Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 221-225
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24034 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Stability in the Busemann-Petty Problem for Arbitrary Measures*

Wei Wang

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan
Email: wangtou1010@163.com

Received: Jul. 2nd, 2012; revised: Jul. 17th, 2012; accepted: Jul. 29th, 2012

Abstract: Zvavitch found a generalization of the Busemann-Petty problem to arbitrary measures. In this paper, we study the stability in the Busemann-Petty problem for arbitrary measures by using Radon transform. As application, we obtain a hyperplane inequality for arbitrary measures in dimensions up to four. These results are consistent with Koldobsky's results which are obtained by using Fourier transform.

Keywords: The Busemann-Petty Problem; Star Bodies; Convex Bodies; Radon Transform

一般测度 Busemann-Petty 问题的稳定性*

汪　卫

湖南科技大学数学与计算科学学院，湘潭
Email: wangtou1010@163.com

收稿日期：2012 年 7 月 2 日；修回日期：2012 年 7 月 17 日；录用日期：2012 年 7 月 29 日

摘　要：基于 Zvavitch 将 Busemann-Petty 问题推广到了一般测度，本文利用 Radon 变换研究了一般测度 Busemann-Petty 问题的稳定性。作为应用，我们建立了 $n\left(n\le 4\right)$ 维空间中的一个关于一般测度的超截面不等式。这些结果与 Koldobsky 利用 Fourier 变换证明的结论是一致的。

关键词：Busemann-Petty 问题；星体；凸体；Radon 变换

1. 引言

设 $vol_i\left(K\right)$ 表示紧凸集 K 的 i 维 Lebesgue 测度，并且我们通常把 $vol_n\left(\cdot\right)$ 简写为 $V\left(\cdot\right)$ 或者 $\left|\cdot\right|$。令 B_2^n 和 S^{n-1} 分别表示 R^n 中的欧氏单位球和欧氏单位球面。设 $u\in S^{n-1}$，$u^{\perp}$ 表示与 u 正交的 $n-1$ 维线性子空间。如果 R^n 中的一个紧凸集具有非空内部，那么我们就把它称为一个凸体。

众所周知，著名的 Busemann-Petty 问题[1]就是：如果 K 和 L 是 R^n 中两个原点对称的凸体，并且对任意的 $u\in S^{n-1}$，都满足 $vol_{n-1}\left(K\cap u^{\perp}\right)\le vol_{n-1}\left(L\cap u^{\perp}\right)$，那么是否有式子成立，$V\left(K\right)\le V\left(L\right)$?

我们知道：当 $n\le 4$ 时，Busemann-Petty 问题的答案是肯定的；当 $n\ge 5$ 时，Busemann-Petty 问题的答案是否定的。然而这些结果的得到是一个漫长的过程，是经过一大批数学家的辛勤钻研才逐步解决的：Larman 和 Rogers[2] $n\ge 12$，Ball[3] $n\ge 10$，Giannopoulos[4] 和 Bourgain[5] $n\ge 7$，Papadimitrakis[6] 和 Gardner[7] $n\ge 5$，Gardner[8] $n=3$，Zhang[9]和 Gardner，Koldobsky，Schlumprecht[10] $n=4$。有关 Busemann-Petty 问题更具体和详细的历史渊源可以参照书本[11]或者[12]。

最近，Zvavitch[13]将 Busemann-Petty 问题推广到了一般测度。设 γ 是定义在 R^n 上的具有偶的连续密度函数

*湖南省教育厅资助项目(项目号 11C0542)和国家自然科学基金项目(项目号 11071156)资助。

的一般测度。如果 K 和 L 是 R^n 中两个原点对称的星体，并且对任意的 $u \in S^{n-1}$ 都满足 $\gamma\left(K \cap u^{\perp}\right) \le \gamma L \cap u^{\perp}$，那么是否有式子成立，$\gamma(K) \le \gamma(L)$?

