Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 216-220
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24033 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Explicit Structure of Solution of a Class of Variational Equation on Two Variable*

Shiliang Sun, Xiaoqian Huang

School of Mathematical Science, Jiangsu Normal University, Xuzou
Email: sun-sl62@jsnu.edu.cn

Received: Jun. 28th, 2012; revised: Jul. 16th, 2012; accepted: Jul. 29th, 2012

Abstract: This paper studies a class of Variational Equation on two Variable, proves the existence of solution and gives its explicit structure by analytical method.

Keywords: Optimization; Variational Equation; Analytical Method; Stochastic Control

一类两变量变分方程解的显式构造*

孙世良，黄晓倩

江苏师范大学数学科学学院，徐州
Email: sun-sl62@jsnu.edu.cn

收稿日期：2012 年 6 月 28 日；修回日期：2012 年 7 月 16 日；录用日期：2012 年 7 月 29 日

摘　要：本文利用分析的方法，证明了一类两变量变分方程解的存在性并给出其显示构造。

关键词：最优化；变分方程；分析方法；随机控制

1. 引言

众所周知，有关最优化和控制理论问题的研究常常会涉及到变分方程[1,2]，因此研究变分方程解的存在性及其构造就显得尤为重要。变分方程问题是附加了一些不等式约束条件的边值问题，因此它比单纯的方程问题要复杂的多[3,4]。有关变分方程解的存在性证明或解的构造，没有比较系统的方法，每类问题由其自身的条件产生独自的分析方法，即便是背景相近的一些变分方程，由于相应模型构造上的差异，其分析方法也有较大的差别。本文研究一种两变量的变分方程问题，证明了其解的存在性并给出解的具体构造。证明方法是分析性的，但隐含着较多的技巧。本文的变分方程来源于一类分红过程的比例再保险问题的奇异型随机控制，其在证明最佳奇异控制的存在性和确定最优分红比例及最佳控制的具体构造中起着不可替代的作用，本文的结果可借鉴用于类似文献[5]的奇异型随机控制问题

2. 定理及证明

本节先给出一个引理，此引理的结果在定理的证明中起着重要作用。

引理 记 $\alpha>0,\ \mu>0,\ \sigma>0$ 均为常数，设 $\theta_1,\ \theta_2$ 为方程 $\sigma^2\theta^2+2\mu\theta-2\alpha=0$ 的两个解，且 $\theta_1>\theta_2$，则有

i) $\theta_1>0>\theta_2$，且 $|\theta_2|>\theta_1$；

ii) $\forall d>0,\ \exists| b\in(d,+\infty)$，使得

*资助信息：国家自然科学基金(10971180)，江苏师范大学科研基金重点项目(09XLA02)。

$$e^{(\theta_2-\theta_1)(b-d)}=-\frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

证明 i) 由方程可知，$\theta_1+\theta_2=-\frac{2\mu}{\sigma^2}<0,\ \theta_1\theta_2=-\frac{2\alpha}{\sigma^2}<0$，即 θ_1 与 θ_2 异号，所以 $\theta_1>0>\theta_2$，又有 $\theta_1<-\theta_2=|\theta_2|$。

ii) 由 i)可知 $-\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\in(0,1)$，$\theta_2-\theta_1<0$。$\forall d>0$，记 $f(x)=e^{(\theta_2-\theta_1)(x-d)}$，则由其严格单调性可知存在唯一 $b\in(d,+\infty)$，使得 $f(b)=-\frac{\theta_1}{\theta_2}$，至此引理得证。进一步，由引理中结论可解得 $b=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)+d$。

