Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 123-130
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23020 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Fixed Points of the Solutions of Second Order Differential Equation and the Relationship with Small Functions

Xueqin Luo, Zongxuan Chen

Department of Mathematics, Huanan Normal University, Guangzhou
Email: qincai0602@126.com, chzx@vip.sina.com

Received: Apr. 5th, 2012; revised: Apr. 25th, 2012; accepted: May 9th, 2012

Abstract: In this paper, we study the second order differential equation: when f' with the same level of f coefficient and equal to one, the fixed points of the solutions of equation and the relationship with the small functions.

Keywords: Differential Equation; The Convergence Index; Small Function; The Fixed Point

二阶微分方程的解的不动点及与小函数的关系

罗雪琴，陈宗煊

华南师范大学数学科学学院，广州
Email: qincai0602@126.com, chzx@vip.sina.com

收稿日期：2012 年 4 月 5 日；修回日期：2012 年 4 月 25 日；录用日期：2012 年 5 月 9 日

摘 要：在本文中，我们研究了二阶微分方程：当 f'，f 的系数具有相同级且等于 1 时，方程的解的不动点以及解与小函数之间的关系。

关键词：微分方程；收敛指数；小函数；不动点

1. 引言与结果

在本文中，我们使用值分布论标准记号(见[1])。另外，使用 $\sigma(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的级，$\sigma_2(f)$ 表示 $f(z)$ 的超级，$\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数，$\bar{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的不同零点叙列的收敛指数。我们还使用 $\bar{\lambda}(f-\varphi)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 取小函数 φ 的点的收敛指数，$\bar{\lambda}_2(f-\varphi)$ 表示 $f(z)$ 取小函数 φ 的点的二级收敛指数，用 $\tau(f)$ 表示 $f(z)$ 的解的不动点的收敛指数，$\tau_2(f)$ 表示 $f(z)$ 的解的二级不动点的收敛指数。

关于二阶微分方程解的不动点问题，许多作者已有研究。当二阶微分方程中 $f(z)$ 的系数为多项式且次数大于等于 1 时，陈宗煊在文[2]中得到结论：

定理 A 假设 $P(z)$ 是多项式，次数 $\deg P(z)=n\geq 1$，那么微分方程

$$f''+P(z)f=0 \tag{1.1}$$

的所有非零解都有无穷多个不动点，且不动点的收敛指数满足 $\tau(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$。

在方程(1.1)的基础上，若 $P(z)$ 为超越亚纯函数，吕巍然在文[3]中证明了结论：

定理 B 假设 $P(z)$ 为超越亚纯函数且 $\delta(\infty,P)>0$，那么方程(1.1)的所有非零亚纯解 $f(z)$ 及其 f',f'' 有无穷

多个不动点，满足 $\tau(f)=\tau(f')=\tau(f'')=\sigma(f)=\infty$ 和 $\tau_2(f)=\tau_2(f')=\tau_2(f'')=\sigma_2(f)$。

关于解与小函数的关系问题，也有许多研究。当 f', f'' 的系数具有不同级或者具有相同级但是级不等于 1 时，考虑二阶微分方程

$$f''+A_1e^{az}f'+A_0e^{bz}f=0 \tag{1.2}$$

若 $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$，陈宗煊和孙光镐在文[4]中得到如下结果：

定理 C 假设 $A_j(z)\ (\not\equiv 0)\ (j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$。a,b 是复常数且满足 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq \arg b$ 或 $a=cb(0<c<1)$。如果 $\varphi(z)\ (\not\equiv 0)$ 是有限级整函数，那么方程(1.2)的每一个解 $f(z)\ (\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$。

定理 D 假设 $A_j(z),a,b$ 满足定理 C 的假设条件。假设 $d_j(z)(j=0,1,2)$ 是不全恒等于零的多项式，$\varphi(z)\ (\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数，如果 $f(z)\ (\not\equiv 0)$ 是方程(1.2)的任一整函数解，那么微分多项式 $g(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f$ 满足 $\overline{\lambda}(g-\varphi)=\infty$。