Zvavitch 证明了一般测度的 Busemann-Petty 问题与 Busemann-Petty 问题的解是一致的，即：当 $n \le 4$ 时，结论成立；当 $n \ge 5$ 时，结论不成立。

几何不等式的稳定性研究也颇受数学界的亲睐(参考[14-20])，几何不等式的稳定性有利于进一步研究几何体的极值问题。我们利用 Radon 变换研究了一般测度 Busemann-Petty 问题的稳定性。

定理 1.1 设 K 和 L 是 R^n 中两个原点对称的星体，给定任意常数 ε，并且 γ 是定义在 R^n 上的具有偶的连续密度函数的一般测度。如果 K 是一个截面体，并且对于任意的 $u \in S^{n-1}$ 都有

$$\gamma\left(K \cap u^{\perp}\right) \le \gamma\left(L \cap u^{\perp}\right) + \varepsilon, \tag{1.1}$$

那么我们可以得出

$$\gamma(K) \le \gamma(L) + \frac{n}{n-1} c_n \varepsilon |K|^{\frac{1}{n}}, \tag{1.2}$$

其中常数 $c_n = \dfrac{\left|B_2^n\right|^{\frac{n-1}{n}}}{\left|B_2^{n-1}\right|}$，并且对于任意的非零自然数 n，都有 $c_n < 1$。

2. 记号和背景知识

设 K 是一个关于原点的星形集，则其径向函数定义如下：

$$\rho(K,u) = \max\left\{\lambda \ge 0 : \lambda u \in K\right\}, \quad u \in S^{n-1}, \tag{2.1}$$

如果定义在 S^{n-1} 的 $\rho(K,\cdot)$ 是连续的，并且原点是 K 的内点，那么我们就称 K 是一个星体。我们用 S^n 表示 R^n 中全体星体的集合。对于任意的星体 $K \in S^n$，其 Minkowski 泛函定义如下：

$$\|x\|_K = \min\left\{a \ge 0 : x \in aK\right\}. \tag{2.2}$$

如果给定星体 $K \in S^n$，对于任意的 $u \in S^{n-1}$，那么我们容易验证

$$\|u\|_K = \frac{1}{\rho(K,u)}. \tag{2.3}$$

本文的一个重要研究工具就是 Radon 变换。如果函数 $f \in C\left(S^{n-1}\right)$，那么 f 的球面 Radon 变换 Rf 定义如下(见[11])：

$$(Rf)(u) = \int_{S^{n-1} \cap u^{\perp}} f(v)\,\mathrm{d}v. \tag{2.4}$$

一个熟知的事实是(见[21])：若将球面 Radon 变换限制在具有直到无穷次可微的球面偶连续函数空间 $C_e^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$ 上，则球面 Radon 变换是一个连续双射。球面 Radon 变换一个十分有用的性质是它的自共轭性(见[12,21])：若 $f, g \in C\left(S^{n-1}\right)$，则

$$\int_{S^{n-1}} Rf(\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{S^{n-1}} f(\xi) Rg(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.5}$$

截面体在对偶 Brunn-Minkowski 理论中应用相当广泛。给定 S^n 中的一个星体 K，其截面体 IK 定义如下：

$$\rho(IK,u) = vol_{n-1}\left(K \cap u^{\perp}\right). \tag{2.6}$$

1988 年 Lutwak[22]率先应用 Radon 变换的自共轭性来研究 Busemann-Petty 问题与星体的截面体之间的联系，从而为 Busemann-Petty 问题的彻底解决开创了新局面。进一步，Goodey，Lutwak 和 Weil[23]用球面 Radon 变换

完全刻画了截面体的概念。

引理 2.1[23] 如果 S^n 中的星体 K 是一个截面体，那么当且仅当存在球面 S^{n-1} 上一个非负有限 Borel 测度 μ，使得对于任意的函数 $f\in C\left(S^{n-1}\right)$，下面的式子恒成立，

$$\int_{S^{n-1}}\|x\|_K^{-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{S^{n-1}}Rf(\theta)\mathrm{d}\mu(\theta)$$

