Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 192-201
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24030 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On Series Alternated with Positive and Negative Involving Reciprocals of Binominal Coefficients

Wanhui Ji, Laiping Zhang

Department of Basic, Yin Chuan University, Yinchuan
Email: jiwanhui2008@163.com

Received: Jun. 24th, 2012; revised: Jul. 15th, 2012; accepted: Aug. 1st, 2012

Abstract: Using one known series, we can structure several new alternated with positive and negative Series of reciprocals of binominal coefficients by splitting items. These denominators of series contains different the multiplication of one to five odd factors and binominal coefficients. And some identities of series of numbers values of reciprocals of binominal coefficients are given. The method of split items offered in this paper is a new combinatorial analysis way and an elementary method to construct new series.

Keywords: Binomial Coefficients; Split Terms; Reciprocals; Series; Form Closed; Alternated with Positive and Negative

关于正负相间二项式系数倒数级数

及万会，张来萍

银川大学基础部，银川
Email: jiwanhui2008@163.com

收稿日期：2012 年 6 月 24 日；修回日期：2012 年 7 月 15 日；录用日期：2012 年 8 月 1 日

摘　要：利用已知级数，通过裂项构造出一批新的正负相间二项式系数倒数级数，它们的分母分别含有 1 到 5 个奇因子与二项式系数的乘积表达式。所给出正负相间二项式系数倒数级数的和式是封闭形的。并给出正负相间二项式系数数倒数值级数恒等式。裂项的方法研究二项式系数倒数变换是组合分析的新手段，也是产生新级数的一个初等方法。

关键词：二项式系数；裂项；倒数；级数；封闭形；正负相间

1. 引言

二项式系数倒数变换问题在组合数学，解析数学等学科研究领域极为重要，引起了很多学者的广泛关注[1-7]。在文献[2-5]中，他们利用被称为 Lehmer 级数恒等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{n\binom{2n}{n}}=\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，$|x|<1$。使用积分，发生函数，白塔－伽马函数，递推等数学工具得到二项式系数倒数级数的重要结果。文献[1-6]的二项式系数倒数级数的和式是用积分形式表示的。显然，级数的和式不是封闭形式。要得到级数明显表达式还要进行积分运算。我们利用文献[8]中级数恒等式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 4^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$，通过裂项构造出一批新的正负相间二项式系数倒数级数，它们的分母分别含有 1 到 5 个奇因子与二项式系数的乘积表达式。所给出正负相间二项式系数倒数级数的和式是封闭形的。另外，在定理中，令 $x=\frac{1}{2}$，或 $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，给出了一些二项式系数倒数值级数恒

等式。因此，由此看出，利用已知级数使用裂项的方法研究二项式系数倒数变换是组合分析的新手段，也是产生新级数的一个初等方法。

2. 主要结论和证明

定理 1) 分母含有 1 个奇因子的正负相间二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)}=\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\sqrt{1+x^2}}=D_1 \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+3)}=-\left(\frac{2}{x^2}+1\right)D_1+\frac{2}{x^2} \tag{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+5)}=\left(\frac{8}{3x^4}+\frac{4}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)D_1-\frac{8}{3x^4}+\frac{4}{9x^2} \tag{3}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+7)}=\left(-\frac{16}{5x^6}-\frac{8}{5x^4}+\frac{2}{5x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1+\frac{16}{5x^6}-\frac{8}{15x^4}+\frac{6}{25x^2} \tag{4}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+9)}=\left(\frac{128}{35x^8}+\frac{64}{35x^6}-\frac{16}{35x^4}+\frac{8}{35x^2}-\frac{1}{7}\right)D_1-\frac{128}{35x^8}+\frac{64}{105x^6}-\frac{48}{175x^4}+\frac{8}{49x^2} \tag{5}$$