本文考虑二阶线性微分方程：

$$f''+P(z)f'+Q(z)f=0 \tag{1.3}$$

其中 $P(z),Q(z)$ 是整函数，满足

$$P(z)=a_z(z)e^{nz}+\cdots+a_1(z)e^z \tag{1.4}$$

$$Q(z)=b_s(z)e^{sz}+\cdots+b_1(z)e^z \tag{1.5}$$

$a_n(z)b_s(z)\not\equiv 0$，$a_n(z),\cdots,a_1(z)$，$b_s(z),\cdots,b_1(z)$ 是多项式，并且满足下面(1.6)式和(1.7)式。

$$a_j(z)=a_{jd_j}z^{d_j}+a_{j(d_j-1)}z^{d_j-1}+\cdots+a_{j1}z+a_{j0}\,(j=1,\cdots,n) \tag{1.6}$$

$$b_k(z)=b_{km_k}z^{m_k}+b_{k(m_k-1)}z^{m_k-1}+\cdots+b_{k1}z+b_{k0}\,(k=1,\cdots,s) \tag{1.7}$$

其中 $d_j\geq 0,m_k\geq 0(j=1,\cdots,n;k=1,\cdots,s)$ 均是整数，$a_{jd_j},a_{j(d_j-1)},\cdots,a_{j0}$；$b_{km_k},b_{k(km-1)},\cdots,b_{k0}$ 是常数，$a_{jd_j}\neq 0$，$b_{km_k}\neq 0$。

已有作者研究过此类方程，如文[5]。他们证明了：当 $n\neq s$ 时，方程(1.3)的每一个解 $f(z)\ (\not\equiv 0)$ 满足 $\sigma_2(f)=1$。而关于方程(1.3)的解的不动点以及解与小函数的关系尚未得到研究。本文中，作者研究了方程(1.3)的解的不动点以及与小函数的关系，得到下面的结论。

定理 1.1 假设 $P(z),Q(z)$ 满足(1.4)~(1.7)式，$f(z)$ 是方程~(1.3)的任一非零解，$\varphi(z)\ (\not\equiv 0)$ 是有限级整函数，且 $0<\varphi(z)<\min\{1,\sigma(f)\}$。那么有 $\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)=\overline{\lambda_2}(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$。

定理 1.2 假设 $P(z),Q(z)$ 满足(1.4)~(1.7)式，$d_0(z),d_1(z),d_2(z)$ 是不全恒等于零的多项式，$\varphi(z)\ (\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数，若 f 是方程(1.3)的任一无穷级解，那么微分多项式 $g(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f$ 满足 $\overline{\lambda_2}(g-\varphi)=\sigma_2(f)$。

若令小函数 $\varphi(z)=z$，则得到下面关于不动点的结论：

推论 1.3 假设 $P(z),Q(z)$ 满足(1.4)~(1.7)式，则方程(1.3)的每一个无穷级解 f 均有无穷多个不动点，即 $\tau(f)=\sigma(f)=\infty$。同时，所有不动点的二级收敛指数均等于 f 的超级，即 $\tau_2(f)=\sigma_2(f)$。

2. 为证明定理所需的引理

引理 2.1[6] 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\ (\not\equiv 0)$ 为有穷级亚纯函数。如果 $f(z)$ 是方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F$ 的一个无穷级亚纯函数解，那么 f 满足：$\lambda(f)=\overline{\lambda}(f)=\sigma(f)=\infty$。

引理 2.2[5] 假设 $a_n(z),\cdots,a_1(z),b_s(z),\cdots,b_1(z)$ 是多项式，并且具有(1.6)式和(1.7)式的形式，$a_n(z)b_s(z)\not\equiv 0$。

$P(z),Q(z)$满足(1.4)~(1.7)式，那么当$n\neq s$时，方程(1.3)的每一个解$f(z)$ $(\not\equiv 0)$满足$\sigma_2(f)=1$。

引理 2.3[5] 令亚纯函数$f_1,\cdots,f_2,\cdots,f_k$是方程$\omega^{(k)}+a_{k-1}\omega^{(k-1)}+\cdots+a_0\omega=0$的一组线性无关解，那么亚纯系数$a_j\left(j=0,\cdots,k-1\right)$满足性质：$m\left(r,a_j\right)=O\left(\log\left[\max\left(T\left(r,f_s\right):s=1,\cdots,k\right)\right]\right)$。

引理 2.4[4] 假设f是无穷级整函数，$d_j(z)(j=0,1,2)$是不全恒为零的多项式。那么$\omega(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f$具有无穷级。