设 γ 是定义在 R^n 上的具有偶的连续密度函数 f 的一般测度，并且对于任意的 $K\in S^n$，都有

$$\gamma(K)=\int_K f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

特别地，如果我们取 $f(x)=1_K(x)$，即：如果测度取定为我们熟知的 Lebesgue 测度。那么此时 $\gamma(K)=V(K)$。

为了后面计算的方便，我们将上面的两个式子化简为极坐标的形式。注意到 $x\in K\Leftrightarrow\|x\|_K\le 1$，我们令 $x=r\theta$，其中 $\theta\in S^{n-1},0\le r\le\|\theta\|_K^{-1}$，从而我们可以得出

$$\gamma(K)=\int_K f(x)\mathrm{d}x=\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{\|\theta\|_K^{-1}}r^{n-1}f(r\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta. \tag{2.8}$$

一般地，对于任意的 $u\in S^{n-1}$，我们也有

$$\gamma\left(K\cap u^{\perp}\right)=\int_{K\cap u^{\perp}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{S^{n-1}\cap u^{\perp}}\left(\int_0^{\|\theta\|_K^{-1}}r^{n-2}f(r\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=R\left(\int_0^{\|\theta\|_K^{-1}}r^{n-2}f(r\theta)\mathrm{d}r\right). \tag{2.9}$$

引理 2.2[9] 设 $a,b\in[0,\infty),n\in N,n\ge 2$。如果 g 是一个定义在 $\left[0,\max\{a,b\}\right)$ 上的非负可积函数，那么我们就有

$$\int_0^a r^{n-1}g(r)\mathrm{d}r-a\int_0^a r^{n-2}g(r)\mathrm{d}r\le\int_0^b r^{n-1}g(r)\mathrm{d}r-b\int_0^b r^{n-2}g(r)\mathrm{d}r.$$

3. 主要结论

引理 3.1 如果 μ 是球面 S^{n-1} 上一个非负有限 Borel 测度，使得对于任意的函数 $f\in C\left(S^{n-1}\right)$ 和截面体 K，都满足

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\|x\|_K^{-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{S^{n-1}}Rf(\theta)\mathrm{d}\mu(\theta),$$

那么

$$\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\mu(u)\le\frac{n}{n-1}c_n|K|^{\frac{1}{n}}.$$

证明 我们都知道 R^n 中的单位欧氏球 B_2^n 的体积为

$$\left|B_2^n\right|=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}, \tag{3.1}$$

单位欧氏球面 S^{n-1} 的表面积为 $\left|S^{n-1}\right|=n\left|B_2^n\right|$。

利用 Γ 函数的对数凸的性质，我们有这样的结论：对于任意的自然数 $n\in N$，都有

$$c_n=\frac{\left|B_2^n\right|^{\frac{n-1}{n}}}{\left|B_2^{n-1}\right|}<1. \tag{3.2}$$

注意到 $R1=\int_{S^{n-1}\cap u^{\perp}}1\mathrm{d}v=\left|S^{n-2}\right|$，在这里 $1(v)\equiv 1$。

下面我们结合引理 2.1，Hölder 不等式，体积的极坐标公式和式子(3.2)，可以得到

$$\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\mu(u)=\frac{1}{\left|S^{n-2}\right|}\int_{S^{n-1}}R1(u)\mathrm{d}\mu(u)=\frac{1}{\left|S^{n-2}\right|}\int_{S^{n-1}}\|x\|_K^{-1}\mathrm{d}x\le\frac{1}{\left|S^{n-2}\right|}\left|S^{n-1}\right|^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{S^{n-1}}\|x\|_K^{-n}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{n^{\frac{1}{n}}\left|S\right|^{\frac{n-1}{n}}}{\left|S^{n-2}\right|}|K|^{\frac{1}{n}}\le\frac{n}{n-1}c_n|K|^{\frac{1}{n}}.$$

定理 1.1 的证明 利用极坐标公式和 Radon 变换，定理 1.1 中的条件可以转化为：对于任意的 $u\in S^{n-1}$，都有

$$R\left(\int_0^{\|\cdot\|_K^{-1}}r^{n-2}f(r\cdot)\mathrm{d}r\right)(u)\le R\left(\int_0^{\|\cdot\|_L^{-1}}r^{n-2}f(r\cdot)\mathrm{d}r\right)(u)+\varepsilon. \tag{3.3}$$

