Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 268-275
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24041 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On the Function Estimate on Complete Riemannian Manifolds with Ricci Curvature Bounded from Below*

Xiaole Su[1], Hongwei Sun[2], Yusheng Wang[1#]

[1]Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, School of Mathematical Science, Beijing Normal University, Beijing
[2]School of Mathematical Science, Capital Normal University, Beijing
Email: suxiaole@bnu.edu.cn, hwsun@bnu.edu.cn, #wwyusheng@gmail.com

Received: Aug. 19th, 2012; revised: Sep. 2nd, 2012; accepted: Sep. 13th, 2012

Abstract: U. Abresch and D. Gromoll found a theorem on the function estimate on complete Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded from below[1]. In this paper, it is proved that the conclusion of the theorem still holds when a crucial condition of the theorem is weakened.

Keywords: Ricci Curvature; Function Estimate; Laplace Comparison

关于 Ricci 曲率有下界的完备黎曼流形上的函数估计*

苏效乐 [1]，孙宏伟 [2]，王雨生 [1#]

[1] 北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京
[2] 首都师范大学数学科学学院，北京
Email: suxiaole@bnu.edu.cn, hwsun@bnu.edu.cn, #wwyusheng@gmail.com

收稿日期：2012 年 8 月 19 日；修回日期：2012 年 9 月 2 日；录用日期：2012 年 9 月 13 日

摘　要： U. Abresch 和 D. Gromoll 给出了一个关于 Ricci 曲率有下界的完备黎曼流形上函数估计的重要定理[1]，本文利用更为精细的论述证明了将这个定理中的一个关键条件变弱后，定理的结论依然成立。

关键词： Ricci 曲率；函数估计；Laplace 比较定理

1. 引言

在黎曼几何中，由 Ricci 曲率有下界决定的比较定理中比较著名的有距离函数的 Laplace 比较定理和体积比较定理，这其中的关键是距离函数的 Laplace 和流形的体积均受 Ricci 曲率限制。基于这些基本的比较定理，关于 Ricci 曲率有下界的流形有一些非常漂亮的结果，比如 U. Abresch 和 D. Gromoll 在 1990 年的文章[1]中证明了 Ricci 曲率非负的开黎曼流形在一定条件下的同伦有限性。这是 Ricci 曲率比较几何方面比较重要的结果，被广泛引用。这个同伦有限性结果的证明用到了一个关键的定理(本文中的定理 2.1)，这个定理是利用函数的梯度上界及 Laplace 上界给出函数本身的估计。本文的主要工作就是推广这个关键定理：对函数 Laplace 的条件放宽后，证明结论依然成立。

2. 记号及主要结论

在讨论具有常截面曲率 k 的完备的单连通空间型 S_k^n 的测地极坐标系时，几何学家们经常引入统一的三角函数 $\mathrm{sn}_k(r)$, $\mathrm{cs}_k(r)$ 及 $\mathrm{ct}_k(r)$ 如下[1,2]：

*资助信息：国家自然科学基金资助项目(11001015, 11171025, 10801011)。
#通讯作者。

$$\mathrm{sn}_k(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}r\right), & k>0\\ r, & k=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{-k}}\sinh\left(\sqrt{-k}r\right), & k<0\end{cases},\qquad \mathrm{cs}_k(r)=\begin{cases}\cos\left(\sqrt{k}r\right), & k>0\\ 1, & k=0\\ \cosh\left(\sqrt{-k}r\right), & k<0\end{cases},\qquad \mathrm{ct}_k(r)=\frac{\mathrm{cs}_k(r)}{\mathrm{sn}_k(r)}.$$

这里面要求 $kr^2\le\pi^2$，直接演算可知 $\mathrm{ct}_k(r)$ 关于 k 和 r 分别都是严格单调减函数。

取 S_k^n 上一点 p，记 $d(p,\cdot)$ 为到点 p 的距离函数，且记 $B(p,l)=\left\{x\in S_k^n \middle| d(p,x)<l\right\}$。解方程

$$\begin{cases}\Delta f\left(d(p,x)\right)=1, & x\in B(p,l)\setminus\{p\}\\ f\left(d(p,q)\right)=0,\quad \nabla d(p,x)|_q=0, & q\in\partial B(p,l)\end{cases}$$

可得 $f(d)=\iint_{d\le t\le\tau\le l}\left(\dfrac{\mathrm{sn}_k(\tau)}{\mathrm{sn}_k(t)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$，其中 $k>0$ 时要补充条件 $kl^2\le\pi^2$。记[1]

$$\varphi_{n,k}(\rho,l)=\iint_{\rho\le t\le\tau\le l}\left(\frac{\mathrm{sn}_k(\tau)}{\mathrm{sn}_k(t)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t. \tag{1}$$