3. 定理 1.1 的证明

假设f是方程(1.3)的任一非零解，令$g(z)=f(z)-\varphi(z)$，那么$\sigma_2(g)=\sigma_2(f),\overline{\lambda_2}(g)=\overline{\lambda_2}(f-\varphi)$。由(1.3)式得$g''+Pg'+Qg=-(\varphi''+P\varphi'+Q\varphi)$。显然$\varphi''+P\varphi'+Q\varphi\not\equiv 0$。否则，$\varphi$是方程(1.3)的一个解，这与$\sigma(\varphi)<\sigma(f)$矛盾。故有：

$$\frac{1}{g}=\frac{-1}{\varphi''+P\varphi'+Q\varphi}\left(\frac{g''}{g}+P\frac{g'}{g}+Q\right) \tag{2.1}$$

所以

$$m\left(r,\frac{1}{g}\right)\leq m\left(r,\frac{-1}{\varphi''+P\varphi'+Q\varphi}\right)+m\left(r,\frac{g''}{g}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+m(r,P)+m(r,Q)+C_1 \tag{2.2}$$

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)\leq N\left(r,\frac{-1}{\varphi''+P\varphi'+Q\varphi}\right)+3\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+C_2 \tag{2.3}$$

由(2.2)，(2.3)式可得

$$T(r,P)=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+c\leq T\left(r,\frac{-1}{\varphi''+P\varphi'+Q\varphi}\right)+3\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+m\left(r,\frac{g''}{g}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+m(r,P)+m(r,Q)+C_3 \tag{2.4}$$

因为$m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)\leq C\log\left(rT(r,g)\right)$，除去一个线测度为有穷的集合$E\subset[0,\infty)$。所以有

$$T(r,g)\leq T\left(r,\frac{-1}{\varphi''+P\varphi'+Q\varphi}\right)+3\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2C\log\left(rT(r,g)\right)+m(r,P)+m(r,Q)+C_4 \tag{2.5}$$

故：$\sigma_2(g)\leq\overline{\lambda_2}(g)$。所以$\sigma_2(g)=\overline{\lambda_2}(g)$。即：$\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\sigma_2(f)$。

又令$h(z)=f'(z)-\varphi(z),d(z)=f''(z)-\varphi(z)$，那么$\sigma_2(h)=\sigma_2(d)=\sigma_2(f)$，$\overline{\lambda_2}(h)=\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)$，$\overline{\lambda_2}(d)=\overline{\lambda_2}(f''-\varphi)$。对方程(1.3)两边微分，由$f'''=h''+\varphi''$, $f''=h'+\varphi'$, $f'=h+\varphi$, $f=-\frac{f''+Pf'}{Q}$得到：

$$h''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)h'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)h=-\left(\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi\right)。$$

下面验证$\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi\not\equiv 0$。令$F=\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi$，由于$\sigma(\varphi)<1$，我们分以下三种情况讨论。

1) 当$n>s$时，$F=\left[\varphi'+(n-s)\varphi\right]a_{nd_n}z^{d_n}e^{nz}\left(1+\circ(1)\right)$。若$\varphi'+(n-s)\varphi\equiv 0$，则$\varphi=e^{(s-n)z}+c_1$。所以就有$\sigma(\varphi)=1$，与$\sigma(\varphi)<1$矛盾。故$\varphi'+(n-s)\varphi\not\equiv 0$。又$a_{nd_n}\neq 0$，所以$F\not\equiv 0$。

2) 当$n=s$时，$F=\left\lfloor a_{nd_n}z^{d_n}\varphi'+b_{sm_s}z^{m_s}\varphi\right\rfloor e^{nz}\left(1+\circ(1)\right)$。若$a_{nd_n}z^{d_n}\varphi'+b_{sm_s}z^{m_s}\varphi\equiv 0$，则

$$\varphi=\begin{cases} e^{-\frac{b_{sm_s}z^{m_s-d_n+1}}{a_{nd_n}(m_s-d_s+1)}+c_2} & (m_s-d_n\neq -1) \\ e^{c_3}z^{-\frac{b_{sm_s}}{a_{nd_n}}} & (m_s-d_n=-1)\end{cases}$$

那么有 $\sigma(\varphi)=0$ 或 $\sigma(\varphi)\geq 1$，与 $0<\sigma(\varphi)<1$ 矛盾。所以 $a_{nd_n}z^{d_n}\varphi'+b_{sm_s}z^{m_s}\varphi\not\equiv 0$。于是 $F\not\equiv 0$。

