Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 164-167
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23026 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The $\pi-$Degrees of Characters for Finite Groups*

Yueming Zhang, Ping Jin

School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan
Email: jinping@sxu.edu.cn

Received: May 3rd, 2012; revised: May 21st, 2012; accepted: May 27th, 2012

Abstract: Let G be a finite group, N a subgroup of G and χ an irreducible complex character of G. Write $\pi=\pi(\chi(1))$ to denote the set of prime divisors of $\chi(1)$. The present paper gives a sufficient condition to guarantee that every irreducible constituent of χ_N has $\pi-$degree, which generalizes the corresponding Dolfi's theorem. Some applications are given.

Keywords: Irreducible Character; $\pi-$Degree; Subnormal Subgroup

有限群特征标的$\pi-$次数*

张月明，靳　平

山西大学数学科学学院，太原
Email: jinping@sxu.edu.cn

收稿日期：2012 年 5 月 3 日；修回日期：2012 年 5 月 21 日；录用日期：2012 年 5 月 27 日

摘　要：设 G 为任意有限群，N 为 G 的子群，χ 是 G 的一个不可约复特征标。记 $\pi=\pi(\chi(1))$ 为 $\chi(1)$ 的素因子集合。本文给出了 χ_N 的每个不可约分量均有 $\pi-$次数的一个条件，推广了 Dolfi 的相关定理，并给出了若干应用。

关键词：不可约特征标；$\pi-$次数；次正规子群

1. 引言

设 G 为任意有限群，$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 为 G 的一个不可约复特征标。给定 G 的一个子群 N，则 χ 在 N 上的限制 χ_N 可表为

$$\chi_N=k_1\varphi_1+\cdots+k_r\varphi_r$$

其中 φ_i 均为 N 的不可约特征标，称为 χ_N 的不可约分量，诸 k_i 均为正整数。有限群表示论和特征标理论的一个重要问题是：如何控制这些不可约分量 φ_i 的次数 $\varphi_i(1)$，特别是探讨诸 $\varphi_i(1)$ 和 $\chi(1)$ 之间可能存在的整除关系。具体讲，何时每个 $\varphi_i(1)$ 能整除 $\chi(1)$？或一般地，是否 $\varphi_i(1)$ 的每个素因子均可整除 $\chi(1)$？

当 N 为 G 的正规子群时，著名的 Clifford 定理(见[1]中定理 6.2)断言 χ_N 的诸不可约分量 φ_i 的次数均相等，此时显然有 $\varphi_i(1)$ 整除 $\chi(1)$。然而，当 N 在 G 中不正规时，则上述整除关系一般不成立。例如，Isaacs 在文献[2]中构造了一个可解群 G，其阶 $|G|=2^3\cdot3\cdot5^3$，存在一个 5 次不可约特征标 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 和一个 24 阶子群 $N\le G$，使得 $\chi_N=\theta+\varphi$，其中 $\theta,\varphi\in\mathrm{Irr}(N)$ 满足 $\theta(1)=2$ 及 $\varphi(1)=3$，由此表明 $\theta(1)$ 和 $\varphi(1)$ 的每个素因子，均不能整除 $\chi(1)$。

*资助信息：国家自然科学基金资助(11171194)。

本文研究的主要问题是：给定不可约特征标$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$及子群$N\le G$，任取$\varphi\in\mathrm{Irr}(G)$在$\chi$的下方，即$\varphi$为$\chi_N$的一个不可约分量，探讨何时$\varphi(1)$的每个素因子均可整除$\chi(1)$。

方便起见，我们记$\pi=\pi(\chi(1))$为$\chi(1)$的所有素因子集合，则本文所探讨的问题可等价地表述为：何时χ_N的每个不可约分量φ都具有$\pi-$次数，亦即$\varphi(1)$为一个$\pi-$数(指的是$\varphi(1)$的每个素因子均在集合π中，从而整除$\chi(1)$)。

该问题与群G的$\pi-$结构有关。沿此方向的最新结果是Dolfi于2002年证明的下述结论(见文献[3]中定理B)，其中$O_\pi(G)$表示群G的最大正规$\pi-$子群，而$O^\pi(G)$表示最小的正规子群K使得G/K为$\pi-$群，即$G/O^\pi(G)$为群G的最大$\pi-$商群。