易见 $\varphi_{n,k}(\rho,l)$ 为非负函数，且当 $k=0$ 时[3]，

$$\varphi_{n,0}(\rho,l)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left(\rho^2+\dfrac{2}{n-2}l^n\rho^{2-n}-\dfrac{n}{n-2}l^2\right), & n\ge 3\\ \dfrac{1}{2}l^2\ln\left(\dfrac{l}{\rho}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\rho^2-l^2\right), & n=2\end{cases}.$$

现在我们给出文章[1]中我们要推广的定理：

定理 2.1[1] 令 M^n 是一个 n 维完备黎曼流形，f 是定义在 M 上以 p 为中心 R 为半径的开球 $B(p,R)$ 上的非负 Lipschitz 函数。假设

(i) 流形 M 在 $B(p,R)$ 上的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}\ge(n-1)k$，

(ii) 函数 f 的 Lipschitz 系数 $\mathrm{Lip}(f)\le C_1$，

(iii) f 在 $z\in B(p,R)$ 处取得 0 值，且记 $l=d(p,z)$，

(iv) 在 $B(p,R)$ 上，在闸函数意义下有 $\Delta f\le C_2$，

则有

$$f(p)\le\inf_{\rho\in(0,l)}\left\{C_1\rho+C_2\varphi_{n,k}(\rho,l)\right\}. \tag{2}$$

注 1 连续函数 f 在某区域 D 上在闸函数意义下(in the barrier (or support) sense) $\Delta f\le C$ 是指对任意 $q\in D$ 及任意 $\varepsilon>0$，存在点 q 的小邻域 $B(q,r_\varepsilon)$ 及其上的一个光滑函数 f_{q,r_ε} 满足

$$f_{q,r_\varepsilon}(q)=f(q),\ f_{q,r_\varepsilon}(x)\Big|_{x\in B(q,r_\varepsilon)}\ge f(x),\quad \Delta f_{q,r_\varepsilon}(q)\le C+\varepsilon. \tag{3}$$

我们称 f_{q,r_ε} 为 f 在 q 处的一个闸函数。

注 2 显然，在定理 2.1 中 $C_1\ge 0$；而且由下面的极大值原则(定理 2.3)可得 $C_2\ge 0$。

注 3 由经典的 Bonnet-Myers 定理[4]知当 $k>0$ 时我们可设 $kR^2\le\pi^2$，进而有 $kl^2<\pi^2$。

注 4 定理 2.1 的一个直接应用就是用来估计 Ricci 曲率有下界的黎曼流形上的 Excess 函数[1](Excess 函数定义如下：给定黎曼流形 M 上两个不同的点 p 和 q，对于任意的 $x\in M$，定义 $e(x)=d(p,x)+d(q,x)-d(p,q)$，其中 $d(\cdot,\cdot)$ 为 M 上的距离函数，称 $e(x)$ 为 M 上由点 p 和 q 决定的 Excess 函数)，利用对 Excess 函数的估计 U. Abresch

和 D. Gromoll 证明了引言中的同伦有限性结果。

本文证明了在减弱定理 2.1 中的条件(iv)后，定理 2.1 的结论依然成立，具体描述如下：

定理 2.2 在定理 2.1 中如果将条件(iv)改为如下(其它条件不变)：

(iv)' 在闭球 $\overline{B(p,l)}$ 上，在闸函数意义下有 $\Delta f \le C_2$；在 $B(p,R)\setminus\overline{B(p,l)}$ 上，在闸函数意义下 $\Delta f \le C_3$，则定理 2.1 的结论即(2)式依然成立。

注 5 条件(iv)'减弱了条件(iv)，(iv)中要求 $\Delta f \le C_2$ 在整个 $B(p,R)$ 上成立，而(iv)中只要求 $\Delta f \le C_2$ 在 $\overline{B(p,l)}$ (注意 $l<R$)上成立，在 $B(p,R)\setminus\overline{B(p,l)}$ 上 $\Delta f \le C_3$ (这里 C_3 可以任意大)。虽然我们减弱了条件，但是定理 2.2 的结论依然是(2)式成立，而(2)式仅仅与 C_1 和 C_2 有关，与 C_3 无关!

