Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 144-151
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23023 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Blow-Up and Asymptotic Behavior of Global Solution of Damped Wave Equation with Dynamic Boundary Conditions

Niu Jin, Hongwei Zhang*, **Qingying Hu**

Department of Mathematics, Henan University of Technology, Zhengzhou
Email: *wei661@yahoo.com.cn

Received: Apr. 10th, 2012; revised: Apr. 27th, 2012; accepted: May 8th, 2012

Abstract: In this paper, the blow-up and asymptotic behavior of global solution of damped wave equation with dynamic boundary condition are discussed. By the convexity lemma and unstable set, the sufficient condition of the solution of the wave equation with negative and positive initial energy respectively are obtained. With the help of Nakao and stable set, the energy decay of the solution is given.

Keywords: Wave Equation; Dynamic Boundary Condition; Convexity Lemma; Blow-Up of Solution; Energy Decay

动力边界条件的阻尼波动方程解的爆破性和渐近性

靳　妞，张宏伟*，**呼青英**

河南工业大学数学系，郑州
Email: *wei661@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 4 月 10 日；修回日期：2012 年 4 月 27 日；录用日期：2012 年 5 月 8 日

摘　要：本文讨论动力边界条件的阻尼波动方程解的爆破性和渐近性。利用凸性分析和不稳定集，分别给出了初始能量为负和正时，解爆破的充分条件；借助 Nakao 不等式和位势井理论得到了解的衰减估计。

关键词：波动方程；动力边界条件；凸性引理；解的爆破；衰减估计

1. 引言

本文讨论如下初边值问题整体解的爆破性和渐近性：

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxt} = 0, 0 < x < 1, t > 0, \tag{1.1}$$

$$u_{tt}(1,t) + u_x(1,t) + \beta u_t(1,t) + \delta u_{xt}(1,t) = \gamma |u(1,t)|^{p-2} u(1,t), \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \tag{1.4}$$

其中下标字母表示对该变量的偏导数，x 表示位置变量，t 为时间变量，u_0，u_1 为给定的初始函数，$p \ge 2$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$，$\delta > 0$ 为常数。

问题(1.1)~(1.4)描述的是粘弹性弹簧－质量－阻尼器系统，各个方程和参数的物理意义见[1]。该模型已有许

*通讯作者。

多结果，但大都从控制论的可控性和稳定性角度去研究，当 $\alpha=\delta=1$ 而 $\gamma=\beta=0$ 时，M. Grobbelaar-Van Dalsen[2] 给出了研究该问题的泛函框架及其半群理论的适定性。当 $\alpha=\gamma=0$ 时，Morgul 等[3]，Zhu 和 Guo[4]，Mifdal[5]，Baicu 等[6]，Guo 和 Xu[7]，Conrad 等[8]分别从不同角度研究了该问题的渐近性和稳定性。当 $\alpha=\gamma=0$，而边界阻尼项 $\beta u_t(1,t)$ 换为更一般的 $f(u_t(1,t))$ 时，Rao[9]，Feireisl 等[10]，d'Andrea-Novel[11]，Vancostenoble[12]给出了问题的适定性和反馈稳定性。

当 $\gamma=0$ 时，Shahruz[13]，Pellicer 和 Sola-Morales[14]，呼青英和张宏伟[15]用不同方法给出了稳定性，Burns 和 King[16]给出了问题(1.1)~(1.4)的多项式衰减。Ackleh 和 Banks 等[17]和 Pellicer[18]还讨论了如下非线性系统的适定性和流形

$$u_{tt}-u_{xx}-\alpha u_{xxt}+f\left(u(1,t),u_t(1,t)\right)=0, \tag{1.5}$$

$$u(0,t)=0, \tag{1.6}$$

$$u_{tt}(1,t)=-\left[u_x+\alpha u_{xt}+\gamma u_t\right](1,t)-f\left(u(1,t),u_t(1,t)\right). \tag{1.7}$$