定理 设 $\alpha>0,\ \mu>0,\ \sigma>0$ 均为引理中所述，取 $d=\frac{\mu\sigma^2}{\mu^2+2\alpha\sigma^2}>0$，由引理可得 $b=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)+d$，$A>0$ 为任意常数，则存在 $(0,+\infty)$ 上二次连续可导的单调增函数 $u(x)$，满足

i) $\forall x\in(0,+\infty)$，有 $u''(x)\le 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}u(x)=0$；

ii) $\forall x\in(b,+\infty)$，有 $u'(x)=A$；

iii) $$\max_{\lambda\in[0,1]}\left(\frac{1}{2}\sigma^2u''(x)\lambda^2+\mu u'(x)\lambda-\alpha u(x)\right)=\begin{cases}-\dfrac{\mu^2\left(u'(x)\right)^2}{2\sigma^2u''(x)}-\alpha u(x)=0, & 0<x<d\\ \dfrac{1}{2}\sigma^2u''(x)+\mu u'(x)-\alpha u(x)=0, & d\le x\le b\\ \dfrac{1}{2}\sigma^2u''(x)+\mu u'(x)-\alpha u(x)\le 0, & b<x<+\infty\end{cases}.$$

证明 以下分三个步骤来完成定理证明。

第一步：分段定义函数 $u(x)$。

当 $0<x<d$ 时，由方程 $-\frac{\mu^2\left(u'(x)\right)^2}{2\sigma^2u''(x)}-\alpha u(x)=0$，可解得 $u(x)=C\,x^{\frac{2\alpha\sigma^2}{\mu^2+2\alpha\sigma^2}}=C\,x^{\beta}$，其中 $C>0$ 为待定参数，$\beta=\frac{2\alpha\sigma^2}{\mu^2+2\alpha\sigma^2}=\frac{2\alpha}{\mu}d>0$ 为常数。

当 $d\le x\le b$ 时，微分方程 $\frac{1}{2}\sigma^2u''(x)+\mu u'(x)-\alpha u(x)=0$ 的特征方程为

$$\sigma^2\theta^2+2\mu\theta-2\alpha=0,$$

由引理可知 θ_1,θ_2 为其特征根，从而微分方程的通解为

$$u(x)=k_1e^{\theta_1x}+k_1e^{\theta_2x},$$

其中 k_1,k_2 为待定参数。

当 $b<x<+\infty$ 时，直接定义 $u(x)=A(x-b)+u(b)$ 至此得到 $u(x)$ 的分段表达式

$$u(x)=\begin{cases}C\,x^{\beta}, & 0<x<d\\ k_1e^{\theta_1x}+k_2e^{\theta_2x}, & d\le x\le b\\ A(x-b)+u(b), & b<x<+\infty\end{cases}.$$

第二步：为使 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次连续可导，以下确定待定参数 C,k_1,k_2。

I) 首先由定义知道 $u(x)$ 在 b 点连续，由二次连续可导，即

$$\begin{cases} u'_-(b) = u'_+(b) \\ u''_-(b) = u''_+(b) \end{cases}, \text{ 亦即} \begin{cases} k_1\theta_1 e^{\theta_1 b} + k_2\theta_2 e^{\theta_2 b} = A \\ k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 b} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 b} = 0 \end{cases},$$

解上述方程组得

$$k_1 = \frac{A\theta_2}{\theta_1(\theta_2-\theta_1)e^{\theta_1 b}} > 0\ ,\ \ k_2 = -\frac{A\theta_1}{\theta_2(\theta_2-\theta_1)e^{\theta_2 b}} < 0\,.$$

从而$u(x) = k_1 e^{\theta_1 x} + k_2 e^{\theta_2 x}$为严格增函数，进一步可判断在区间$[d,b]$上$u(x) > 0$，这是因为

$$\begin{aligned} u(d) &= k_1 e^{\theta_1 \mathrm{d}} + k_2 e^{\theta_2 \mathrm{d}} \\ &= \frac{A}{\theta_2-\theta_1}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}e^{\theta_1(\mathrm{d}-b)} - \frac{\theta_1}{\theta_2}e^{\theta_2(\mathrm{d}-b)}\right) \\ &= \frac{A}{\theta_2-\theta_1}\left(-e^{\theta_2(\mathrm{d}-b)} + e^{\theta_1(\mathrm{d}-b)}\right) = \frac{A}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(\mathrm{d}-b)}\left(e^{(\theta_2-\theta_1)(b-\mathrm{d})} - 1\right) \\ &= -\frac{A}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(\mathrm{d}-b)}\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2} > 0. \end{aligned}$$