Dolfi 定理：设G为有限群，$N\le G$，$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$且$\pi=\pi(\chi(1))$。如果存在一个子群$L\le G$，满足下述三个条件：

1) $N\lhd\lhd L$，即N是L的一个次正规子群；
2) $|O^\pi(G)L:L|$为$\pi'-$数；
3) $|N:N\cap O_\pi(G)|$亦为$\pi'-$数。

则χ_N的每个不可约分量φ都具有$\pi-$次数。

需要指出的是，在上述Dolfi定理中，如果能证明χ_L的不可约分量均有$\pi-$次数，由于N是L的次正规子群，使用Clifford定理，则不难推出此时χ_N的不可约分量亦有$\pi-$次数。但该结论一般不成立，即一般而言Dolfi定理不能保证χ_L的每个不可约分量均有$\pi-$次数。例如，考虑可解群$G=S_4$，取$L=S_3$且$N=1$，再取$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$使得$\chi(1)=3$，则$\pi=\{3\}$。此时容易验证Dolfi定理的条件均成立，但$\chi_L=\lambda+\varphi$，其中$\lambda,\varphi\in\mathrm{Irr}(L)$满足$\lambda(1)=1,\varphi(1)=2$，故$\varphi$没有$\pi-$次数。再考虑单群$G=A_5$，取$L=A_4$且$N=1$，则存在$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$满足$\chi(1)=4$，此时$\pi=\{2\}$，并且Dolfi定理的条件也成立，但$\chi_L=\lambda+\varphi$，其中$\lambda,\varphi\in\mathrm{Irr}(L)$满足$\lambda(1)=1,\varphi(1)=3$，表明$\varphi$亦没有$\pi-$次数。

本文主要结果是得到了上述Dolfi定理的一个推广，进一步建立了不可约特征标的$\pi-$次数问题与群的$\pi-$结构之间的密切联系。

定理 1：设G为有限群，$N\le G$且$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$。令$\pi=\pi(\chi(1))$。如果存在G的三个子群L,K,M，满足下述四个条件：

1) $N\lhd\lhd L$，$M\lhd\lhd G$，$K\le L\cap M$且$K\lhd M$；
2) $|N:N\cap M|$为$\pi-$数；
3) $|M:M\cap L|$为$\pi'-$数；
4) $|M\cap N:K\cap N|$为$\pi'-$数。

则χ_N的每个不可约分量$\varphi\in\mathrm{Irr}(N)$均有$\pi-$次数。

在定理1中，取$M=O_\pi(G)$，$K=O_\pi(G)\cap O^\pi(G)$，我们将证明该定理即可推出上述Dolfi定理，故为后者的一个推广。

作为定理1的一个应用，我们将证明当子群N充分大时，例如，当N包含了G的特征子群$O^{\pi\pi'}(G):=O^{\pi'}(O^\pi(G))$时，则特征标的$\pi-$次数极好控制。

定理 2：设G为任意有限群，$N\le G$，任取$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，令$\pi=\pi(\chi(1))$。如果$O^{\pi\pi'}(G)\subseteq N$，则$\chi_N$的每个不可约分量$\varphi$均具有$\pi-$次数。

在上述定理2中，即使$O^{\pi\pi'}(G)=1$，一般也不能断言$\varphi(1)$总能整除$\chi(1)$。我们引用Dolfi在文献[3]中给出的例子2，其中$|G|=2^6\cdot 5$，$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$满足$\chi(1)=10$，此时$\pi=\{2,5\}$，并且$O^\pi(G)=1$，更有$O^{\pi\pi'}(G)=1$。但G有子群N，其阶$|N|=2^2\cdot 5$，并且χ_N存在一个不可约分量φ，使得$\varphi(1)=4$，从而$\varphi(1)$不能整除$\chi(1)$。