3) 当 $n<s$ 时，$F=b_{sm_s}z^{m_s}e^{nz}\varphi(1+\circ(1))$。因为 $b_{sm_s}\neq 0,\varphi\not\equiv 0$，所以 $F\not\equiv 0$。

综上而得：$\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi\not\equiv 0$。故有

$$\frac{1}{h}=\frac{-1}{\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi}\left(\frac{h''}{h}+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\frac{h'}{h}+P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right) \tag{2.6}$$

又 $f''=d+\varphi, f'''=d'+\varphi', f^{(4)}=d''+\varphi''$。用上面类似的方法可以验证 $PQQ'-Q^3-P'Q^2\not\equiv 0$。再由方程(1.3)得

$$f=\frac{PQd'+\left(P^2Q-P'Q-Q^2\right)d+PQ\varphi'+\left(P^2Q-P'Q-Q^2\right)\varphi}{PQQ'-Q^3-P'Q^2}, \tag{2.7}$$

$$f'=\frac{Qd'+\left(PQ-Q'\right)d+Q\varphi'+\left(PQ-Q'\right)\varphi}{PQ'-Q^2-P'Q}. \tag{2.8}$$

对方程(1.3)两边进行两次微分得

$$f^{(4)}+Pf'''+\left(2P'+Q\right)f''+\left(P''+2Q'\right)f'+Q''f=0 \tag{2.9}$$

将 $f,f',f'',f''',f^{(4)}$ 代入(2.9)式中得到

$$d''+\alpha d'+\beta d=-\left(\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi\right) \tag{2.10}$$

其中

$$\alpha=\frac{P^2QQ'-PQ^3-PP'Q^2+PQQ''+P''Q^2+2Q'Q^2}{PQQ'-Q^3-P'Q^2}$$

$$\beta=\frac{2PP'QQ'-2P'Q^3-2P'^2Q^2+PP''Q^2-P''QQ'+2PQ'Q^2-2QQ'^2+P^2QQ''-P'QQ''-Q^2Q''}{PQQ'-Q^3-P'Q^2}$$

接下来验证 $\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi\not\equiv 0$。令 $I=\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi$，分以下三种情况：

情况 1：$n>s$ 时，此时 $I=\left(\varphi'+\frac{s^2-n^2+2ns}{s-n}\varphi\right)a_{nd_n}z^{d_n}e^{nz}\left(1+\circ(1)\right)$。若 $\varphi'+\frac{s^2-n^2+2ns}{s-n}\varphi\not\equiv 0$，则 $\varphi=e^{\frac{s^2-n^2+2ns}{s-n}z+c_4}$。那么有 $\sigma(\varphi)=1$，与 $\sigma(\varphi)<1$ 矛盾。所以 $\varphi'+\frac{s^2-n^2+2ns}{s-n}\varphi\not\equiv 0$。又 $a_{nd_n}\neq 0$，所以 $I\not\equiv 0$。

情况 2：$n=s$ 时，此时 $I=\left(\varphi'-\frac{a_{nd_n}}{b_{sm_s}}\left(n^2+s^2\right)z^{d_z-m_s}\varphi\right)a_{nd_n}z^{d_n}e^{nz}\left(1+\circ(1)\right)$。若 $\varphi'-\frac{a_{nd_n}}{b_{sm_s}}\left(n^2+s^2\right)z^{d_z-m_s}\varphi\equiv 0$，则

$$\varphi=\begin{cases} e^{\frac{a_{nd_n}\left(n^2+s^2\right)z^{d_n-m_s+1}}{b_{sm_s}(d_n-m_s+1)}+c_5} & (d_n-m_s\neq -1) \\ e^{c_6}z^{\frac{a_{nd_n}\left(n^2+s^2\right)}{b_{sm_s}}} & (d_n-m_s=-1)\end{cases}$$

于是有 $\sigma(\varphi)=0$ 或 $\sigma(\varphi)\ge 1$，均与 $0<\sigma(\varphi)<1$ 矛盾。所以 $\varphi'-\frac{a_{nd_n}}{b_{sm_s}}\left(n^2+s^2\right)z^{d_z-m_s}\varphi \not\equiv 0$。又 $a_{nd_n}\ne 0$，所以 $I\not\equiv 0$。