2) 分母含有 2 个因子的正负相间二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)}=\left(\frac{1}{x^2}+1\right)D_1-\frac{1}{x^2} \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+5)}=\left(-\frac{2}{3x^4}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3}\right)D_1+\frac{2}{3x^4}-\frac{1}{9x^2} \tag{7}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+3)(2m+5)}=\left(-\frac{4}{3x^4}-\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)D_1+\frac{4}{3x^4}+\frac{7}{9x^2} \tag{8}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+7)}=\left(\frac{8}{15x^6}+\frac{4}{15x^4}-\frac{1}{15x^2}+\frac{1}{5}\right)D_1-\frac{8}{15x^6}+\frac{4}{45x^4}-\frac{1}{25x^2} \tag{9}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+3)(2m+7)}=\left(\frac{4}{5x^6}+\frac{2}{5x^4}-\frac{3}{5x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1-\frac{4}{5x^6}+\frac{2}{15x^4}+\frac{11}{25x^2} \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+5)(2m+7)}=\left(\frac{8}{5x^6}+\frac{32}{15x^4}+\frac{7}{15x^2}-\frac{1}{15}\right)D_1-\frac{8}{5x^6}-\frac{16}{15x^4}+\frac{23}{225x^2} \tag{11}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+9)}=\left(-\frac{16}{35x^8}-\frac{8}{35x^6}+\frac{2}{35x^4}-\frac{1}{35x^2}+\frac{1}{7}\right)D_1+\frac{16}{35x^8}-\frac{8}{105x^6}+\frac{6}{175x^4}-\frac{1}{49x^2} \tag{12}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+3)(2m+9)}=\left(-\frac{64}{105x^8}-\frac{32}{105x^6}+\frac{8}{105x^4}-\frac{13}{35x^2}-\frac{1}{7}\right)D_1+\frac{64}{105x^8}-\frac{32}{315x^6}+\frac{8}{175x^4}+\frac{15}{49x^2} \tag{13}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+5)(2m+9)}=\left(-\frac{32}{35x^8}-\frac{16}{35x^6}+\frac{82}{105x^4}+\frac{29}{105x^2}-\frac{1}{21}\right)D_1+\frac{32}{35x^8}-\frac{16}{105x^6}-\frac{314}{525x^4}+\frac{31}{441x^2} \tag{14}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+7)(2m+9)}=\left(-\frac{64}{35x^8}-\frac{88}{35x^6}-\frac{4}{7x^4}+\frac{3}{35x^2}-\frac{1}{35}\right)D_1+\frac{64}{35x^8}+\frac{136}{105x^6}-\frac{68}{525x^4}+\frac{47}{1225x^2} \tag{15}$$

3) 分母含有 3 个因子的正负相间二项式系数倒数级数恒等式

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+5)}=\left(\frac{1}{3x^4}+\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{3}\right)D_1-\frac{1}{3x^4}-\frac{2}{9x^2} \tag{16}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+7)}=\left(-\frac{2}{15x^6}-\frac{1}{15x^4}+\frac{4}{15x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1+\frac{2}{15x^6}-\frac{1}{45x^4}-\frac{6}{25x^2} \tag{17}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+5)(2m+7)}=\left(-\frac{4}{15x^6}-\frac{7}{15x^4}-\frac{2}{15x^2}+\frac{1}{15}\right)D_1+\frac{4}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{113}{150x^2} \tag{18}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+3)(2m+5)(2m+7)}=\left(-\frac{2}{5x^6}-\frac{13}{15x^4}-\frac{8}{15x^2}-\frac{1}{15}\right)D_1+\frac{2}{5x^6}+\frac{3}{5x^4}+\frac{38}{225x^2} \tag{19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+9)}=\left(\frac{8}{105x^8}+\frac{4}{105x^6}-\frac{1}{105x^4}+\frac{6}{35x^2}+\frac{1}{7}\right)D_1-\frac{8}{105x^8}+\frac{4}{105x^6}-\frac{11}{175x^4}-\frac{8}{49x^2} \tag{20}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+5)(2m+9)}=\left(\frac{4}{35x^8}+\frac{2}{35x^6}-\frac{19}{105x^4}-\frac{8}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1-\frac{4}{35x^8}+\frac{2}{105x^6}+\frac{83}{525x^4}-\frac{10}{441x^2} \tag{21}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{8}{35x^8}+\frac{8}{21x^6}+\frac{11}{105x^4}-\frac{2}{105x^2}+\frac{1}{35}\right)D_1-\frac{8}{35x^8}-\frac{1}{5x^6}+\frac{43}{1575x^4}-\frac{12}{1225x^2} \tag{22}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+3)(2m+5)(2m+9)}=\left(\frac{16}{105x^8}+\frac{8}{105x^6}-\frac{37}{105x^4}+\frac{34}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1-\frac{16}{105x^8}+\frac{9}{35x^6}+\frac{169}{525x^4}-\frac{18}{145x^2} \tag{23}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+3)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{32}{105x^8}+\frac{58}{105x^6}+\frac{17}{105x^4}-\frac{4}{35x^2}-\frac{1}{35}\right)D_1-\frac{32}{105x^8}-\frac{22}{63x^6}-\frac{23}{525x^4}+\frac{82}{1225x^2} \tag{24}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{16}{35x^8}+\frac{36}{35x^6}+\frac{71}{105x^4}+\frac{2}{21x^2}-\frac{1}{105}\right)D_1-\frac{16}{35x^8}-\frac{76}{105x^6}-\frac{29}{140x^4}+\frac{176}{11025x^2} \tag{25}$$

