Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 131-137
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23021 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

New Kadison-Singer Lattices in Matrix Algebras*

Gaijuan Chen#, Yuanhong Ren, Ning Wang, Qian Liu

College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing
Email: #qingche009@163.com

Received: Apr. 17th, 2012; revised: Apr. 29th, 2012; accepted: May 15th, 2012

Abstract: For given Kadison-Singer lattices in matrix algebras $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$ and $\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$ which is generated by a maximal nest and rank 1 operator determined by a separating vector, the paper constructs new Kadison-Singer lattices in $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ and $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ which generate the full matrix algebras $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ and $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ respectively.

Keywords: Kadison-Singer Lattice; Matrix Algebra; Kadison-Singer Algebra; von Neumann Algebra

矩阵代数中一类新的 Kadison-Singer 格*

陈改娟#，任院红，王　宁，刘　倩

重庆师范大学数学学院，重庆
Email: #qingche009@163.com

收稿日期：2012 年 4 月 17 日；修回日期：2012 年 4 月 29 日；录用日期：2012 年 5 月 15 日

摘　要：本文在矩阵代数$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$和$\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$中由一个极大套和由一个分离向量决定的秩 1 投影生成的 Kadison-Singer 格及 Kadison-Singer 代数的基础上，将该类投影分别嵌入到矩阵代数$\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$与$\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$中，构造出了生成$\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$与$\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$的 Kadison-Singer 格并计算出了相应的 Kadison-Singer 代数。

关键词：Kadison-Singer 格；矩阵代数；Kadison-Singer 代数；von Neumann 代数

1. 引言和基本概念

von Neumann 代数理论作为自伴算子代数理论的主要研究对象已成为现代数学的重要研究领域。相对于自伴算子代数，非自伴算子代数理论主要研究对象有套代数、三角代数和自反代数等非常重要的代数，其引入有界线性算子的结构，如与不变子空间问题的研究密切相关。在文献[1,2]中，葛力明、袁巍将三角性，自反性和 von Neumann 代数的性质融入在一起。引入了一类新的非自伴算子代数，称之为 Kadison-Singer 代数，简称 KS 代数[1,2]。非平凡的 KS 代数是一类非自伴算子代数，并且相对于其“对角”是极大自反的。KS 代数与 von Neumann 代数之间的联系是通过不变投影格体现的[3]。这些投影的子空间是不变的，此投影格是自反的,一般在有限维空间中通过分配格研究其自反性[4]。而它在生成 KS 代数的对角换位子的意义下具有“极小性”[5]。因此，KS 代数具有三角代数，自反代数和 von Neumann 代数的特点，KS 代数中不变子空间投影格反应了 KS 代数与 von Neumann 代数的关系。

在文献[3]中，Hou C. J.证明了可分希尔伯特空间上套在秩 1 投影下 P_ξ (P_ξ 为套代数的核的分离向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所决定的秩 1 投影)下的单点扩张 L 是 KS 格。在文献[5]中，董瑗菊等证明了在相似意义下 $L\left(L\subset M_2(C)\right)$ 是生成 $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$

*资助信息：重庆市自然科学基金(编号：2010BB9318)和重庆师范大学基金编号(编号：10XLZ001)资助项目。
#通讯作者。

的唯一 KS 格；生成 $\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$ 的每个 KS 格都相似于 L_0 或 $I\text{-}L_0$，且 L_0 是单点扩张下生成 $\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格。鉴于此，本文在此基础上，通过由生成 $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格构造了另一类生成 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，并加以证明。

令 H 为可分复希尔伯特空间，$B(H)$ 为 H 上的有界线性算子的全体，然而 $B(H)$ 是 Banach 代数。$P(B(H))$ 为 $B(H)$ 上的全体投影构成的集合。本文将不区分 H 上的正交投影和与相应的闭子空间。设 $S\subset B(H)$，记 S 的不变投影格为 $Lat(S)=\{P\in P(B(H)):(I-P)AP=0,\forall A\in S\}$。其在强算子拓扑下是闭的。对于 $B(H)$ 中的正交投影集 L，我们用 $\mathrm{Alg}(L)=\{A\in B(H):(I-P)AP=0,\forall P\in L\}$ 来表示保持 L 中的每个投影都不变的有界线性算子全体形成的代数，它是弱算子拓扑下 $B(H)$ 的闭子代数。一般地，我们总有 $L\subset Lat(\mathrm{Alg}(L))$ 和 $S\subset \mathrm{Alg}(Lat(S))$。