Gerbi 和 Said-Houari[19-21]利用 Galerkin 方法和压缩映射原理给出了如下问题

$$u_{tt}-\Delta u-\alpha\Delta u_t=|u|^{p-2}u,\quad x\in\Omega,t>0, \tag{1.8}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\Gamma_0,t>0, \tag{1.9}$$

$$u_{tt(x,t)}=-\left[\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)+\frac{\alpha\partial u_t(x,t)}{\partial v}+\gamma|u_t|^{m-2}u_t(x,t)\right],\quad x\in\Gamma_1,t>0, \tag{1.10}$$

的局部适定性和能量的指数增长阶。

还应当提及的是已有大量文献研究了类似问题。例如 Littman 和 Markus[22]，Andrews 和 Kuttler[23]和 Hu 等[24]研究了如下问题

$$u_{tt}+u_{xxxx}+\beta u_{xxxxt}+l|u|^q u=0,\quad 0<x<1,t>0, \tag{1.11}$$

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(1,t)=0,\quad t>0, \tag{1.12}$$

$$u_{xxx}(1,t)+\beta u_{xxxt}(1,t)=mu_{tt}(1,t)+au_t(1,t)+b|u_t(1,t)|^p u_t(1,t). \tag{1.13}$$

最近 Autuori 和 Pucci[25]还讨论了动力边界的 Kirchhoff 系统。

本文讨论问题(1.1)~(1.4)的整体解的不存在性和衰减性。据作者所知，整体解的不存在性是该类问题的首次讨论，而引入位势井得到其衰减性与文献[19]的指数增长性完全不同。本文第二节，我们用经典的凸性引理[26]给出了整体解不存在的充分条件。在第三节，我们利用文献[27]的思路引入位势井[28]，利用 Nakao 不等式[29]给出了整体解的衰减性。

为了方便，我们取问题(1.1)~(1.4)中常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为 1。本文所用符号同文[19]，我们记 $H^1(0,1)$ 为通常的 Sobolev 空间。$V=\left\{u\,\middle|\,u\in H^1(0,1),u(0)=0\right\}$，$(u,v)=\int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$ 为空间 $L^2(0,1)$ 的内积，并记其范数为 $\|\cdot\|$。

2. 初始能量为负时解的爆破

利用[18]中半群方法，对 $u_0\in V$ 和 $u_1\in L^2[0,1]$ 并满足相容性条件，则问题(1.1)~(1.4)有唯一解 $u\in H^1$。记问题(1.1)~(1.4)的相应能量函数和初始能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}u_t^2(1,t)-\frac{1}{p}|u(1,t)|^p, \tag{2.1}$$

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\|u_{0x}\|^2+\frac{1}{2}u_1^2(1)-\frac{1}{p}|u_0(1)|^p. \tag{2.2}$$

从而有

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}E(t)=-\|u_{xt}\|^2-u_t^2(1,t). \tag{2.3}$$

因此有

$$E(t)=E(0)-\int_0^t\|u_{xs}\|^2\,\mathrm{d}s-\int_0^t u_s^2(1,s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

引理 2.1[26] 设 $H(t)$ 是 $R^+=(0,+\infty)$ 上的非负二次连续可导函数，且满足 $H''(t)H(t)-(1+\alpha)\left[H'(t)\right]^2\ge 0$，其中 $\alpha>0$ 为常数。若 $H(0)>0$，$H'(0)>0$，则必存在时刻 $T<T_1=\dfrac{H(0)}{\alpha H'(0)}$ 使当 $t\to T^-$ 时有 $H(t)\to\infty$。

定理 2.2 设问题(1.1)~(1.4)存在局部解，$p>2$，$E(0)<0$，则必存在有限时刻 T，使问题(1.1)~(1.4)的解爆破。

证明 记

$$F(t)=\|u\|^2+\int_0^t u^2(1,s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|u_x\|^2\,\mathrm{d}s+u^2(1,t)+(T_0-t)\left(u_0^2(1)+u_{0x}^2\right)+\beta(t+t_0)^2, \tag{2.5}$$

其中 T_0，β，t_0 为非负常数，并在后面确定，则

$$F'(t)=2(u,u_t)+2\int_0^t u(1,s)u_t(1,s)\,\mathrm{d}s+2\int_0^t(u_x,u_{xs})(s)\,\mathrm{d}s+2u(1,t)u_t(1,t)+2\beta(t+t_0), \tag{2.6}$$

$$F''(t)=2\left[\|u_t\|^2-\|u_x\|^2+u_t^2(1,t)+|u(1,t)|^p+\beta\right]. \tag{2.7}$$