如无特别说明，本文所使用的群论和特征标理论的符号和术语都是标准的，例如，可参考[1]。

2. 预备

我们首先需要关于次正规子群的特征标次数的一个整除关系。

引理 1: 设G为有限群，$S \lhd\lhd G$。如果$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，并且$\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$为$\chi_S$的一个不可约分量，则$\varphi(1)$整除$\chi(1)$，并且$\chi(1)$整除$|G:S|\varphi(1)$。

证明：因为S是G的次正规子群，按定义，存在子群列

$$S = S_1 \lhd S_2 \lhd \cdots \lhd S_r = G,$$

我们将对r做归纳法。当$r=1$时，即$S=G$，结论显然成立。以下设$r>1$，令$N=S_{r-1}$，则N是G的正规子群。注意到$S \le N \le G$，并且$\varphi \in \mathrm{Irr}(S)$在$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$的下方，故存在某个$\theta \in \mathrm{Irr}(N)$既在$\varphi$的上方，同时又在$\chi$的下方。根据 Clifford 定理(见文献[1]中的定理 6.3)，则$\theta(1)$整除$\chi(1)$，再由[1]中的定理 11.29，则$\chi(1)$可整除$|G:N|\theta(1)$。又因为$S \lhd\lhd N$，根据归纳假设，则$\varphi(1)$可整除$\theta(1)$，并且$\theta(1)$整除$|N:S|\varphi(1)$。最后，综合上述整除关系即得所证结论。证毕。

其次，在定理 1 的证明中，我们需借助 Dolfi 的另一个主要结果。

引理 2：设G为有限群，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，$N \lhd L \le G$，$K \le L$。如果

$$\left(\chi(1), |G:L||N:N\cap K|\right) = 1,$$

则χ_N的每个不可约分量φ的次数$\varphi(1)$均可整除$\chi(1)$。

证明：即文献[3]中定理 A 的特例，从其结论中χ_N所有不可约分量的共轭性显然可推出相应的特征标次数的整除性。证毕。

3. 主要结果及证明

本节将给出引言中提及的定理 1 和定理 2 的证明。

定理 1 的证明：按条件 1)，从N是L的次正规子群，可知$M\cap N$也是$M\cap L$的次正规子群，即$M\cap N \lhd\lhd M\cap L \le M$。设$\varphi \in \mathrm{Irr}(N)$为$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$在$N$上限制$\chi_N$的任意一个不可约分量，在$\varphi$的下方选取一个不可约特征标$\theta \in \mathrm{Irr}(M\cap N)$，则$\theta$显然也在$\chi$的下方，即特征标的内积$\left[\chi_{M\cap N}, \theta\right] \ne 0$。注意到$M\cap N \le M \le G$，故存在某个不可约特征标$\psi \in \mathrm{Irr}(M)$，使得$\psi$既在$\chi$的下方，同时又在$\theta$的上方。

根据条件 1)，从$M \lhd\lhd G$可知$M\cap N \lhd\lhd N$。使用引理 1，则$\theta(1)$整除$\varphi(1)$，并且$\varphi(1)$整除$|N:M\cap N|\theta(1)$。但条件 2)给出$|N:N\cap M|$为$\pi-$数，据此推出$\varphi(1)$为$\pi-$数当且仅当$\theta(1)$为$\pi-$数。

类似地，从条件$M \lhd\lhd G$和引理 1，可知$\psi(1)$整除$\chi(1)$，故从$\chi(1)$为$\pi-$数的条件，推出$\psi(1)$亦为$\pi-$数，即ψ也有$\pi-$次数。

仍按条件 1)，由$K \le L\cap M$且$K \lhd M$，得$K \lhd L\cap M$，故有商群$(M\cap L)/K$，我们令$H/K = O_{\pi'}\left((M\cap L)/K\right)$，即$H/K$为该商群的最大正规$\pi'-$子群。因为$M\cap N$在商群$(M\cap L)/K$中的像为

$$(M\cap N)K/K \cong (M\cap N)/(M\cap N)\cap K = (M\cap N)/(K\cap N),$$

并且条件 4)断言$|M\cap N:K\cap N|$为$\pi'-$数，再从条件 1)中的$N \lhd\lhd L$可知$M\cap N$也是$M\cap L$的次正规子群，所以$(M\cap N)K/K$为$(M\cap L)/K$的一个次正规的$\pi'-$子群，据此导出$M\cap N \le H$。进而，由$M\cap N \lhd\lhd M\cap L$及$H \le M\cap L$，可知$M\cap N$也是H的一个次正规子群。