4) 分母含有 4 个因子的正负相间二项式系数倒数级数恒等式

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}=\left(\frac{1}{15x^6}+\frac{1}{5x^4}+\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{15}\right)D_1-\frac{1}{15x^6}-\frac{7}{45x^4}-\frac{23}{225x^2} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+9)}&=\left(-\frac{2}{105x^8}-\frac{1}{105x^6}+\frac{3}{35x^4}+\frac{13}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1\\&\quad+\frac{2}{105x^8}-\frac{1}{315x^6}-\frac{43}{525x^4}-\frac{31}{441x^2}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+7)(2m+9)}&=\left(-\frac{4}{105x^8}-\frac{3}{35x^6}-\frac{1}{35x^4}+\frac{1}{21x^2}+\frac{1}{35}\right)D_1\\&\quad+\frac{4}{105x^8}-\frac{2}{7x^6}-\frac{13}{1575x^4}-\frac{47}{1225x^2}\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m!)^2(2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}&=\left(-\frac{2}{35x^8}-\frac{17}{105x^6}-\frac{1}{7x^4}-\frac{1}{35x^2}+\frac{1}{105}\right)D_1\\&\quad+\frac{2}{35x^8}+\frac{13}{105x^6}+\frac{103}{1575x^4}-\frac{71}{11025x^2}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (m!)^2 (2x)^{2m}}{2m!(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=\left(-\frac{8}{105x^8}-\frac{5}{21x^6}-\frac{9}{35x^4}-\frac{11}{105x^2}-\frac{1}{105}\right)D_1+\frac{8}{105x^8}+\frac{59}{315x^6}+\frac{73}{525x^4}+\frac{281}{11025x^2} \quad (30)$$

5) 分母含有 5 个因子的的正负相间二项式系数倒数级数恒等式

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (m!)^2 (2x)^{2m}}{2m!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{1}{105x^8}+\frac{4}{105x^6}+\frac{2}{35x^4}+\frac{4}{105x^2}+\frac{1}{105}\right)D_1-\frac{1}{105x^8}-\frac{2}{63x^6}+\frac{58}{1575x^4}-\frac{176}{11025x^2} \quad (31)$$

定理证明

文献[8]级数：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 4^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$，两端乘以$\frac{1}{x}$，得到(1)式，并设右端为$D_1$。

1) 对(1)式左端裂项，$1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{((n-1)!)^2 n^2 (2x)^{2n}}{(2n-2)!(2n-1)(2n)(2n+1)}=D_1$，令$n-1=m$，化成，

$1-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2m+2)x^2\cdot(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)}=D_1$，两端同乘$\frac{1}{x^2}$，

$$\frac{1}{x^2}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+3}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right]=\frac{1}{x^2}D_1 \quad (0.1)$$

对(0.1)式实行下列运算，得到分母含 1 个因子，2 个因子的二项式系数倒数恒等式。

①(0.1)式的分式化成部分分式

$\frac{1}{x^2}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1/2}{2m+1}+\frac{1/2}{2m+3}\right]=\frac{1}{x^2}D_1$，化简得(2)式，令(2)式右端设为$D_3$。

②由于D_1已知，由(0.1)整理得(6)式。

2) 对(1)式左端裂项，$1-\frac{2x^2}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[(n-2)!]^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-4)!(2n-3)(2n-2)!(2n-1)(2n)(2n+1)}=D_1$，令$n-2=m$，化成$1-\frac{2x^2}{3}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+2}\frac{[m!]^2(m+1)^2(m+2)^2 4x^4(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}=D_1$，两端同乘以$\frac{1}{x^4}$得到