对(2.7)利用能量等式(2.4)以及 $p>2$ 有

$$\begin{aligned}F''(t)=&(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)+\int_o^t\|u_{xs}\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t u_s^2(1,s)\,\mathrm{d}s+\beta\right]+(p-2)\|u_x\|^2\\&-p\left(\beta+2E(0)\right)+(p-2)\int_0^t\|u_{xs}\|^2\mathrm{d}s+(p-2)\int_0^t u_s^2(1,s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}. \tag{2.8}$$

取 $0<\beta<-2E(0)$ 并注意到 $p>2$，则(2.8)可写成

$$F''(t)\ge(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)+\int_0^t\|u_{xs}\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t u_s^2(1,s)\,\mathrm{d}s+\beta\right]. \tag{2.9}$$

又由 Hölder 不等式知，

$$\left[F'(t)\right]^2\le 4\left[\|u\|^2\|u_t\|^2+\left(\int_0^t u^2(1,s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\left(\int_0^t u_t^2(1,s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}+\left(\int_0^t\|u_x\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\left(\int_0^t\|u_{xs}\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac12}+u(1,t)u_t(1,t)+\beta(t+t_0)\right]^2 \tag{2.10}$$

则由(2.6)，(2.9)，(2.10)以及 Cauchy-Schwartz 不等式得 $F(t)F''(t)-\dfrac{p+2}{4}\left[F'(t)\right]^2\ge 0$。又取 t_0 充分大，使 $F'(0)=2(u_0,u_1)+2u_0(1)u_1(1)+2\beta t_0>0$。又注意到 $F(0)>0$，则由引理 2.1 知，必存在有限时刻 T_1 使问题(1.1)~(1.4)的解在有限时刻爆破。

3. 解的衰减估计

记

$$C_0^{-1}=\inf_{u\in v-\{0\}}\frac{\|u_x\|}{|u(1)|}, \tag{3.1}$$

$$\lambda_0=C_0^{-\frac{p}{p-2}},\qquad E_0=\left(\frac12-\frac1p\right)\lambda_0^2.$$

易见 E_0 正是[27]中定义的位势井的井深。这时位势井定义为

$$\sum\nolimits_0 = \left\{ (\lambda, E) \in R^2 \,\middle|\, 0 < \lambda < \lambda_0, 0 < E \le E_0 \right\}. \tag{3.2}$$

为得到能量衰减，我们引入如下集合

$$\sum\nolimits_1 = \left\{ (\lambda, E) \in R^2 \,\middle|\, 0 < \lambda < \lambda_1, 0 < E < E_1 \right\}, \tag{3.3}$$

其中

$$\lambda_1 = \left(pC_0^p \right)^{-\frac{1}{p-2}}, E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \lambda_1^2.$$

显然 $\sum_1$ 包含于 $\sum_0$ 中。类似于[27]可以证明：

引理 3.1 设 u 为问题(1.1)~(1.4)在 $[0, T_{\max})$ 上的局部解，若 $\left(\|u_{0x}\|, E(0)\right) \in \sum_1$，则总有 $\left(\|u_x\|, E(t)\right) \in \sum_1$，$t \in [0, T_{\max})$。

引理 3.2 若 $\left(\|u_{0x}\|, E(0)\right) \in \sum_1$，则问题(1.1)~(1.4)的解满足

$$\|u_x\|^2 \ge 2|u(1,t)|^p, \tag{3.4}$$

从而

$$E(t) \ge \frac{p-1}{2p}\|u_x\|^2 \ge \frac{p-1}{p}|u(1,t)|^p. \tag{3.5}$$

证明 由 $E(t)$ 的定义(2.1)和 C_0 的定义(3.1)知

$$E(t) \ge \frac{1}{2}\|u_x\|^2 - C_0^p \|u_x\|^p \triangleq G(\|u_x\|),$$

其中 $G(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - C_0^p \lambda^p$。易知 $G(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_1 = \left(pC_0^p\right)^{-\frac{1}{p-2}}$ 处取得极大值 $G(\lambda_1) = E_1$，且当 $\lambda > \lambda_1$ 时，$G(\lambda)$ 严格递减。当 $\lambda \to \infty$ 时，$G(\lambda) \to -\infty$。从而对任意的 t 有 $\|u_x\| < \lambda_1$ 且 $G(\|u_x\|) \ge 0$ (因 $0 < \|u_x\| < \lambda_1$)。又注意到