定义 1.1 设 L 是一个子空间格，如果 L 满足 $L=Lat(\mathrm{Alg}(L))$，则称 L 是自反投影格，简称 L 是自反的。如果 $B(H)$ 中的代数 A 满足 $A=\mathrm{Alg}(Lat(A))$，则称 A 是自反代数，简称 A 是自反的[1,2]。

定义 1.2 对于 $B(H)$ 的子集 A，称 $A'=\{B\in B(H):AB=BA,\forall A\in A\}$ 为 A 在 $B(H)$ 中的交换子。A 的二次交换子 A'' 是 A' 的交换子，即 $A''=(A')'$。

定义 1.3 若 $B(H)$ 的子代数 A 满足：1) A 是自反代数；2) 如果 $B(H)$ 的自反子代数 B 包含 A，即 $A\subset B$，并且有 $B\cap B^*=A\cap A^*$，那么 $A=B$，则称 A 为 Kadison-Singer 代数(或 KS 代数)。若 KS 代数 A 的对角子代数 $(A^*\cap A)$ 是个因子，则称 A 为 Kadison-Singer 因子(或 KS 因子)。若 $B(H)$ 中的投影格 L 是生成 von Neumann 代数 L'' 的极小自反格，等价于，L 是自反的，且 $\mathrm{Alg}(L)$ 是 KS 代数，则称 L 为 Kadison-Singer 格(或 KS 格)[1,2]。

定义 1.4 设 L 是 $B(H)$ 上的子空间格，$E\in L$。定义：1) $F_-=\vee\{M\in L:F\not\leq M\}$，$0_-=0$；2) $E_\#=\vee\{F\in L:E\not\leq F_-\}$。总有 $E_\#\leq E$ 恒成立[6]。

本文中 I_n 表示 n 阶单位阵，在不引起混淆时，简记为 I。令 $\boldsymbol{C}_n$ 表示 n 维列向量的全体，用 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 表示 $\boldsymbol{C}_n$ 中的列向量。并引入矩阵代数 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 中的矩阵单位系统，用 $E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$ 表示 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 的标准矩阵单位，即 E_{ij} 是第 i 行第 j 列的元素赋值为 1，其余位置赋值为 0 的 n 阶方阵。在第 2 节、第 3 节分别讨论 4 阶与 6 阶矩阵代数中的 KS 格，即 $n=4$ 和 $n=6$ 型矩阵。

引理 1.1 设 L 是 $B(H)$ 上的一个有限投影格，则 L 为完全分配格等价于 $\forall E\in L,E=E_\#$ [6]。

引理 1.2 设 V 是无限域上的有限维向量空间，L 是 V 的子空间的有限格，那么，L 是自反的当且仅当 L 是分配格 [4]。

引理 1.3 若 L 是分配格，则 L 的子格也是分配格[7]。

例 1.1 若 $L=\left\{0_2,I_2,E_{11},\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}E_{ij}\right\}$，则 L 是生成 $M_2(C)$ 的唯一 KS 格，从而 $\mathrm{Alg}(L)$ 是 KS 代数。并且 $\mathrm{Alg}(L)=\left\{\begin{pmatrix}a & b-a\\ 0 & b\end{pmatrix}:a,b\in C\right\}$ [5]。

例 1.2 若 $L=\left\{0_3,I_3,E_{11},\sum_{i=1}^{2}E_{ii},\sum_{i,j=1}^{3}E_{ij},E_{11}+\sum_{i,j=2}^{3}\frac{1}{2}E_{ij}\right\}$，则 L 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$ 的 KS[5]格。

2. 矩阵代数 $M_4(C)$ 中的 Kadison-Singer 格

我们在例 1.1 的基础上构造了由 $\left\{\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}:P\in L(\subset M_2(C))\right\}$ 和 P_ξ (P_ξ 是分离向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,-1,0)^T$ 决定的秩 1 投影)生成的投影格，研究此投影格生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格的成立性。下面给出重要结论及证明。