定理 2.2 的证明思路与定理 2.1 的相同，只是需要更为精细巧妙的讨论。证明的主要工具是极大值原则和 Laplace 比较定理。

定理 2.3(极大值原则[1,3]) 令 M 是一个连通的黎曼流形，f 是 M 上的连续函数。如果在闸函数意义下有 $\Delta f \ge 0$ (≤ 0)，则 f 不可能取得局部极大值(极小值)，除非 f 可以取到局部常值。

定理 2.4(Laplace 比较定理[1,5]) 令 M^n 是完备黎曼流形，且其 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}\ge(n-1)k$。记 $r(x)=d(p,x)$ 为到点 $p\in M$ 的距离函数，则在 r 的光滑点处有

$$\Delta r \le (n-1)\mathrm{ct}_k(r).$$

3. 定理 2.2 的证明

首先注意到由定理 2.1 我们可以设 $C_3>C_2$。假设定理 2.2 中的结论不正确(参见(2)式)，则存在 $\rho_0\in(0,l)$ 使得

$$f(p)>C_1\rho_0+C_2\varphi_{n,k}(\rho_0,l).$$

由于 $\varphi_{n,k}(\rho_0,l)$ 对 k 连续依赖，所以对于小于且充分接近 k 的 $\tilde{k}$ 都有 [1]

$$f(p)>C_1\rho_0+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho_0,l).$$

进而由 $\varphi_{n,k}(\rho_0,l)$ 对 l 的连续依赖(注意此时 $\tilde{k}l^2<\pi^2$，见注 3)知对于大于且充分接近 l 的 $\tilde{l}$ 都有

$$f(p)>C_1\rho_0+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho_0,\tilde{l}). \tag{4}$$

引理 3.1 对于满足(4)式的充分接近 l 的 $\tilde{l}$，都存在相应的 $\hat{l}\in(l,\tilde{l})$ 满足

$$g_1(\rho)|_l \ge g_2(\rho)|_{\hat{l}},\quad g_1'(\rho)|_l \le g_2'(\rho)|_{\hat{l}},\quad g_1''(\rho)|_l < g_2''(\rho)|_{\hat{l}},$$

其中 $g_1(\rho)=C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})$，$g_2(\rho)=C_3\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})$。

证明 由定义(见(1)式)知

$$\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})=\int_\rho^{\tilde{l}}\mathrm{d}t\int_t^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\tau)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(t)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau,$$

对 ρ 求导可得

$$\left(\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})\right)'=-\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\tau)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\rho)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau,\ \left(\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})\right)''=1+(n-1)\mathrm{ct}_{\tilde{k}}(\rho)\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\tau)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\rho)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

这里的“$'$”和“$''$”都是指对 ρ 求导，下同。因此在 $\rho\to\tilde{l}^-$ 时，$\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})$ 单调递减到 0，$\left(\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho,\tilde{l})\right)'$ 单调递增到 0，于是我们知存在 $l_1,l_2\in(l,\tilde{l})$ 使得(注意 $C_3>C_2$)。

[1] 因为流形 M 在 $B(p,R)$上满足 $\mathrm{Ric}\ge(n-1)k$，所以我们只考虑小于 k 的 $\tilde{k}$，这对于引理 3.2 来说至关重要。

$$g_1(l)\ge g_2(l_1),\quad g_1'(l)\le g_2'(l_2).$$

另外由(5)式知在 $\rho\to\tilde{l}^-$ 时，$\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)\right)''\to 1$ (注意 $\tilde{k}>0$ 时我们可以假设 $\tilde{k}\tilde{l}^2<\pi^2$，因为 $\tilde{l}$ 充分接近于 l 而且 $kl^2<\pi^2$，见注 3)，从而当 $\tilde{l}$ 充分接近于 l 时有(注意 $C_3>C_2$)

$$g_1''(l)<g_2''(\rho),\ \forall\rho\in\left(l,\tilde{l}\right).$$

此时由 $\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)$ 及 $\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)\right)'$ 的单调性知取 $\hat{l}=\max\{l_1,l_2\}$ 即可。证毕。

令 $c=\hat{l}-l,\overline{c}=\tilde{l}-\hat{l},H_0=g_1(l)-g_2(l)$，则 $c+\overline{c}=\tilde{l}-l$。由引理 3.1 知

$$c>0,\ \overline{c}>0,\ 0\le H_0<g_1(l).\tag{6}$$

接下来我们要在(4)式成立的前提下构造一个连续函数[2] $h:\overline{B(p,l+\overline{c})}\to[0,+\infty)$，然后得到矛盾，从而完成定理的证明。对于任意的 $q\in\overline{B(p,l+\overline{c})}$，定义

$$h(q)=\varphi_{\rho_0}\left(d(p,q)\right),\tag{7}$$

其中

$$\varphi_{\rho_0}(d)=\begin{cases}C_1(\rho_0-d)+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho_0,\tilde{l}\right), & 0\le d\le\rho_0\\ C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d,\tilde{l}\right), & \rho_0\le d\le l\\ C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d+c,\tilde{l}\right)+H_0, & l\le d\le l+\overline{c}\end{cases}.\tag{8}$$