显然非负函数的 Radon 变换仍然是非负的，上面的不等式两边同时在球面 S^{n-1} 上关于引理 2.1 中的 Borel 测度 μ 积分，我们可以得到

$$\int_{S^{n-1}}R\left(\int_0^{\|u\|_K^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(u)\le\int_{S^{n-1}}R\left(\int_0^{\|u\|_L^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(u)+\varepsilon\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\mu(u). \tag{3.4}$$

注意到星体 K 是一个截面体，结合引理 2.1，我们有下面的结论：

$$\int_{S^{n-1}}\|u\|_K^{-1}\left(\int_0^{\|u\|_K^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(u)\le\int_{S^{n-1}}\|u\|_K^{-1}\left(\int_0^{\|u\|_L^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mu(u)+\varepsilon\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\mu(u). \tag{3.5}$$

我们首先令 $a=\|u\|_K^{-1}, b=\|u\|_L^{-1}, g(r)=f(ru)$ 代入引理 2.2，然后两边同时在球面 S^{n-1} 上积分可得：

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{\|u\|_K^{-1}}r^{n-1}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}u-\int_{S^{n-1}}\left(\|u\|_K^{-1}\int_0^{\|u\|_K^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}u\\&\le\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{\|u\|_L^{-1}}r^{n-1}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}u-\int_{S^{n-1}}\left(\|u\|_K^{-1}\int_0^{\|u\|_L^{-1}}r^{n-2}f(ru)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{3.5}$$

将式子(3.4)和式子(3.5)两边对应相加，再利用式子(2.8)，我们可以得到：

$$\gamma(K)\le\gamma(L)+\varepsilon\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\mu(u). \tag{3.6}$$

最后结合引理 3.1，就证明了我们的定理 1.1。

注记 Koldobsky[24]最近利用 Fourier 变换证明了定理 1.1。同时著名的 Busemann-Petty 问题的稳定性也是由 Koldobsky[17]得到的。

在定理 1.1 中我们交换 K 与 L 的位置，可以得出下面的推论。

推论 3.2 如果 K 与 L 都是 R^n 中的截面体，γ 是定义在 R^n 上的具有偶的连续密度函数的一般测度，那么就有

$$\left|\gamma(K)-\gamma(L)\right|\le\frac{n}{n-1}\max_{u\in S^{n-1}}\left|\gamma\left(K\cap u^{\perp}\right)-\gamma\left(L\cap u^{\perp}\right)\right|\max\left\{|K|^{\frac{1}{n}},|L|^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

特别地，如果我们在推论 3.2 中取 $L=\varnothing$，我们就有下面的关于截面体的超截面不等式。

定理 3.3 如果 K 是 R^n 中的一个截面体，γ 是定义在 R^n 上的具有偶的连续密度函数的一般测度，那么我们就有

$$\gamma(K)\le\frac{n}{n-1}\max_{u\in S^{n-1}}\gamma\left(K\cap u^{\perp}\right)|K|^{\frac{1}{n}}.$$

Gardner[8]和张高勇[9]分别证明了 R^3 和 R^4 中所有原点对称凸体都是截面体，而 R^2 中的原点对称凸体显然是截面体，从而我们可得下面的结论。

推论 3.4 如果 K 是 $R^n\left(2\le n\le 4\right)$ 中的一个原点对称凸体，那么就有

$$V(K)^{\frac{n-1}{n}}\le\frac{n}{n-1}\max_{u\in S^{n-1}}vol_{n-1}\left(K\cap u^{\perp}\right).$$

推论 3.4 与著名的超截面猜想是相关的，超截面猜想表述为：存在一个通用的常数 C ，使得对于 R^n 中任意的原点对称凸体 K ，都满足 $V(K) \le C \max_{u \in S^{n-1}} vol_{n-1}(K \cap u^{\perp})$ 。遗憾的是这个猜想至今未被证实，目前对通用常数最好的估计是由 Klartag[25]给出的： $C \sim n^{\frac{1}{4}}$ 。