命题 2.1 在 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 中，设投影格 $L=\{0,I,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\}$，其中

$$P_1=E_{11},\ P_2=\sum_{i=1}^{2}E_{ii},\ P_3=\sum_{i=1}^{3}E_{ii},\ P_4=\sum_{i=1}^{2}E_{ii}+\sum_{i,j=3}^{4}\frac{1}{2}E_{ij},\ P_5=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}E_{ij},$$

$$P_6=\frac{E_{11}-E_{13}-E_{31}+E_{33}}{2},\ P_7=E_{11}+E_{33},\ P_8=\frac{2\sum_{i=1}^{3}E_{ii}+E_{12}-E_{13}+E_{21}+E_{23}-E_{31}+E_{32}}{3},$$

则 L 是自反格。

证明：由引理 1.2 知，要证 L 是自反的，只需证 L 是分配格。根据定义 1.4 得

$$P_{1\_}=P_8,\ P_{2\_}=P_3,\ P_{3\_}=I,\ P_{4\_}=P_3,\ P_{5\_}=P_7,\ P_{6\_}=P_4,\ P_{7\_}=I,\ P_{8\_}=I,\ I_\_=I,\ 0_\_=0.$$

则

$$P_{1\#}=\vee\{0,P_1\}=P_1,\ P_{2\#}=\vee\{0,P_1,P_5\}=P_2,\ P_{3\#}=\vee\{0,P_1,P_5,P_6\}=P_3,\ P_{4\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_4,P_5\}=P_4,$$

$$P_{5\#}=\vee\{0,P_5\}=P_5,\ P_{6\#}=\vee\{0,P_6\}=P_6,\ P_{7\#}=\vee\{0,P_1,P_6\}=P_7,\ P_{8\#}=\vee\{0,P_5,P_6\}=P_8,\ I_\#=I,\ 0_\#=0.$$

由引理 1.1 得 L 是分配格，根据引理 1.2 可知 L 是自反格。

命题 2.2 在 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 中，设投影格 $L_0=\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_8\}(L_0\subset L)$，其中 P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_8 均是命题 2.1 中所对应的投影，则 L_0 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $A\lg(L_0)$ 是 KS 代数。

证明：先证自反性。根据引理 1.3、命题 2.1 可知 L_0 是分配格。从而 L_0 是自反的。

再计算 $A\lg(L_0)=\{A\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):(I-P)AP=0,\forall P\in L_0\}$。设 $A=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$，取 $P_i\in L_0$，根据 $(I-P_i)AP_i=0(i=2,3,4,5,6,8)$，得到 $a_{4j}=0(j=1,2,3)$，$a_{3j}=0(j=1,2)$，$a_{21}=a_{23}$ 及 $a_{11}-a_{13}=a_{33}$，$a_{33}+a_{34}=a_{44}$，$a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}$。所以

$$A\lg(L_0)=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{11}-a_{33}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{21}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{44}-a_{33}\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix}:\begin{array}{c}a_{21},a_{ij}\in C,1\le i<j\le 4,\\a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}\end{array}\right\}$$

因此，$L_0'=CI,\ L_0''=\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$。

下证极小性。令 M 为主对角线上元素相等的 2 阶复对称方阵全体构成的集合。设 L_1 是 L_0 的真子格，$0,I\in L_1$ 且 $L_1''=L_0''$。

若 $P_8\notin L_1$，则 L_1 为 $\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ 或 $\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_6\}$。当 $L_1=\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_5\}$，那么有

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}a_{31}=a_{32}=a_{41}=a_{42}=a_{43}=0\\a_{33}+a_{34}=a_{44}\text{且}a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}\end{array}\right\}$$

所以 $L_1'=M\oplus CI_2,\ L_1''=M\oplus\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$。因此 $L_1''\neq L_0''$。当 $L_1=\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_6\}$，那么，

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}a_{31}=a_{32}=a_{41}=a_{42}=a_{43}=0,a_{21}=a_{23}\\a_{33}+a_{34}=a_{44}\text{且}a_{11}=a_{13}+a_{33}\end{array}\right\}$$

则 $L_1'=\lambda\oplus\mu\oplus\lambda I_2,\ L_1''=\{(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):b_{12}=b_{21}=b_{13}=b_{24}=b_{32}=b_{42}=0\}$。所以 $L_1''\neq L_0''$。因此 $P_8\in L_1$。