根据第一段关于特征标的选取，即$\theta \in \mathrm{Irr}(M\cap N)$在$\psi \in \mathrm{Irr}(M)$的下方，故存在某个不可约特征标$\xi \in \mathrm{Irr}(H)$，使得$\xi$既在$\theta$的上方，同时又在$\psi$的下方。因为$H$在$M\cap L$中正规，而$K \le H$也在$M$中正规(由条件(1))，并且$|M:M\cap L|$为$\pi'-$数，根据引理 2，则从$\psi(1)$为$\pi-$数可推出$\xi(1)$亦为$\pi-$数。

最后，从$M\cap N \lhd\lhd H$及引理 1，可知$\theta(1)$整除$\xi(1)$，故$\theta(1)$亦为$\pi-$数。按第二段的说明，此时$\varphi(1)$也

是$\pi-$数。证毕。

现在说明从本文定理 1 可推出 Dolfi 定理。事实上，假设 Dolfi 定理的条件成立，即$\left|O^{\pi}(G)L:L\right|$和$\left|N:N\cap O_{\pi}(G)\right|$均为$\pi'-$数，则从记号$O_{\pi}(G)$和$O^{\pi}(G)$的含义不难得出下述两个基本性质：

1) 设H为G的子群，如果$\left|G:H\right|$为$\pi'-$数，则$O_{\pi}(G)\subseteq H$；

2) 如果N是G的正规子群，则$O_{\pi}(N)=O_{\pi}(G)\cap N$。

据此即可证明：当$\left|O^{\pi}(G):O^{\pi}(G)\cap L\right|=\left|O^{\pi}(G)L:L\right|$为$\pi'-$数时，我们有

$$O_{\pi}(G)\cap O^{\pi}(G)=O_{\pi}\left(O^{\pi}(G)\right)\le L.$$

令$M=O_{\pi}(G),K=O_{\pi}(G)\cap O^{\pi}(G)$，则$K\lhd M\lhd G$且$K\le L$。再从

$$O_{\pi}(N)\le O^{\pi}(G)\cap N=M\cap N\le N$$

可知$\left|N:M\cap N\right|$为$\pi-$数，我们有

$$(M\cap N)/(K\cap N)\cong(M\cap N)\left(N\cap O_{\pi}(G)\right)/\left(N\cap O_{\pi}(G)\right)\le N/(N\cap M)$$

为$\pi-$群，所以$\left|M\cap N:K\cap N\right|$亦为$\pi'-$数，表明定理 1 中的四个条件均满足，故定理 1 推广了 Dolfi 定理。

最后，使用本文定理 1 即可证明定理 2。

定理 2 的证明： 令$M=O^{\pi}(G),K=O^{\pi'}(M)=O^{\pi\pi'}(G)$，则$K\lhd M\lhd G$，并且按定义，则$\left|G:M\right|$为$\pi-$数而$\left|M:K\right|$为$\pi'-$数。又因为

$$N/(M\cap N)\cong NM/M\le G/M,$$

故$\left|N:M\cap N\right|$亦为$\pi-$数。同理，我们有

$$(M\cap N)/(K\cap N)\cong(M\cap N)K/K\le M/K,$$

故$\left|M\cap N:K\cap N\right|$为$\pi'-$数。但已知$O^{\pi\pi'}(G)\subseteq N$，所以$K\le M\cap N\le M$，表明$\left|M:M\cap N\right|$亦为$\pi'-$数。最后，在定理 1 中取$L=N$，可知其所有的条件均满足，故所证结论成立。证毕。

4. 致谢

本文作者衷心感谢国家自然科学基金(11171194)的资助。

参考文献 (References)

[1] I. M. Isaacs. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1994.
[2] I. M. Isaacs. Constituents of restricted and induced characters in odd order groups. Journal of Algebra, 1995, 178(3): 991-1001.
[3] S. Dolfi. A note on character restrictions. Communications in Algebra, 2002, 30(7): 3429-3434.