$\frac{1}{x^4}-\frac{2}{3x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2}{(2m)!}\frac{(2m+2)(2m+4)(2x)^{2m}}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}=\frac{1}{x^4}D_1$，

$$\frac{1}{x^4}-\frac{2}{3x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+5}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)}+\frac{1}{(2m+3)(3m+5)}\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\right]=\frac{1}{x^4}D_1 \quad (0.2)$$

对(0.2)式实行下列运算，得到分母含 1 个，2 个，3 个因子的二项式系数倒数恒等式。

①(0.2)式所有分式化成部分分式，得到

$$\frac{1}{x^4}-\frac{2}{3x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{3/8}{2m+1}+\frac{1/4}{2m+3}+\frac{3/8}{2m+5}\right]=\frac{1}{x^4}D_1$$

由于D_1，D_3已知，化简得到(3)式，并令右端为D_5。

②在(0.2)式首先将 3 个因子的分式化成部分分式，然后对 2 个因子的分式每次保留 1 个，另 1 个化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^4}-\frac{2}{3x^2}+D_{15}+\frac{1}{8}D_1+\frac{1}{4}D_3+\frac{5}{8}D_5=\frac{1}{x^4}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{2}{x^4}-\frac{4}{3x^2}+D_{35}+\frac{3}{8}D_1-\frac{1}{4}D_3+\frac{7}{8}D_5=\frac{1}{x^4}D_1 \tag{B}$$

由于 D_1， D_3， D_5 已知，由(A)，(B)计算得到(7)，(8)式。

③在(0.2)式保留 3 个因子的分式，其他分式化成部分分式，

$$\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+D_{135}+\frac{1}{4}D_1+\frac{1}{2}D_3+\frac{1}{4}D_5=\frac{1}{x^4}D_1$$

由于 D_1， D_3， D_5 已知，化简得到(16)式。

3) 对(1)式左端裂项，$1-\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[(n-3)!\right]^2(n-2)^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-6)!(2n-5)\cdots(2n)(2n+1)}=D_1$，令 $n-3=m$，得出 $1-\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2}{(2m)!}\frac{(2m+2)(2m+4)(2m+6)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\frac{x^6(2x)^{2m}}{(2m+7)}=D_1$，两端同乘以 $\frac{1}{x^6}$ 得

$$\begin{aligned}1-\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\Bigg[&\frac{1}{2m+7}+\frac{1}{(2m+1)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+5)(2m+7)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+7)}\\&+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}\Bigg]=\frac{1}{x^6}D_1\end{aligned} \tag{0.3}$$

对(0.3)式实行下列运算，得到分母含 1 个，2 个，3 个，4 个因子的二项式系数恒等式。

①对(0.3)式所有分式化成部分分式，得到

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{5/16}{2m+1}+\frac{3/16}{2m+3}+\frac{3/16}{2m+5}+\frac{5/16}{2m+7}\right]=\frac{1}{x^6}D_1$$

由于 D_1， D_3， D_5 化简得到(4)式，并令(4)式右端为 D_7。

②对(0.3)式首先保留 2 个因子的分式，其他分式成部分分式。

然后对 2 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式得到：

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{17}+\frac{7}{48}D_1+\frac{3}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{23}{48}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{37}+\frac{5}{16}D_1-\frac{1}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{9}{48}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{57}+\frac{5}{16}D_1+\frac{3}{16}D_3-\frac{5}{16}D_5+\frac{13}{16}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{C}$$

由于 D_1， D_3， D_5， D_7 已知，由(A)，(B)，(C)计算得出(9)~(11)式。

③对(0.3)式首先保留 3 个因子的分式，其他分式项化成部分分式。

然后对 3 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式得到：

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{137}+\frac{11}{48}D_1+\frac{5}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{13}{48}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \quad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{157}+\frac{13}{48}D_1+\frac{3}{16}D_3+\frac{5}{16}D_5+\frac{11}{48}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \quad \text{(B)}$$

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{357}+\frac{5}{16}D_1+\frac{1}{16}D_3+\frac{7}{16}D_5+\frac{3}{16}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1 \quad \text{(C)}$$

由于 D_1， D_3， D_5， D_7 已知，由(A)，(B)，(C)计算得出(17)~(19)式。

④在(0.3)式保留 4 个因子的分式，其他分式项化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^6}-\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}-\left[D_{1357}+\frac{7}{24}D_1+\frac{1}{4}D_3+\frac{1}{8}D_5+\frac{1}{3}D_7\right]=\frac{1}{x^6}D_1$$