若 $P_6\notin L_1$，则 $L_1=\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_5,P_8\}$，那么

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}a_{31}=a_{32}=a_{41}=a_{42}=a_{43}=0,a_{33}+a_{34}=a_{44}\\\text{且}-a_{11}+a_{21}=a_{12}-a_{22}=-a_{13}+a_{23}-a_{33}\end{array}\right\}$$

所以 $L_1'=\left\{\begin{pmatrix}\lambda&\lambda-\mu\\\lambda-\mu&\lambda\end{pmatrix}\oplus\mu I_2:\lambda,\mu\in C\right\}$，$L_1''=M\oplus\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$。因此 $L_1''\neq L_0''$。故 $P_6\in L_1$.

若 $P_4\notin L_1$，则 $L_1=\{0,I,P_2,P_3,P_5,P_6,P_8\}$，那么

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}a_{31}=a_{32}=a_{41}=a_{42}=a_{43}=0, a_{21}=a_{23}\\ a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}\text{且}a_{11}=a_{13}+a_{33}\end{array}\right\}$$

则 $L_1'=CI_3\oplus C,\ L_1''=\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})\oplus C$。因此 $L_1''\neq L_0''$。故 $P_4\in L_1$。由于 $P_4\wedge P_8=P_5$，所以 $P_5\in L_1$。

若 $P_3\notin L_1$，则 $L_1=\{0,I,P_4,P_5,P_6,P_8\}$，那么

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}a_{31}=a_{41}=a_{43}=-a_{42}=-a_{32}, a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}\\ a_{21}=a_{23}, a_{34}+a_{33}=a_{43}+a_{44}\text{且}a_{11}+a_{31}=a_{13}+a_{33}\end{array}\right\}$$

所以 $L_1'=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \mu & -\mu & -\mu\\ \mu & \lambda & \mu & \mu\\ -\mu & \mu & \lambda & -\mu\\ -\mu & \mu & \mu & \lambda\end{pmatrix}:\lambda,\mu\in C\right\}, L_1''=L_1'$，因此 $L_1''\neq L_0''$。故 $P_3\in L_1$。由于 $P_3\wedge P_4=P_2$，所以 $P_2\in L_1$。

综上所述 $L_1=L_0$。因此 L_0 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $A\lg(L_0)$ 是 KS 代数。

命题 2.2 投影关系图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr] & P_5 \arrow[r] \arrow[dr] & P_2 \arrow[r] \arrow[dr] & P_4 \arrow[r] & I \\
 & P_6 \arrow[r] & P_8 \arrow[r] & P_3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

命题 2.3 在 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 中，设投影格 $L_1=\{0,I,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_8\}(L_1\subset L)$，其中 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_4,P_5,P_8$ 均是命题 2.1 中所对应的投影，则 L_1 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $A\lg(L_1)$ 是 KS 代数。

证明：先证自反性。根据引理 1.3、命题 2.1 可知 L_1 是分配格。从而 L_1 是自反的。

设 $A=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$，取 $P_i\in L_1$，由 $(I-P_i)AP_i=0(i=1,2,3,4,5,8)$，得到 $a_{ij}=0(1\le j<i\le 4)$，以及 $a_{11}=a_{13}-a_{23}+a_{33}$，$a_{33}+a_{34}=a_{44}$，$a_{11}+a_{12}=a_{22}$。所以

$$A\lg(L_1)=\left\{(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c}\text{当}1\le j<i\le 4\text{时}, a_{ij}=0, a_{11}+a_{12}=a_{22}\\ a_{33}+a_{34}=a_{44}, a_{11}=a_{13}-a_{23}+a_{33}\end{array}\right\}$$

因此 $L_1'=CI$，$L_1''=\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$。

最后证极小性。设 L_2 是 L_1 的真子格，$0,I\in L_2$ 且 $L_2''=L_1''$。

若 $P_8\notin L_2$，则 $L_2=\{0,I,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$，那么

$$A\lg(L_2)=\left\{(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\text{当}1\le j<i\le 4\text{时}, a_{ij}=0, a_{11}+a_{12}=a_{22}, a_{33}+a_{34}=a_{44}\right\}.$$

所以 $L_2'=CI_2\oplus CI_2,\ L_2''=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})\oplus\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$。因此，$L_2''\neq L_1''$。故 $P_8\in L_2$。