断言 1 $(f-h)|_{\overline{B(p,l+\overline{c})}\setminus B(p,\rho_0)}$ 在 $\overline{B(p,l+\overline{c})}\setminus B(p,\rho_0)$ 的内部取得极小值。

证明 首先，对任意 $x\in\overline{B(p,\rho_0)}$，有

$$\begin{aligned}(f-h)(x)&=f(x)-h(x)=f(x)-\left[C_1\left(\rho_0-d(p,x)\right)+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho_0,\tilde{l}\right)\right]\\&=f(x)+C_1d(p,x)-\left[C_1\rho_0+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho_0,\tilde{l}\right)\right]>f(x)+C_1d(p,x)-f(p)\\&\ge C_1d(p,x)-\left|f(p)-f(x)\right|\ge C_1d(p,x)-C_1d(p,x)=0,\end{aligned}\tag{9}$$

其中第一个不等号用到了(4)式，倒数第二步用到了 f 的 Lipschitz 性质即条件(ii)。

再者，对任意 $x\in\partial\overline{B(p,l+\overline{c})}$ 有(注意 $l+c+\overline{c}=\tilde{l}$)

$$\begin{aligned}(f-h)(x)&=f(x)-h(x)=f(x)-\left[C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,x)+c,\tilde{l}\right)+H_0\right]\\&=f(x)-\left[C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(l+\overline{c}+c,\tilde{l}\right)+H_0\right]=f(x)-\left[C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\tilde{l},\tilde{l}\right)+H_0\right]\\&=f(x)-\left[0+H_0\right]\ge 0-H_0=-H_0,\end{aligned}\tag{10}$$

其中倒数第三步用到了 $\varphi_{n,k}(\rho,l)$ 的定义(见(1)式)，倒数第二步用到了定理的条件 f 非负。

最后，注意 $z\in B(p,l+\overline{c})\setminus\overline{B(p,\rho_0)}$ (参见条件(iii))，进而结合(6)式有

$$(f-h)(z)=f(z)-h(z)=0-h\left(d(p,z)\right)=-h(l)=-g_1(l)<-H_0\le 0.\tag{11}$$

综合(9)~(11)三式就是

$$(f-h)|_{\overline{B(p,\rho_0)}}>0,\ (f-h)|_{\partial\overline{B(p,l+\overline{c})}}\ge -H_0,\ (f-h)|_z<-H_0\le 0.$$

由此可知断言 1 成立。

断言 2 在闸函数意义下，$\Delta(f-h)|_{B(p,l+\overline{c})\setminus\overline{B(p,\rho_0)}}\le 0$.

[2] 本文的证明与定理 2.1 的证明[1]的关键不同之处在于此处函数的构造，而且证明所构造函数的 Laplace 在闸函数意义下有相应下界要复杂很多。

显然由定理 2.3 知，断言 1 与断言 2 矛盾，由此可知(4)式不成立，从而定理 2.2 成立。

剩下的任务就是证明断言 2。而由条件(iv)'知仅需要证明在闸函数意义下

$$\begin{cases}\Delta h|_{\overline{B(p,l)}\setminus\overline{B(p,\rho_0)}}\geq C_2\\ \Delta h|_{B(p,l+\overline{c})\setminus\overline{B(p,l)}}\geq C_3\end{cases}.$$

下面我们分 a)，b)，c)三部分完成此证明，进而就完成了定理 2.2 的整个证明。

a) $\Delta h|_{B(p,l)\setminus\overline{B(p,\rho_0)}}\geq C_2$。这是下面引理 3.2 的推论。

引理 3.2 在 $B\left(p,\tilde{l}\right)$ 上，在闸函数意义下 $\Delta\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right),\tilde{l}\right)\geq 1$。

证明 距离函数 $d\left(p,\cdot\right)$ 在 $q\in B\left(p,\tilde{l}\right)$ 处不一定光滑，但是我们知道在 p 与 q 之间的某测地线 $\left[pq\right]$ 上取到点 p 距离为ε的点 p_ε 后，函数 $\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)$ 在 q 处一定光滑。显然，$\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)|_q=d\left(p,\cdot\right)|_q$，而且在 q 的任一邻域上有 $\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)\geq d\left(p,\cdot\right)$。因此

$$\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)|_q=\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right),\tilde{l}\right)|_q,\tag{12}$$