由于 D_1， D_3， D_5， D_7 已知，计算得出(26)式。

4) 对(1)式左端裂项，$1-\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}-\frac{16x^6}{35}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[(n-4)!\right]^2(n-3)^2(n-2)^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-8)!(2n-7)(2n-6)\cdots(2n)(2n+1)}=D_1$，令 $n-4=m$，化成 $1-\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}-\frac{16x^6}{35}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2}{(2m)!}\frac{(2m+2)(2m+4)(2m+6)(2m+8)x^8(2x)^{2m}}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=D_1$ 两端同乘以 $\frac{1}{x^8}$，得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\Bigg[&\frac{1}{2m+9}+\frac{1}{(2m+1)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+5)(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}\Bigg]=\frac{1}{x^8}D_1\end{aligned} \quad (0.4)$$

对(0.4)式实行下列运算，得到分母含 1 个，2 个，3 个，4 个，5 个因子的二项式系数恒等式。

①对(0.4)式所有分式化成部分分式，得到

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{35/128}{2m+1}+\frac{5/32}{2m+3}+\frac{9/64}{2m+5}+\frac{5/32}{2m+7}+\frac{35/128}{2m+9}\right]=\frac{1}{x^8}D_1,$$

由于 D_1， D_3， D_5， D_7 已知，计算得到(5)式。并令(5)式为 D_9 。

②在(0.4)式保留 2 个因子的分式，其他分式化成部分分式。

然后对这些 2 个因子的分式，每次保留 1 个，其他分式化成部分分式，得：

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{19}+\frac{19}{32}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{51}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{39}+\frac{35}{128}D_1-\frac{1}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{169}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{59}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3-\frac{7}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{67}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{C}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{19}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5-\frac{11}{32}D_7+\frac{99}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{D}$$

由于 D_1,D_3,D_5,D_7,D_9 已知由(A)，(B)，(C)，(D)计算得出(12)~(15)式。

③在(0.4)式保留 3 个因子的分式，其他分式化成部分分式。

然后对这些 3 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{139}+\frac{27}{128}D_1+\frac{23}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{97}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{159}+\frac{31}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{13}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{31}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{179}+\frac{97}{384}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{23}{96}D_7+\frac{27}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{C}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{359}+\frac{35}{128}D_1+\frac{7}{96}D_3+\frac{25}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{89}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{E}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{379}+\frac{35}{128}D_1+\frac{11}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{9}{32}D_7+\frac{73}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{F}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{579}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{1}{64}D_5+\frac{13}{32}D_7+\frac{19}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{G}$$

由于 D_1,D_3,D_5,D_7,D_9 已知由。(A)，(B)，(C)，(D)，(E)，(G)计算得出(20)~(25)式。

④在(0.4)式，保留 4 个因子的分式，其他分式化成部分分式。

然后对这些 4 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{1359}+\frac{33}{128}D_1+\frac{19}{96}D_3+\frac{7}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{107}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{1379}+\frac{101}{384}D_1+\frac{17}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{13}{96}D_7+\frac{109}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{1579}+\frac{103}{384}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{11}{64}D_5+\frac{11}{96}D_7+\frac{37}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{C}$$

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{3579}+\frac{35}{128}D_1+\frac{13}{96}D_3+\frac{13}{64}D_5+\frac{3}{32}D_7+\frac{113}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{D}$$

由于 D_1,D_3,D_5,D_7,D_9 已知，由(A)，(B)，(C)，(D)计算得到(27)~(30)式。

⑤在(0.4)式，保留 5 个因子的分式，其他分式化成部分分式。

$$\frac{1}{x^8}-\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{16}{35x^2}+D_{13579}+\frac{13}{48}D_1+\frac{1}{6}D_3+\frac{1}{8}D_5+\frac{1}{6}D_7+\frac{13}{48}D_9=\frac{1}{x^8}D_1$$

由于 D_1,D_3,D_5,D_7,D_9 已知，计算得出(31)式。定理证毕。

3. 一些封闭形数值级数

在定理公式(1)~(15)，令 $x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，设 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金比。

推论 1 分母含有奇因子的正负相间二项式系数倒数级数封闭形恒等式成立

1) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)}=\frac{4\sqrt{5}\ln\varphi}{5}$；

2) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)}=-\frac{36\sqrt{5}\ln\varphi}{5}+8$；

3) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)}=\frac{572\sqrt{5}\ln\varphi}{15}-\frac{368}{9}$；

4) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+7)}=\frac{916\sqrt{5}\ln\varphi}{5}+\frac{14792}{75}$；

5) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+9)}=\frac{29308\sqrt{5}\ln\varphi}{35}-\frac{3311008}{3675}$；

6) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)}=4\sqrt{5}\ln\varphi-4$；

7) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)}=-\frac{28\sqrt{5}\ln\varphi}{3}+\frac{92}{9}$；

8) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)}=-\frac{68\sqrt{5}\ln\varphi}{3}+\frac{220}{9}$；

9) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)}=\frac{92\sqrt{5}\ln\varphi}{3}-\frac{7396}{225}$；

10) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)}=44\sqrt{5}\ln\varphi-\frac{3548}{75}$；

11) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)}=\frac{332\sqrt{5}\ln\varphi}{3}-\frac{26788}{225}$；

12) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+9)}=-\frac{732\sqrt{5}\ln\varphi}{7}+\frac{413876}{3675}$；

13) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+9)}=-\frac{2956\sqrt{5}\ln\varphi}{21}+\frac{1670204}{11025}$；

14) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+9)}=-\frac{4196\sqrt{5}\ln\varphi}{21}+\frac{2370556}{11025}$；

15) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\binom{2m}{m}(2m+7)(2m+9)}=-\frac{3572\sqrt{5}\ln\varphi}{7}+\frac{2017708}{3675}$。

推论 2 分母含有 2^m 与奇因子乘积的正负相间二项式系数倒数级数封闭形恒等式成立

1) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+1)}=\frac{8\ln 2}{3}$； 2) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+3)}=-\frac{136\ln 2}{3}+16$；

3) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+5)}=\frac{1448\ln 2}{3}-\frac{1504}{9}$； 4) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+7)}=-\frac{69512\ln 2}{15}+\frac{120464}{75}$；

5) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+9)}=\frac{4448728\ln 2}{105}-\frac{53963072}{3675}$；

6) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)}=24\ln 2-8$；

7) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)}=\frac{1208\ln 2}{9}+\frac{376}{9}$；

8) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)}=264\sqrt{2}+\frac{824}{9}$；

9) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)}=\frac{3864\ln 2}{5}-\frac{60232}{225}$；

10) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)}=\frac{5736\ln 2}{5}-\frac{31624}{75}$；

11) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)}=\frac{12792\ln 2}{5}-\frac{199496}{225}$；

12) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+9)}=-\frac{185352\ln 2}{35}+\frac{7892264}{3675}$；

13) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+9)}=-\frac{2223416\ln 2}{315}+\frac{27010936}{11025}$；

14) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+9)}=-\frac{366504\ln 2}{35}+\frac{40011704}{11025}$；

15) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m\binom{2m}{m}(2m+7)(2m+9)}=-\frac{822552\ln 2}{35}+\frac{16170344}{3675}$。

参考文献 (References)

[1] B. Sury, T. N. Wang and F.-Z. Zhao. Some identities involving of binomial coefficients. Journal of Integer Sequences, 2004, 7: Article 04.2.8.
[2] A. Sofo. General properties involving reciprocal of binomial coefficients. Journal of Integral Sequences, 2006, 9: Article 06.4.5.
[3] J.-H. Yang, F.-Z. Zhao. Sums involving the inverses of binomial coefficients. Journal of Integer Sequences, 2006, 9: Article 06.4.2.
[4] S. Amghibech. On sum involving binomial coefficient. Journal of Integer Sequences, 2007, 10: Article 07.2.1.
[5] T. Trif. Combinatorial sums and series involving inverses of binomial coefficients. Fibonacci Quarterly, 2000, 38(1): 79-84.
[6] F.-Z Zhao, T. Wang. Some results for sums of the inverses of binomial coefficients. Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2005, 5(1): A22.

[7] R. Sprugnoli. Sums of reciprocals of the central binomial coefficients. Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2006, 6: A27.
[8] I. S. Gradshteyn, I. M. Zyzhik. A table of integral, series and products (7th edition). Amsterdam: Elsevier, 2007: 54.