若 $P_4\notin L_2$，则 $L_2=\{0,I,P_1,P_2,P_3,P_5,P_8\}$，那么

$$A\lg(L_2)=\left\{(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}):\text{当}1\le j<i\le 4\text{时}, a_{ij}=0, a_{11}+a_{12}=a_{22}, a_{11}=a_{13}-a_{23}+a_{33}\right\}.$$

所以 $L_2'=CI_3\oplus C,\ L_2''=\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})\oplus C$。因此，$L_2''\neq L_1''$。故 $P_4\in L_2$。由于 $P_4\wedge P_8=P_5$，所以 $P_5\in L_2$。

若 $P_1\notin L_2$，则 $L_2=\{0,I,P_2,P_3,P_4,P_5,P_8\}$，那么，由命题 2.2 的证明过程可知 $L_2'=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \lambda-\mu\\ \lambda-\mu & \lambda\end{pmatrix}\oplus\mu I_2:\lambda,\mu\in C\right\}$，$L_2''=M\oplus\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$ (M 为主对角线上元素相等的 2 阶复对称方阵全体构成的集合)。因此 $L_2''\neq L_1''$。故 $P_1\in L_2$。由于 $P_1\vee P_5=P_2$，所以 $P_2\in L_2$。又因 $P_2\vee P_8=P_3$，所以 $P_3\in L_2$。

综上所述 $L_2=L_1$。因此 L_1 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $A\lg(L_1)$ 是 KS 代数。

命题 2.3 投影关系图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[dr] & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[dr] & P_4 \arrow[r] & I \\ & P_5 \arrow[r] \arrow[ur] & P_8 \arrow[r] & P_3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

3. 矩阵代数 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 中的 Kadison-Singer 格

在例 1.2 的基础上，我们构造了生成 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格。与第 2 节构造的投影格方法相同，这里取分离向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,-1,0,0)^T$ 。下面给出结论。

命题 3.1 在 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 中，设投影格 $L=\{0,I,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8,P_9,P_{10},P_{11},P_{12},P_{13},P_{14}\}$ ，其中

$$P_1=E_{11}，\ P_2=\sum_{i=1}^{2}E_{ii}，\ P_3=\sum_{i=1}^{3}E_{ii}，\ P_4=\sum_{i=1}^{4}E_{ii}，\ P_5=\sum_{i=1}^{5}E_{ii}，\ P_6=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{3}E_{ij}，\ P_7=\frac{E_{11}-E_{14}-E_{41}+E_{44}}{2},$$

$$P_8=\sum_{i=1}^{3}E_{ii}+\sum_{i,j=4}^{6}\frac{1}{3}E_{ij}，\ P_9=E_{11}+\sum_{i,j=2}^{3}\frac{1}{2}E_{ij}，\ P_{10}=E_{11}+E_{44}，\ P_{11}=E_{11}+E_{22}+E_{44}，\ P_{12}=\sum_{i=1}^{4}E_{ii}+\sum_{i,j=5}^{6}\frac{1}{2}E_{ij},$$

$$P_{13}=\frac{3}{5}(E_{11}+E_{44})-\frac{2}{5}(E_{14}-E_{22}-E_{23}-E_{32}-E_{33}+E_{41})+\frac{1}{5}(E_{12}+E_{13}+E_{21}+E_{24}+E_{31}+E_{34}+E_{42}+E_{43}),$$

$$P_{14}=E_{11}+\sum_{i,j=2}^{3}\frac{1}{2}E_{ij}+E_{44},$$

则 L 是自反格。

证明： 由引理 1.2 知，要证 L 是自反格，只需证 L 是分配格。根据引理 1.1 得

$$0_-=0，\ P_{1\_}=P_{13}，\ P_{2\_}=P_{14}，\ P_{3\_}=P_4，\ P_{i\_}=P_{12}\,(i=4,5,10,11,13,14),$$