情况 3： $n<s$ 时，此时 $I=\left(\varphi'+2(n-s)\varphi\right)a_{nd_n}z^{d_n}e^{nz}\left(1+\circ(1)\right)$。若 $\varphi'+2(n-s)\varphi\equiv 0$，则 $\varphi=e^{2(s-n)z+c_7}$。故有 $\sigma(\varphi)=1$，与 $\sigma(\varphi)<1$ 矛盾。所以 $\varphi'+2(n-s)\varphi\not\equiv 0$。而 $a_{nd_n}\ne 0$，于是有 $I\not\equiv 0$。

综上而得：$\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi\not\equiv 0$。于是我们得到：

$$\frac{1}{d}=\frac{-1}{\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi}\left(\frac{d''}{d}+\alpha\frac{d'}{d}+\beta\right) \tag{2.11}$$

对(2.6)，(2.11)式运用类似于(2.2)~(2.5)式的方法，可以得到：

$$\begin{aligned} T(r,h)\le{}& T\left(r,\frac{-1}{\varphi''+\left(P-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(P'+Q-\frac{PQ'}{Q}\right)\varphi}\right)+3\overline{N}\left(r,\frac{1}{H}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q}\right)\\ &+2C\log\left(rT(r,h)\right)+2m(r,P)+m(r,Q)+m(r,P')+2m\left(r,\frac{Q'}{Q}\right)+C_5 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$T(r,d)\le T\left(r,\frac{-1}{\varphi''+\alpha\varphi'+\beta\varphi}\right)+3\overline{N}\left(r,\frac{1}{d}\right)+2C\log\left(rT(r,d)\right)+T(r,\alpha)+T(r,\beta)+C_6 \tag{2.13}$$

其中 $C,C_i,c,c_i\ (i=1,\cdots,7)$ 均为常数。所以 $\sigma_2(h)\le\overline{\lambda_2}(h),\sigma_2(d)\le\overline{\lambda_2}(d)$。故 $\sigma_2(h)=\overline{\lambda_2}(h),\sigma_2(d)=\overline{\lambda_2}(d)$。即：$\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)=\overline{\lambda_2}(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$。

特别地，当 $n\ne s$ 时，由引理 2.2 可以得到 $\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)=\overline{\lambda_2}(f''-\varphi)=\sigma_2(f)=1$。

4. 定理 1.2 的证明

考虑方程(1.3)，$P(e^z),Q(e^z)$ 中至少有一个是超越亚纯函数，故由引理 2.3，方程(1.3)至少有一个无穷级解。假设 f 是方程(1.3)的一个无穷级解。

情况 1： 假设 $d_2\not\equiv 0$。令 $\omega(z)=g(z)-\varphi(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f-\varphi$。由于 $\sigma(f)=\infty$，故由引理 2.4，$\sigma(\omega)=\sigma(g)=\sigma(f)=\infty$。要证明 $\overline{\lambda}(g-\varphi)=\infty$，只要证明 $\overline{\lambda}(\omega)=\infty$。由方程(1.3)得到：$f''=-Pf'-Qf$，代入 $\omega(z)$ 得到：

$$\omega(z)=\left(d_1-d_2P\right)f'+\left(d_0-d_2Q\right)f-\varphi \tag{3.1}$$

对(3.1)式两边微分得到：

$$\omega'(z)=\left(d_1-d_2P\right)f''+\left(d_1'-d_2'P-d_2P'+d_0-d_2Q\right)f'+\left(d_0'-d_2'Q-d_2Q'\right)f-\varphi'$$

将 f'' 代入上式中即有：

$$\omega'(z)=\left(d_1'-d_2'P-d_2P'+d_0-d_2Q-d_1P+d_2P^2\right)f'+\left(d_0'-d_2'Q-d_2Q'-d_1Q+d_2PQ\right)f-\varphi' \tag{3.2}$$

令

$$\alpha_0=d_1-d_2P,\beta_0=d_0-d_2Q,\alpha_1=d_1'-d_2'P-d_2P'+d_0-d_2Q-d_1P+d_2P^2,$$
$$\beta_1=d_0'-d_2'Q-d_2Q'-d_1Q+d_2PQ,H=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1.$$

由 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ 的表达式可得：$H=\left(d_2^2P'Q+d_2^2Q^2+d_0d_2P^2-d_2^2PQ'-d_1d_2PQ\right)\left(1+\circ(1)\right)$。下面验证 $H\not\equiv 0$。分以下三种情况：