参考文献 (References)

[1] H. Busemann, C. M. Petty. Problem on convex bodies. Mathematica Scandinavica, 1956, 4: 88-94.
[2] D. G. Larman, C. A. Rogers. The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small. Mathematika, 1975, 22(2): 164-175.
[3] K. Ball. Cube slicing in R^n. Proceedings of the American Mathematical Society, 1986, 97(3): 465-473.
[4] A. A. Giannopoulos. A note on a problem of H. Busemann and C. M. Petty concerning sections of symmetric convex bodies. Mathematika, 1990, 37: 239-244.
[5] J. Bourgain. On the Busemann-Petty problem for perturbations of the ball. Geometric and Functional Analysis, 1991, 1(1): 1-13.
[6] M. Papadimitrakis. On the Busemann-Petty problem about convex, centrally symmetric bodies in R^n. Mathematika, 1992, 39: 258-266.
[7] R. J. Gardner. Intersection bodies and the Busemann-Petty problem. Transactions on American Mathematical Society, 1994, 342(1): 435-445.
[8] R. J. Gardner. A positive answer to the Busemann-Petty problem in three dimensions. Annals of Mathematics, 1994, 140(2): 435-447.
[9] G. Y. Zhang. A positive answer to the Busemann-Petty problem in four dimensions. Annals of Mathematics, 1999, 149: 535-543.
[10] R. J. Gardner, A. Koldobsky and Th. Schlumprecht. An analytic solution of the Busemann-Petty problem on sections of convex bodies. Annals of Mathematics, 1999, 149: 691-703.
[11] R. J. Gardner. Geometric tomography (2nd edition). New York: Cambridge University Press, 2006.
[12] A. Koldobsky. Fourier analysis in convex geometry. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 116, American Mathematical Society, 2005.
[13] A. Zvavitch. The Busemann-Petty problem for arbitrary measures. Mathematische Annalen, 2005, 331(4): 867-887.
[14] K. J. Böröczky. Stability of the Blaschke-Santaló and the affine isoperimetric inequality. Advances in Mathematics, 2010, 225(4): 1914-1928.
[15] K. J. Böröczky, D. Hug. Stability of the reverse Blaschke-Santaló inequality for zonoids and applications. Advances in Applied Mathematics, 2010, 44(4): 309-328.
[16] R. J. Gardner, S. Vassallo. Stability of inequalities in the dual Brunn-Minkowski theory. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1999, 231(2): 568-587.
[17] A. Koldobsky. Stability in the Busemann-Petty and Shephard problems. Advances in Mathematics, 2011, 228(4): 2145-2161.
[18] A. Koldobsky. Stability of volume comparsion for complex convex bodies. Archiv der Mathematik, 2011, 97: 91-98.
[19] R. Schneider. Stability in the Aleksandrov-Fenchel-Jessen theorem. Mathematika, 1989, 36: 50-59.
[20] 何斌吾, 李小燕, 冷岗松. 对偶 Aleksandrov-Fenchel 不等式的稳定性[J]. 数学学报, 2005, 48: 1071-1078.
[21] P. Goodey, W. Weil. Centrally symmetric convex bodies and the spherical Radon transform. Journal of Differential Geometry, 1992, 35(3): 675-688.
[22] E. Lutwak. Intersection bodies and dual mixed volumes. Advances in Mathematics, 1988, 71(2): 232-261.
[23] P. Goodey, E. Lutwak and W. Weil. Functional analytic characterizations of classes of convex bodies. Mathematische Zeischrift, 1996, 222: 363-381.
[24] A. Koldobsky. A hyperplane inequality for measures of convex bodies in R^n, $n \le 4$. Discrete & Computational Geometry, 2012, 47(3): 538-547.
[25] B. Klartag. On convex perturbations with a bounded isotropic constant. Geometric and Functional Analysis, 2006, 16(6): 1274-1290.