$$P_{6\_}=P_{11}，\ P_{7\_}=P_8，\ P_{8\_}=P_5，\ P_{9\_}=P_4，\ P_{12\_}=I，\ I_-=I.$$

因此 $0_\#=\vee\{0\}=0$ ， $P_{1\#}=\vee\{0,P_1\}=P_1$ ， $P_{2\#}=\vee\{0,P_1,P_2\}=P_2$ ， $P_{3\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_6\}=P_3$ ， $P_{4\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_6,P_7\}=P_4$ ， $P_{5\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7,P_9,P_{10},P_{11},P_{13},P_{14}\}=P_5$ ， $P_{6\#}=\vee\{0,P_6\}=P_6$ ， $P_{7\#}=\vee\{0,P_7\}=P_7$ ， $P_{8\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_3,P_6,P_8,P_9\}=P_8$ ， $P_{9\#}=\vee\{0,P_1,P_6\}=P_9$ ， $P_{10\#}=\vee\{0,P_1,P_7\}=P_{10}$ ， $P_{11\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_7\}=P_{11}$ ， $P_{12\#}=\vee\{0,P_1,P_2,P_3,P_6,P_7,P_8,P_9\}=P_{12}$ ， $P_{13\#}=\vee\{0,P_6,P_7\}=P_{13}$ ， $P_{14\#}=\vee\{0,P_1,P_6,P_7\}=P_{14}$ ， $I_\#=I$ 。所以 L 是分配格，故 L 是自反格。

命题 3.2 在 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 中，设投影格 $L_0=\{0,I,P_2,P_4,P_5,P_8,P_{12},P_{13}\}(L_0\subset L)$ ，其中 $P_2,P_4,P_5,P_8,P_{12},P_{13}$ 均是命题 3.1 中所对应的投影，则 L_0 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $A\lg(L_0)$ 是 KS 代数。

证明： 先证自反性。根据引理 1.3、命题 3.1 可知 L_0 是分配格。因此 L_0 是自反的。

设 $A=(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ ，取 $P_i\in L_0$ ，根据定义有 $(I-P_i)AP_i=0\,(i=2,4,5,8,12,13)$ 可得 $a_{i1}=0\,(i=3,4,5,6)$ ， $a_{ij}=0\,(2\le j<i\le 6)$ ， $\sum_{j=1}^{3}a_{1j}=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}=a_{33}$ ， $\sum_{j=4}^{6}a_{4j}=\sum_{j=5}^{6}a_{5j}=a_{66}$ 及 $a_{14}+a_{44}=a_{11}+a_{34}$ ， $a_{21}+a_{34}=a_{24}$ 。因此，

$$A\lg(L_0)=\left\{(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C}):\begin{array}{c} a_{i1}=0(i=3,4,5,6),a_{ij}=0(2\le j<i\le 6),\sum_{j=1}^{3}a_{1j}=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}=a_{33} \\ \sum_{j=4}^{6}a_{4j}=\sum_{j=5}^{6}a_{5j}=a_{66},a_{14}+a_{44}=a_{11}+a_{34},a_{21}+a_{34}=a_{24} \end{array}\right\},$$

所以， $L_0'=CI$ ， $L_0''=\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 。

下证极小性。设 L_1 是 L_0 的真子格，$0, I \in L_1$ 且 $L_1'' = L_0''$。

若 $P_8 \notin L_1$，则 $L_1 = \{0, I, P_2, P_4, P_5, P_{12}, P_{13}\}$ 那么

$$Alg(L_1) = \left\{ (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C}): \begin{matrix} a_{i1} = a_{i2} = 0(i=3,4,5,6), a_{i3} = 0(i=5,6), a_{ij} = 0(4 \le j < i \le 6), \sum_{j=1}^{3} a_{2j} = a_{33} \\ a_{11} + a_{34} = a_{14} + a_{44}, a_{24} = a_{21} + a_{34}, a_{55} + a_{56} = a_{66}, \sum_{j=1}^{3} a_{1j} + a_{43} = a_{33} \end{matrix} \right\},$$

那么

$$L_1' = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C \right\} \oplus CI_2,\ L_1'' = CI_2 \oplus CI_2 \oplus M_2(C).$$

所以 $L_1'' \ne L_0''$。故 $P_8 \in L_1$。

若 $P_2 \notin L_1$，则 $L_1 = \{0, I, P_5, P_8, P_{12}, P_{13}\}$，计算可得

$$Alg(L_1) = \left\{ (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C}): \begin{matrix} a_{i1} = a_{i2} = 0(i=4,5,6), a_{ij} = 0(4 \le j < i \le 6), \sum_{j=2}^{4} a_{1j} + a_{44} = \sum_{j=2}^{4} a_{2j} = \sum_{j=2}^{4} a_{3j} \\ a_{11} + a_{34} = a_{31} + a_{14} + a_{44}, a_{21} + a_{34} = a_{31} + a_{24}, \sum_{j=4}^{6} a_{4j} = \sum_{j=5}^{6} a_{5j} = a_{66} \end{matrix} \right\},$$