$$\|u_x\|^2 - |u(1,t)|^p = \frac{1}{2}\|u_x\|^2 + \left(\frac{1}{2}\|u_x\|^2 - |u(1,t)|^p \right) \ge \frac{1}{2}\|u_x\|^2 + G(\|u_x\|), \tag{3.6}$$

而这时 $G(\|u_x\|) \ge 0$，故由(3.6)知，(3.4)成立。由此进一步得

$$E(t) \ge \frac{1}{2}\|u_x\|^2 - \frac{1}{p}|u(1,t)|^p \ge \frac{p-1}{2p}\|u_x\|^2,$$

即(3.5)成立。

引理 3.3[29] 设 $\phi(t)$ 是 $R^+ = (0, +\infty)$ 上非负有理函数，且存在正常数 $k > 0$ 使得 $\sup\limits_{t \le \tau \le t+1} \phi(\tau) \le k\left(\phi(t) - \phi(t+1)\right)$，则存在正常数 l 和 θ 使得 $\phi(t) \le le^{-\theta t}$，$t \ge 0$。

定理 3.4 设 $p > 2, \left(\|u_{0x}\|, E(0)\right) \in \sum_1$，$u$ 是问题(1.1)~(1.4)的整体解，则存在正常数 l 和 θ，使得 $E(t) \le le^{-\theta t}$，$t \ge 0$。

证明 由(2.3)知

$$\int_t^{t+1} \left[\|u_{xs}(s)\|^2 + u_s^2(1,s) \right] \mathrm{d}s = E(t) - E(t+1), \tag{3.7}$$

由中值定理必存在 $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4}\right]$，$t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t+1\right]$ 使得

$$\|u_{xt}(t_i)\|^2 \le C\left(E(t) - E(t+1)\right), \ i = 1, 2. \tag{3.8}$$

这里以及后面的 C 表示不同的正常数，但均不依赖于 t。

方程(1.1)两边同乘 u，并在 $[t_1,t_2]\times[0,1]$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_x\|^2-|u(1,s)|^p\right]\mathrm{d}s\le\sum_{i=1}^{2}\left[\|u_t(t_i)\|\|u(t_i)\|+|u_t(1,t_i)||u(1,t_i)|\right]\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_s\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\left[|u(1,s)||u_s(1,s)|+\|u_x(s)\|\|u_{xs}(s)\|\right]\mathrm{d}s\end{aligned}.\tag{3.9}$$

下面估计(3.9)右边的各项。因为 $u(0,t)=u_t(0,t)=0$。则

$$\|u\|\le C\|u_x\|,\qquad \|u_t\|\le C\|u_{xt}\|.\tag{3.10}$$

由(3.8)，(3.10)，(3.5)和 $E(t)$ 关于 t 的递减性及 Young 不等式知

$$I_1=\sum_{i=1}^{2}\|u_t(t_i)\|\|u(t_i)\|\le\sum_{i=1}^{2}\|u_{xt}(t_i)\|\|u_x(t_i)\|\le C\left(E(t)-E(t+1)\right)^{\frac12}\sum_{i=1}^{2}\|u_x(t_i)\|\le C(\delta)\left(E(t)-E(t+1)\right)+\delta E(t),\tag{3.11}$$

其中 δ 为任意的正常数，并在后面确定，$C(\delta)$ 为依赖于 δ 的正常数，注意到

$$|u_t(1,t)|^2=\left|u_t(0,t)+\int_0^1u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\right|^2\le C\|u_{xt}(t)\|^2\le C\left(E(t)-E(t+1)\right),\tag{3.12}$$

$$|u(1,t)|^2=\left|u(0,t)+\int_0^1u_x(x,t)\mathrm{d}x\right|^2\le C\|u_x(t)\|^2\le CE(t),\tag{3.13}$$