1) 当 $n>s$ 时，若 $d_0\not\equiv 0$，则 $H=d_0d_2P^2\left(1+\circ(1)\right)\not\equiv 0$。若 $d_0\equiv 0$，则：

$$H=\left(d_2^2P'Q-d_2^2PQ'-d_1d_2PQ\right)\left(1+\circ(1)\right)$$
$$=\left(d_nd_2+nd_2z-d_2m_s-sd_2z-d_1z\right)d_2a_{nd_n}b_{sm_s}z^{d_n+m_s-1}e^{(n+s)z}\left(1+\circ(1)\right)$$

由于 $d_2\not\equiv 0$， $a_{nd_n}\neq 0,b_{sm_s}\neq 0$，所以 $H\not\equiv 0$。故当 $n>s$ 时， $H\not\equiv 0$。

2) 当 $n=s$ 时，则

$$H=\left(d_2^2P'Q+d_2^2Q^2+d_0d_2P^2-d_2^2PQ'-d_1d_2PQ\right)\left(1+\circ(1)\right)$$
$$=\left(d_nd_2+nzd_2+\frac{d_2b_{sm_s}z^{m_s-d_n+1}}{a_{nd_n}}+\frac{d_0a_{nd_n}z^{d_n-m_s+1}}{b_{sm_s}}-d_2m_s-szd_2-d_1z\right)d_2a_{nd_n}b_{sm_s}z^{d_n+m_s-1}e^{(n+s)z}\left(1+\circ(1)\right)$$

同样地，由于 $d_2\not\equiv 0$， $a_{nd_n}\neq 0,b_{sm_s}\neq 0$，所以 $H\not\equiv 0$。

3) 当 $n<s$ 时，则 $H=d_2^2Q^2\left(1+\circ(1)\right)$。显然， $H\not\equiv 0$。综上而得： $H\not\equiv 0$。

由(3.1)，(3.2)式得：

$$f=\frac{1}{H}\left[\alpha_1(\omega+\varphi)-\alpha_0(\omega'+\varphi')\right] \tag{3.3}$$

$$f'=\frac{1}{H}\left[\beta_1(\omega+\varphi)-\beta_0(\omega'+\varphi')\right] \tag{3.4}$$

对(3.4)式两边微分得到：

$$f''=\frac{1}{H^2}\left[-\beta_0H(\omega''+\varphi'')+\left(H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0\right)(\omega'+\varphi')+\left(\beta_1'H-H'\beta_1\right)(\omega+\varphi)\right] \tag{3.5}$$

将(3.3)，(3.4)，(3.5)式代入方程(1.3)中得到：

$$\frac{-\beta_0}{H}\omega''+\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2}\omega'+\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2}\omega$$
$$=-\left[\frac{-\beta_0}{H}\varphi''+\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2}\varphi'+\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2}\varphi\right] \tag{3.6}$$

下面证明 $\frac{-\beta_0}{H}\varphi''+\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2}\varphi'+\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2}\varphi\not\equiv 0$。也就是证明

$$-\beta_0H\varphi''+\left(H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0\right)\varphi'+\left(\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1\right)\varphi\not\equiv 0 \tag{3.7}$$

考虑(3.7)式不等号左边 e^z 次数的最高项。

1) $n>s$ 时， e^z 次数的最高项为：$\left(PH\beta_1-QH\alpha_1\right)\varphi$。此式中 e^z 的最高次数为 e^{4nz}，最高次数项的系数为：

$$\left(-a_{nd_n}^4b_{sm_s}^2d_2^3z^{4d_n+2m_s}e^{2sz}-2a_{nd_n}^4b_{sm_s}d_2^2z^{4d_n+m_s}e^{sz}-a_{nd_n}^4b_{sm_s}^2d_2^4z^{4d_n+2m_s}e^{2sz}\right)\varphi \tag{3.8}$$

即： $-a_{nd_n}^4b_{sm_s}d_2^2z^{4d_n+m_s}e^{sz}\varphi\left(b_{sm_s}d_2z^{m_s}e^{sz}+b_{sm_s}d_2^2z^{m_s}e^{sz}+2\right)$。

因为 $a_{nd_n}\neq 0,b_{sm_s}\neq 0$， $d_2\not\equiv 0$， $\varphi\not\equiv 0$，所以(3.8)式不恒等于零，故(3.7)式不恒等于零。