那么

$$L_1' = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix} \oplus a_{44} I_3 : \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{44} \in C \\ a_{12} = a_{11} - a_{44}, a_{23} = 2a_{11} - a_{22} - a_{44} \end{matrix} \right\},\ L_1'' = CI_3 \oplus \boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C}).$$

所以 $L_1'' \ne L_0''$。故 $P_2 \in L_1$。

若 $P_{13} \notin L_1$，则 $L_1 = \{0, I, P_2, P_4, P_5, P_8, P_{12}\}$。因此，

$$Alg(L_1) = \left\{ (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C}): \begin{matrix} a_{i1} = 0(i=3,4,5,6), a_{ij} = 0(2 \le j < i \le 6) \\ \sum_{j=4}^{6} a_{4j} = \sum_{j=5}^{6} a_{5j} = a_{66} \end{matrix} \right\}$$

所以 $L_1' = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C \right\} \oplus C \oplus CI_3$，$L_1'' = CI_2 \oplus C \oplus \boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{C})$，由此可知 $L_1'' \ne L_0''$。

故 $P_{13} \in L_1$。由于 $P_2 \vee P_{13} = P_4, P_4 \vee P_8 = P_{12}$，所以 $P_4, P_{12} \in L_1$。

若 $P_5 \notin L_1$，则 $L_1 = \{0, I, P_2, P_4, P_8, P_{12}, P_{13}\}$。由此可得，

$$Alg(L_1) = \left\{ (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C}): \begin{matrix} a_{i1} = 0(i=3,4,5,6), a_{6j} = 0(j=2,3,4), a_{ij} = 0(2 \le j < i \le 5), a_{21} + a_{34} = a_{24} \\ \sum_{j=4}^{6} a_{4j} = \sum_{j=5}^{6} a_{5j} = \sum_{j=5}^{6} a_{6j}, \sum_{j=1}^{3} a_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} = a_{33}, a_{11} + a_{34} = a_{14} + a_{44} \end{matrix} \right\}.$$

所以 $L_1' = \left\{ \lambda I_4 \oplus \begin{pmatrix} \mu & \lambda - \mu \\ \lambda - \mu & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in C \right\}$，$L_1'' = \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{C}) \oplus M$ (M 为主对角线上元素相等的 2 阶复对称方阵全体构成的集合)，由此可知 $L_1'' \ne L_0''$。故 $P_5 \in L_1$。

综上所述 $L_1 = L_0$。因此 L_0 是生成 von Neumann 代数 $\boldsymbol{M}_6(\boldsymbol{C})$ 的 KS 格，从而 $Alg(L_0)$ 是 KS 代数。

命题 3.2 投影格关系图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr] & P_{13} \arrow[r] & P_4 \arrow[r] \arrow[dr] & P_5 \arrow[r] & I \\
& P_2 \arrow[r] \arrow[ur] & P_8 \arrow[r] & P_{12} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

参考文献 (References)

[1] L. Ge, W. Yuan. Kadison-Singer algebras, I: Hyperfinite case. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 2010, 107(5): 1838-1843.

[2] L. Ge, W. Yuan. Kadison-Singer algebras, II: General case. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 2010, 107(11): 4840-4844.

[3] C. J. Hou. Cohomology of a class of Kadison-Singer algebras. Science in China Series A: Mathematics, 2010, 53: 1827-1839.

[4] K. H. Kim, F. W. Roush. Reflexive lattices of subspace. Proceedings of the American Mathematical Society, 1980, 78(11): 17-18.

[5] 董瑗菊, 侯成军, 谭君. 矩阵代数的 Kadison-Singer 格的分类[J]. 数学学报(中文版), 2011, 54(2): 333-342.

[6] 鲁世杰, 陆芳言, 李鹏同等. 非自伴算子代数[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 4-7.

[7] 胡长流, 宋振明. 格论基础[M]. 开封: 河南大学出版社, 1990: 74.

