|z|<r_\zeta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$ 时

$$\frac{\sum_{n=j}^{\infty}(n+p)|a_n||z|^{n+p}}{p-\sum_{n=j}^{\infty}p|a_n||z|^{n+p}}\le 1-\zeta \tag{14}$$

则(12)式即得证。而(14)式等价于

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{n+2p-p\zeta}{p(1-\zeta)}|a_n||z|^{n+p}\le 1 \tag{15}$$

由于 $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，根据定理 1 有

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)}|a_n|\le 1$$

欲证(15)式，只需

$$\frac{n+2p-p\zeta}{p(1-\zeta)}|z|^{n+p}\le\frac{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)}$$

即

$$|z|\le\left\{\frac{p(1-\zeta)\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)(n+2p-p\zeta)}\right\}^{\frac{1}{n+p}}$$

至此定理结论得证。

定理 6 设 $f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{n=j}^{\infty}a_n z^n \in \sum_{p,j}$， $f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，那么 $f(z)$ 在 $|z|<r_\eta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$ 内是 η -级星象函数 $(0\le\eta<1)$，其中

$$r_\eta=\inf_{n\ge j}\left\{\frac{p(1-\eta)\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{n(B-A)(n+2p-p\eta)}\right\}^{\frac{1}{n+p}}$$

证明：根据凸函数的定义及(3)式，只需证对任意$|z|<r_\eta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$都有

$$\left|1+\frac{1}{p}+\frac{zf''(z)}{pf'(z)}\right|\le 1-\eta \tag{16}$$

由于

$$\left|1+\frac{1}{p}+\frac{zf'(z)}{pf(z)}\right|=\left|\frac{\sum_{n=j}^{\infty}n(n+p)a_nz^{n+p}}{-p+\sum_{n=j}^{\infty}npa_nz^{n+p}}\right|\le\frac{\sum_{n=j}^{\infty}n(n+p)|a_n||z|^{n+p}}{p-\sum_{n=j}^{\infty}np|a_n||z|^{n+p}}$$

所以只证当$|z|<r_\eta(A,B,a,c,p,\alpha,m;\lambda)$时，有

$$\frac{\sum_{n=j}^{\infty}n(n+p)|a_n||z|^{n+p}}{p-\sum_{n=j}^{\infty}np|a_n||z|^{n+p}}\le 1-\eta \tag{17}$$

而(17)式等价于

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{n(n+2p-p\eta)}{p(1-\eta)}|a_n||z|^{n+p}\le 1 \tag{18}$$

由于$f(z)\in\sum_{p,j}(a,c,A,B,\alpha,m;\lambda)$，根据定理1有

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)}|a_n|\le 1$$

所以(18)式成立，只要

$$\frac{n(n+2p-p\eta)}{p(1-\eta)}|z|^{n+p}\le\frac{\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{(B-A)}$$

即

$$|z|\le\left\{\frac{p(1-\eta)\phi_n(p,B,a,c,\alpha,m;\lambda)}{n(B-A)(n+2p-p\eta)}\right\}^{\frac{1}{n+p}}$$

证毕。

6. 致谢

感谢本文得到内蒙古自然科学基金资助项目(No. 2009MS0113)的支持。

参考文献 (References)

[1] J.-L. Liu. Properties of some families of meromorphic p-valent function. Japanese Journal of Mathematics, 2000, 52: 425-434.
[2] J.-L. Liu, H. M. Srivastava. A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2001, 259(2): 566-581.
[3] M. K. Aouf, H. Silverman and H. M. Srivatava. Some families of linear operators associated with certain subclasses of multivalent functions. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 55(3): 535-549.
[4] M. K. Aouf, R. M. El-Ashwah. Properties of certain subclass of meromorphic function with positive coefficients. Mathematical and Computer Modeling, 2009, 49(1-2): 868-879.
[5] J. Patel, N. E. Cho and H. M. Srivastava. Certain subclassed of multivalent functions associated with a family of linear operator. Mathematical and Computer Modeling, 2006, 43(3-4): 320-338.
[6] Y. G. Kim, S. H. Lee and S. Owa. On certain meromorphic functions with positive coefficients. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1993, 16(2): 409-412.