II) 为使$u(x)$在d点二次连续可导，即满足

$$\begin{cases} u_+(d) = u_-(d) \\ u'_+(d) = u'_-(d) \\ u''_+(d) = u''_-(d) \end{cases}, \text{ 亦即} \begin{cases} k_1 e^{\theta_1 b} + k_2 e^{\theta_2 b} = C\,d^{\beta} \\ k_1\theta_1 e^{\theta_1 b} + k_2\theta_2 e^{\theta_2 b} = C\,\beta d^{\beta-1} \\ k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 b} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 b} = C\,\beta(\beta-1)d^{\beta-2} \end{cases}.$$

由上述第一式代入k_1, k_2可得

$$\frac{A}{\theta_2-\theta_1}\left(-e^{\theta_2(d-b)} + e^{\theta_1(d-b)}\right) = Cd^{\beta},\ \ -\frac{A}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(d-b)}\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2} = Cd^{\beta},$$

从而求得

$$C = \frac{A(\theta_1+\theta_2)e^{\theta_2(d-b)}}{d^{\beta}\theta_2(\theta_1-\theta_2)} > 0\,.$$

以下说明对上述求得的参数C，第二、三式也成立。

第二式的左边

$$u'_+(d) = k_1\theta_1 e^{\theta_1 d} + k_2\theta_2 e^{\theta_2 d} = \frac{A}{\theta_2-\theta_1}\left(-\theta_1 e^{\theta_2(d-b)} + \theta_2 e^{\theta_1(d-b)}\right) = \frac{A\theta_1}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(d-b)}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}e^{(\theta_2-\theta_1)(b-d)} - 1\right) = \frac{2A\theta_1}{\theta_1-\theta_2}e^{\theta_2(d-b)},$$

第二式的右边

$$u'_-(d) = C\beta d^{\beta-1} = \frac{A(\theta_1+\theta_2)e^{\theta_2(d-b)}}{\theta_2(\theta_1-\theta_2)}\cdot\frac{\beta}{d} = \frac{2A\theta_1}{\theta_1-\theta_2}e^{\theta_2(d-b)},$$

所以第二式成立，这里用到$\dfrac{\beta}{d} = \dfrac{2\alpha}{\mu} = \dfrac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$.

第三式的左边

$$u''_+(d) = k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 d} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 d} = \frac{A\theta_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\left(-e^{\theta_2(d-b)} + e^{\theta_1(d-b)}\right) = \frac{A\theta_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(d-b)}\left(e^{(\theta_2-\theta_1)(b-d)} - 1\right) = \frac{A\theta_1(\theta_1+\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}e^{\theta_2(d-b)},$$

第三式的右边

$$u''_-(d) = C\beta(\beta-1)d^{\beta-2} = \frac{A(\theta_1+\theta_2)e^{\theta_2(d-b)}}{\theta_2(\theta_1-\theta_2)} \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{d^2} = \frac{A\theta_1(\theta_1+\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}e^{\theta_2(d-b)},$$

所以第三式也成立，这里用到 $\frac{\beta(\beta-1)}{d^2} = \frac{2\alpha}{\mu} \cdot \frac{-\mu}{\sigma^2} = -\frac{2\alpha}{\sigma^2} = \theta_1\theta_2$。

至此说明 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二次连续可导，也是单调增函数。

第三步：以下证明 $u(x)$ 满足定理中的三个条件。

I) 当 $0<x<d$ 时，显然有 $u''(x) = C\beta(\beta-1)x^{\beta-2} < 0$， $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = 0$。

当 $d \le x \le b$ 时，代入 k_1, k_2 并整理得

$$u''(x) = k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 x} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 x} = \frac{A\theta_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\left(-e^{\theta_2(x-b)} + e^{\theta_1(x-b)}\right) = \frac{A\theta_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1}e^{\theta_2(x-b)}\left(e^{(\theta_2-\theta_1)(b-x)}-1\right) < 0.$$

当 $b<x<+\infty$ 时， $u''(x)=0$，至此 i)得证，由函数的构造 ii)是显然的。

II) 以下证明 iii)。对于 $x\in(0,+\infty)$，记关于 λ 的函数

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)\lambda^2 + \mu u'(x)\lambda - \alpha u(x),$$