则由 Young 不等式得，

$$I_2=\sum_{i=1}^{2}|u(1,t_i)||u_t(1,t_i)|\le CE^{\frac12}(t)\left(E(t)-E(t+1)\right)^{\frac12}\le C(\delta)\left(E(t)-E(t+1)\right)+\delta E(t).\tag{3.14}$$

由(3.7)和(3.10)，易知

$$I_3=\int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_s\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s\le C\int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_{xs}\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s\le C\left(E(t)-E(t+1)\right).\tag{3.15}$$

利用(3.7)，(3.13)，$E(t)$ 的单调递减性和 Young 不等式有

$$I_4=\int_{t_1}^{t_2}u(1,s)u_s(1,s)\mathrm{d}s\le\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta u^2(1,s)+C(\delta)u_s^2(1,s)\right)\mathrm{d}s\le C(\delta)\left(E(t)-E(t+1)\right)+\delta E(t).\tag{3.16}$$

再由 Young 不等式和(3.7)及 $E(t)$ 的单调递减性知

$$I_5=\int_{t_1}^{t_2}\|u_x(s)\|\|u_{xs}(s)\|\mathrm{d}s\le C(\delta)\left(E(t)-E(t+1)\right)+\delta E(t).\tag{3.17}$$

把(3.11)，(3.14)~(3.17)代入到(3.9)知

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\|u_x\|^2-|u(1,s)|^p\right)\mathrm{d}s\le C(\delta)\left(E(t)-E(t+1)\right)+\delta E(t).\tag{3.18}$$

另一方面，由引理 3.2 的(3.5)

$$E(t)=\frac12\left(\|u_x\|^2-|u(1,t)|^p\right)+\frac12\|u_t\|^2+\frac12u_t^2(1,t)+\frac{p-2}{2p}|u(1,t)|^p\le\frac12\left(\|u_x\|^2-|u(1,t)|^p\right)+\frac12\|u_t\|^2+\frac12u_t^2(1,t)+\frac{p-2}{2(p-1)}E(t)$$

移项并整理得

$$E(t)\le\frac{p-1}{p}\left(\|u_x\|^2-|u(1,t)|^p\right)+\frac{p-1}{p}\left(\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)\right)\le\left(\|u_x\|^2-|u(1,t)|^p\right)+\|u_t\|^2+u_t^2(1,t),\tag{3.19}$$

(3.19)式关于 t 在 $[t_1,t_2]$ 上积分后再利用(3.15)和(3.18)及 $E(t)$ 的单调性得

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} E(s)\mathrm{d}s &\le \int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_x\|^2-|u(1,s)|^p\right]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\left[\|u_s\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s \\ &\le C(\delta)\big(E(t)-E(t+1)\big)+\delta E(t)\le C(\delta)\big(E(t)-E(t+1)\big)+\delta\sup_{t\le s\le t+1}E(s)\end{aligned}, \tag{3.20}$$

因 $E(t)$ 单调减，可取到 $t_3\in[t_1,t_2]$ 使

$$E(t_3)\le C\int_{t_1}^{t_2}E(s)\mathrm{d}s,$$

则由于 $t_3\le t+1$ 和 $E(t)$ 的单调性及(3.7)有

$$\begin{aligned}E(t)&=E(t+1)+\int_t^{t+1}\left[\|u_{xs}\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s\le E(t_3)+\int_t^{t+1}\left[\|u_{xs}\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s \\ &\le C\int_{t_1}^{t_2}E(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+1}\left[\|u_{xs}\|^2+u_s^2(1,s)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}. \tag{3.21}$$

由 $E(t)$ 的单调性，(3.20)和(3.7)有

$$\sup_{t\le s\le t+1}E(s)\le\delta\sup_{t\le s\le t+1}E(s)+\big(C(\delta)+1\big)\big(E(t)-E(t+1)\big).$$