2) $n<s$ 时， e^z 次数的最高项为： $-Q\alpha_1^2\beta_0\varphi$。此式中 e^z 的最高次数为 e^{4sz}，最高次数项的系数为：

$$-b_{sm_s}d_2^2z^{m_s}b_{sm_s}^2\left(-d_2\right)z^{2m_s}b_{sm_s}z^{m_s}\varphi \tag{3.9}$$

即： $b_{sm_s}^4d_2^3z^{4m_s}\varphi$。因为 $b_{sm_s}\neq 0$， $d_2\not\equiv 0$， $\varphi\not\equiv 0$，所以(3.9)式不恒等于零，故(3.7)式不恒等于零。

3) $n=s$ 时， e^z 次数的最高项为：$\left(PH\beta_1-QH\alpha_1\right)\varphi$。此式中 e^z 的最高次数为 e^{4nz}，最高次数项的系数为：

$$\left(-a_{nd_n}^4b_{sm_s}^2d_2^3z^{4d_n+2m_s}e^{2sz}-2a_{nd_n}^4b_{sm_s}d_2^2z^{4d_n+m_s}e^{sz}-a_{nd_n}^4b_{sm_s}^2d_2^4z^{4d_n+2m_s}e^{2sz}\right)\varphi \tag{3.10}$$

即： $-a_{nd_n}^4b_{sm_s}d_2^2z^{4d_n+m_s}e^{sz}\varphi\left(b_{sm_s}d_2z^{m_s}e^{sz}+b_{sm_s}d_2^2z^{m_s}e^{sz}+2\right)$。

因为 $a_{nd_n}\neq 0,b_{sm_s}\neq 0$，$d_2\not\equiv 0$，$\varphi\not\equiv 0$，所以(3.10)式不恒等于零，故(3.7)式不恒等于零。综上可得(3.7)式不恒等于零。

情况 2：假设 $d_2\equiv 0$，$d_1\not\equiv 0$，$d_0\not\equiv 0$。此时，$\alpha_0=d_1,\alpha_1=d_1'-d_1P+d_0,\beta_0=d_0,\beta_1=d_0'-d_1$。采用上述类似方法也可以证得(3.7)式不恒等于零。

情况 3：假设 $d_2\equiv 0$，$d_1\equiv 0$，$d_0\not\equiv 0$。或者 $d_2\equiv 0$，$d_0\equiv 0$，$d_1\not\equiv 0$。同样采用上述类似方法即可证明(3.7)式不恒等于零。

令 $G=-\left[\frac{-\beta_0}{H}\varphi''+\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2}\varphi'+\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2}\varphi\right]$，由(3.6)式可以得到：

$$\frac{1}{\omega}=\frac{-\beta_0}{HG}\frac{\omega''}{\omega}+\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2G}\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2G} \tag{3.11}$$

对(3.11)式运用类似于(2.2)~(2.5)式的方法可以得到：

$$\begin{aligned}T(r,\omega)\le 3\overline{N}\left(r,\frac{1}{\omega}\right)+2C\log\left(rT(r,\omega)\right)+T\left(r,\frac{-\beta_0}{HG}\right)\\+T\left(r,\frac{H\beta_1-H\beta_0'+H'\beta_0-PH\beta_0}{H^2G}\right)+T\left(r,\frac{\beta_1'H-H'\beta_1+HQ\beta_1}{H^2G}\right)+c\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 C,c 均为常数。所以 $\sigma_2(\omega)\le\overline{\lambda_2}(\omega)$。故 $\sigma_2(\omega)=\overline{\lambda_2}(\omega)$。也就是 $\overline{\lambda_2}(g-\varphi)=\sigma_2(g)=\sigma_2(f)$。自然地，$\overline{\lambda}(g-\varphi)=\sigma(f)=\infty$。