则 $f(0) = -\alpha u(x) \le 0$，其对称点为 $\lambda^* = l(x) = -\frac{\mu u'(x)}{\sigma^2 u''(x)} > 0$。

当 $0<x<d$ 时，代入 $u(x) = Cx^\beta$ 可得， $\lambda^* = l(x) = -\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{x}{\beta-1} = \frac{x}{d} \in (0,1)$，所以

$$\max_{\lambda\in[0,1]} f(\lambda) = f(\lambda^*) = -\frac{\mu^2(u'(x))^2}{2\sigma^2 u''(x)} - \alpha u(x) = 0.$$

当 $d\le x\le b$ 时，代入 $u(x) = k_1e^{\theta_1 x} + k_1 e^{\theta_2 x}$ 可得，

$$l'(x) = -\frac{\mu}{\sigma^2}\left(\frac{u'(x)}{u''(x)}\right)' = -\frac{\mu}{\sigma^2}\left(\frac{k_1\theta_1 e^{\theta_1 x} + k_2\theta_2 e^{\theta_2 x}}{k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 x} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 x}}\right)' = \frac{\mu}{\sigma^2}\frac{k_1k_2\theta_1\theta_2(\theta_1-\theta_2)^2 e^{(\theta_1+\theta_2)x}}{\left(k_1\theta_1^2 e^{\theta_1 x} + k_2\theta_2^2 e^{\theta_2 x}\right)^2} > 0,$$

所以

$$\lambda^* = l(x) \ge l(d) = -\frac{\mu u'(d)}{\sigma^2 u''(d)} = -\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{C\beta d^{\beta-1}}{C\beta(\beta-1)d^{\beta-2}} = -\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{d}{\beta-1} = 1,$$

从而

$$\max_{\lambda\in[0,1]} f(\lambda) = f(1) = \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x) + \mu u'(x) - \alpha u(x) = 0.$$

当 $b<x<+\infty$ 时，有 $u(x) = A(x-b)+u(b)$，所以 $f(\lambda) = \mu A\lambda - \alpha u(x)$，从而

$$\max_{\lambda\in[0,1]} f(\lambda) = f(1) = \mu A - \alpha u(x) \le \mu A - \alpha u(b) = 0,$$

这是因为

$$\alpha u(b) = \alpha\left(k_1 e^{\theta_1 b} + k_2 e^{\theta_2 b}\right) = \frac{\alpha A}{\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = \alpha A\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_1\theta_2} = \mu A.$$

至此 iii)得证。

综合以上三步得到 $(0,+\infty)$ 上二次连续可导的单调增函数为

$$u(x)=\begin{cases} C x^{\beta}, & 0<x<d \\ k_1 e^{\theta_1 x}+k_2 e^{\theta_2 x}, & d\le x\le b \\ A(x-b)+u(b), & b<x<+\infty \end{cases},$$

其中待定参数分别为

$$C=\frac{A(\theta_1+\theta_2)e^{\theta_2(d-b)}}{d^{\beta}\theta_2(\theta_1-\theta_2)}>0,\ k_1=\frac{A\theta_2}{\theta_1(\theta_2-\theta_1)e^{\theta_1 b}}>0,\ k_2=-\frac{A\theta_1}{\theta_2(\theta_2-\theta_1)e^{\theta_2 b}}<0.$$

至此定理得证。

参考文献 (References)

[1] 孙世良, 刘坤会. 一类脉冲型平稳最佳随机控制之研究[J]. 数学学报, 1998, 41(1): 191-198.
[2] S. L. Sun, Q. Y. Wu. Stochastic control problem of impulse type with drift factor. 2012 International Conference on Systems and Informatics, Xuzhou, 19-20 May 2012: 284-289.
[3] 刘坤会. 一个平稳型的变分方程问题[J]. 工程数学学报, 1999, 16(4): 11-15.
[4] 孙世良. 一类平稳型对称变分方程解的显示结构[J]. 南京大学学报数学半年刊, 2004, 21(1): 162-169.
[5] 杨瑞成, 刘坤会. 考虑接待过程的比例再保险的奇异最优随机控制问题[J]. 北方交通大学学报, 2003, 27(6): 59-62.