取 δ 充分小，则

$$\sup_{t\le s\le t+1}E(s)\le C\big(E(t)-E(t+1)\big)$$

由引理 3.3 得结论。

4. 初始能量为正时解的爆破

本节给出初始能量为正时解爆破的充分条件。

引理 4.1 设 $p>2$，$\|u_{0x}\|\ge\lambda_0$ 且 $E(0)<E_0$，则必有

$$\|u_x\|^2\ge\lambda_0^2,\ E(t)<E_0,$$

其中 λ_0，E_0 同第三节。

证明 由 $E(t)$ 的单调性知，$E(t)\le E(0)<E_0$ 成立。类似于引理 3.2 的证明，我们有

$$E(t)\ge\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{p}|u(1,t)|^p\ge\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{C_0^p}{p}\|u_x\|^p=g\big(\|u_x\|\big), \tag{4.1}$$

其中 $g(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{C_0^p}{p}\lambda^p$，$\lambda\ge0$。易知 $g(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0=C_0^{-\frac{p}{p-2}}$ 处取得极大值 $g(\lambda_0)=E_0$，且当 $\lambda\ge\lambda_0$ 时 $g(\lambda)$ 严格递减，当 $\lambda\to\infty$ 时，$g(\lambda)\to-\infty$。因 $E(0)<E_0$，则必存在 $\lambda_2>\lambda_0$ 使得 $g(\lambda_2)=E(0)$。由 $g(\lambda)$ 的单调性，若有 $\bar{\lambda}$ 使 $g(\bar{\lambda})\le E(0)=g(\lambda_2)$，则必有 $\lambda_2\le\bar{\lambda}$。由此我们断言对 $t\ge0$ 必有

$$\|u_x\|>\lambda_2. \tag{4.2}$$

事实上，若存在某一时刻 $t_0>0$ 使

$$\|u_x(t_0)\|<\lambda_2. \tag{4.3}$$

由于 $\lambda_2>\lambda_0$，$\|u_x(t)\|$ 关于 t 连续，由假设应有 $\|u_x(t)\|>\lambda_0$。但利用(4.1)及 $g(\lambda)$ 关于 $\lambda\to\lambda_0$ 时的单调递减性和(4.3)知

$$E(t_0)\ge g\big(\|u_x(t_o)\|\big)>g(\lambda_2)=E(0),$$

此与 $E(t)\le E(0)$ 矛盾。因此，(4.2)成立。进一步有结论成立。

定理 4.2 设 $p>2$，$\|u_{0x}\|\geq\lambda_0$ 且 $0<E(0)<E_0$，则问题(1.1)~(1.4)的解必在有限时刻爆破。

证明 类似于定理 2.2，构造辅助函数 $F(t)$ 如(2.5)。则(2.6)，(2.7)仍成立。对(2.7)用 $E(t)$ 的表达式则

$$F''(t)=(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)\right]+(p-2)\|u_x\|^2+2\beta-2pE(t),\tag{4.4}$$

由引理 4.1 知，

$$(p-2)\|u_x\|^2\geq(p-2)\lambda_0^2=2pE_0,$$

又结合(2.4)及已知 $E(0)<E_0$，则(4.4)变为

$$\begin{aligned}F''(t)&\geq(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)\right]+2p\left(E_0-E(t)\right)+2\beta\\&=(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)\right]+2p\left(E_0-E(0)\right)+2\beta\\&\quad+2p\int_0^t\|u_{xs}\|^2(s)\mathrm{d}s+2p\int_0^t u_s^2(1,s)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.5}$$

取 $\beta=2\left(E_0-E(0)\right)$，这时 $2p\left(E_0-E(0)\right)+2\beta=(p+2)\beta$，并注意到 $p>2$ 时，$2p>\beta+2$，则(4.5)成为

$$F''(t)\geq(p+2)\left[\|u_t\|^2+u_t^2(1,t)+\beta\right]+\int_0^t\|u_{xs}\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t u_s^2(1,s)\mathrm{d}s.\tag{4.6}$$

余下同定理 2.2 的证明过程，不再重复，证毕。

参考文献 (References)