5. 推论 1.3 的证明

若小函数 $\varphi=z$，则转化为不动点问题。

假设 f 是方程(1.3)的一个无穷级解，令 $g(z)=f(z)-z$，那么 $\sigma(g)=\sigma(f),\overline{\lambda}(g)=\tau(f)$。(1.3)式则化为下式：

$$g''+Pg'+Qg=-P-Qz \tag{4.1}$$

对于(4.1)式我们只需证明 $P+Qz\not\equiv 0$。由(1.4)~(1.7)式得

$$\begin{aligned}P+Qz=&\left(a_{nd_n}z^{d_n}+a_{n(d_n-1)}z^{d_n-1}+\cdots+a_{n1}z+a_{n0}\right)e^{nz}\\&+\cdots+\left(a_{1d_1}z^{d_1}+a_{1(d_1-1)}z^{d_1-1}+\cdots+a_{10}\right)e^{z}\\&+\cdots+\left(b_{sm_s}z^{m_s+1}+b_{s(m_s-1)}z^{m_s}+\cdots+b_{s0}z\right)e^{sz}\\&+\cdots+\left(b_{1m_1}z^{m_1+1}+b_{1(m_1-1)}z^{m_1}+\cdots+b_{10}z\right)e^{z}\end{aligned} \tag{4.2}$$

对(4.2)式考虑 e^z 次数的最高项。

当 $z\neq 0$ 时，我们分以下三种情况：

1) $n>s$ 时，(4.2)式中 e^z 次数的最高项为 $\left(a_{nd_n}z^{d_n}+a_{n(d_n-1)}z^{d_n-1}+\cdots+a_{n1}z+a_{n0}\right)e^{nz}$。由于 $a_{jd_j}\neq 0\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，故 $\left(a_{nd_n}z^{d_n}+a_{n(d_n-1)}z^{d_n-1}+\cdots+a_{n1}z+a_{n0}\right)e^{nz}\not\equiv 0$。所以 $P+Qz\not\equiv 0$。

2) $n<s$ 时，(4.2)式中 e^z 次数的最高项为 $\left(b_{sm_s}z^{m_s+1}+b_{s(m_s-1)}z^{m_s}+\cdots+b_{s0}z\right)e^{sz}$。由于 $b_{im_i}\neq 0\left(i=1,2,\cdots,s\right)$，故 $\left(b_{sm_s}z^{m_s+1}+b_{s(m_s-1)}z^{m_s}+\cdots+b_{s0}z\right)e^{sz}\not\equiv 0$。所以 $P+Qz\not\equiv 0$。

3) $n=s$ 时，(4.2)式中 e^z 次数的最高项为 $\left(a_{nd_n}z^{d_n}+a_{n(d_n-1)}z^{d_n-1}+\cdots+a_{n1}z+a_{n0}+b_{sm_s}z^{m_s+1}+b_{s(m_s-1)}z^{m_s}+\cdots+b_{s0}z\right)e^{sz}$。由于 $a_{jd_j}\neq 0\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

$b_{im_i} \neq 0\left(i=1,2,\cdots,s\right)$，所以$\left(a_{nd_n}z^{d_n}+a_{n(d_n-1)}z^{d_n-1}+\cdots+a_{n1}z+a_{n0}+b_{sm_s}z^{m_s+1}+b_{s(m_s-1)}z^{m_s}+\cdots+b_{s0}z\right)e^{sz}\not\equiv 0$。故$P+Qz\not\equiv 0$。当$z=0$时，$P+Qz=P\not\equiv 0$。

综上可得$P+Qz\not\equiv 0$。由引理2.1得$\overline{\lambda}(g)=\sigma(g)$。即$\tau(f)=\sigma(f)=\infty$。又由定理1.1可知$\tau_2(f)=\sigma_2(f)$。特别地，当$n\neq s$时，有$\tau_2(f)=\sigma_2(f)=1$[7-11]。

6. 致谢

本人衷心感谢陈宗煊老师的悉心指导，同时感谢提供参考论文的各位作者。

参考文献 (References)

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
[2] 陈宗煊, 二阶复域微分方程解的不动点与超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.
[3] 王王君, 吕巍然. 二阶线性微分方程亚纯解的不动点与超级[J]. 应用数学学报, 2004, 27(1): 72-80.
[4] 陈宗煊, 孙光镐. 一类二阶微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学年刊, 2006, A27: 431-442.
[5] Z.-X. Chen, K. H. Shon. The hyper order of solutions of second order differential equations and subnormal solutions of periodic equations. Taiwanses Journal of Mathematics, 2010, 14(2): 611-628.
[6] Z.-X. Chen. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations. Analysis, 1994, 14: 425-438.
[7] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
[8] W. K. Hayman. Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[9] I. Laine. Nevanlinna theory and complex differential equations. Berlin: W. de Gruyter, 1993.
[10] 徐峻峰, 仪洪勋. 微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学学报, 2010, 53(2): 291-296.
[11] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数的唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