[1] M. Pellicer, J. Sola-Morales. Analysis of a viscoelastic spring-mass model. Mathematical Analysis and Applications, 2004, 294(2): 687-698.
[2] M. G. Van Dalsen. On fractional powers of a closed pair of operators and a damped wave equation with dynamic boundary conditions. Applicable Analysis, 1994, 53(1-2): 41-54.
[3] O. Morgul, B. P. Rao and F. Conrad. On the stabilization of a cable with a tip mass. IEEE Transaction on Automatic Control, 1994, 39(10): 2140-2145.
[4] W. D. Zhu, B. Z. Guo. On hybrid boundary control of flexible systems. Transactions of the ASME, 1997, 119: 836-839.
[5] A Mifdal. Uniform stabilization of a hybrid system. Comptes Rendus de l'Acadrmie des Sciences, 1997, 324(1): 37-42.
[6] C. F. Baicu, C. D. Rahn and D. M. Dawson. Exponentially stabilizing boundary control of string-mass systems. Journal of Vibration and Control, 1998, 5(3): 491-502.
[7] B. Z. Guo, C. Z. Xu. On the spectrum-determined growth condition of a vibration cable with a tip mass. IEEE Transaction on Automatic Control, 2000, 45(1): 89-93.
[8] F. Conrad, G. O'Dowd and F.-Z. Saouri. Asymptotic behavior for a model of flexible cable with tip mass. Asymptotic Analysis, 2002, 30(3-4): 313-330.
[9] B. P. Rao. Decay estimates of solutions for a hybrid system of flexible structures. European Journal of Applied Mathematics, 1994, 4(3): 303-319.
[10] E. Feireisl, G. O'Dowd. Stabilization of a hybrid system with a nonlinear nonmonotone feedback. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1999, 4: 133-135.
[11] B. d'Andrea-Novel, F. Boustany, F. Conrad and B. P. Rao. Feedback stabilization of a hybrid PDE-ODE system: Application to an overhead crane. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1994, 7(1): 1-22.
[12] J. Vancostenoble. Strong stabilization (via weak stabilization) of hybrid systems with a nonmonotone feedback. ESAIM: Proceedings, 2000, 8: 157-159.
[13] S. M. Shahruz. Boundary control of a nonlinear axially moving string. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(1): 17-25.
[14] M. Pellicer, J. Sola-Morales. Spectral analysis and limit behaviours in a spring-mass system. Communications on Pure and Applied Analysis, 2008, 7(3): 563-577.
[15] 呼青英, 张宏伟. 混合 Cable-Mass 动力系统的一致稳定性[J]. 动力与控制学报, 2007, 5(1): 27-29.
[16] J. A. Burns, B. B. King. Optimal sensor location for robust control of distributed paramater systems. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, December 1994: 3967-3972.
[17] A. S. Ackleh, H. T. Banks and G. A. Pinter. Well-posedness results for models of elastomers. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2002, 258: 440-456.
[18] M. Pellicer. Large time dynamics of a nonlinear spring-mass-damper model. Nonlinear Analysis, 2008, 69(9): 3110-3127.
[19] S. Gerbi, B. Said-Houari. Local existence and exponential growth for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Advances in Differential Equations, 2008, 13(11): 1051-1074.
[20] S. Gerbi, B. Said-Houari. Asymptotic stability and blow up for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Nonlinear Analysis, 2011, 74(17): 7137-7150.
[21] 李玉环, 刘盈盈, 穆春来. 动态边界下一类强阻尼波动方程解的爆破[J]. 西南大学学报, 2011, 33(7): 10-15.
[22] W. Littman, L. Markus. Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping. Annali di Matematica Pura ed Applicata,

1998, 152: 281-330.
[23] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 197: 781-795.
[24] Q. Y. Hu, C. K. Zhu and X. Z. Zhang. Energy decay estimates for an Euller-Bernoulli beam with a tip mass. Annals of Differential Equations, 2009, 25(2): 161-164.
[25] G. Autuori, P. Pucci. Kirchhoff systems with dynamic boundary conditions. Nonlinear Analysis, 2010, 73(7): 1952-1965.
[26] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1974, 5(1): 138-146.
[27] G. Todorova. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 239(1): 213-226.
[28] L. Payne, O. Sattinger. Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations. Israel Journal of Mathematics, 1973, 22(3-4): 273-303.
[29] M. Nakao, K. Ono. Global existence to the Cauchy problem of the semilinear evolution equations with a nonlinear with a nonlinear dissipation. Funkcialaj Ekvacioj, 1995, 38: 417-431.