且由 $\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)$ 对 ρ 单调递减(参见(5)式)知在 q 的充分小的邻域上有

$$\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)\leq\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right),\tilde{l}\right).\tag{13}$$

由 $\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(r\right)$ 关于 k 是严格单调减函数知

$$\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)-\mathrm{ct}_k\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)>0.$$

再由 $\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(r\right)$ 在 $r=d\left(p_\varepsilon,q\right)$ 处连续知当 ε 充分小时

$$\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)-\mathrm{ct}_k\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)>0.$$

于是当 ε 充分小时直接计算可得(其中为了方便计算，我们记 $\rho=\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,q\right)$)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)\Big|_q&=\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)\right)''\Big|_q\cdot\left\|\nabla d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)\right\|_q^2+\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)\right)'\Big|_q\cdot\Delta d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)\Big|_q\\&\geq\left[\left(n-1\right)\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(\rho\right)\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\tau\right)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\rho\right)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau+1\right]\cdot 1+\left[-\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\tau\right)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\rho\right)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau\right]\cdot\left(n-1\right)\mathrm{ct}_k\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)\\&=1+\left(n-1\right)\left(\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(\rho\right)-\mathrm{ct}_k\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right)\right)\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\tau\right)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}\left(\rho\right)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau\geq 1,\end{aligned}\tag{15}$$

其中求导运算参见引理 3.1 证明中的(5)式，第一个不等号是因为$\left\|\nabla d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)\right\|_q=1$，且由定理 2.4(注意条件(i))有

$$\Delta d\left(p_\varepsilon,\cdot\right)|_q\leq\left(n-1\right)\mathrm{ct}_k\left(d\left(p_\varepsilon,q\right)\right);$$

第二个不等号由(14)式得到。

由(12)，(13)，(15)三式知 $\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\varepsilon+d\left(p_\varepsilon,\cdot\right),\tilde{l}\right)$ 是 $\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right),\tilde{l}\right)$ 在 q 处的一个闸函数(参见(3)式)。由 q 的任意性知在 $B\left(p,\tilde{l}\right)$ 上，在闸函数意义下 $\Delta\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right),\tilde{l}\right)\geq 1$ 成立。证毕。

b) $\Delta h|_{B(p,l+\overline{c})\setminus\overline{B(p,l)}}\geq C_3$。同样这是下面引理 3.3 的推论。

引理 3.3 当 $\tilde{l}$ 充分接近于 l 时，在 $B\left(p,l+\overline{c}\right)\setminus\overline{B\left(p,r_0\right)}$ 上，在闸函数意义下 $\Delta\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d\left(p,\cdot\right)+c,\tilde{l}\right)\geq 1$，其中 $0<r_0<l$。

证明 由引理 3.2 的证明知不妨设 $d\left(p,\cdot\right)+c$ 在 $q\in B\left(p,l+\overline{c}\right)\setminus\overline{B\left(p,r_0\right)}$ 处光滑(否则取相应的 p_ε 讨论然后令 $\varepsilon\to 0$ 即可)。因为 $k>\tilde{k}$ 且 $kl^2<\pi^2$，所以可设 $k\tilde{l}^2<\pi^2$ (注意 $\tilde{l}$ 与 l 充分近)，从而 $\tilde{k}\tilde{l}^2<\pi^2$。由 $\mathrm{ct}_k(r)$在 $kr^2<\pi^2$ 时

关于 k 严格单调递减知(注意 $d(p,q)<\tilde{l}$)

$$\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d(p,q)\right)-\mathrm{ct}_{k}\left(d(p,q)\right)>0. \tag{16}$$

另外注意到 $\mathrm{ct}_{\tilde{k}}(r)$ 在闭区间 $I=\left[r_0,\tilde{l}\right]$ 上关于 r 一致连续，则对于任意 $\varepsilon_1>0$ 存在 $\delta_1>0$ 使得只要 $r_1,r_2\in I$ 且 $\left|r_1-r_2\right|<\delta_1$ 就有

$$\left|\mathrm{ct}_{\tilde{k}}(r_1)-\mathrm{ct}_{\tilde{k}}(r_2)\right|<\varepsilon_1. \tag{17}$$

特别地取 $\varepsilon_1=\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d(p,q)\right)-\mathrm{ct}_{k}\left(d(p,q)\right)>0$ (参见(16)式)。由于 $0<r_0<d(p,q)<d(p,q)+c<\tilde{l}$ ，所以只要 $\left|\tilde{l}-l\right|<\delta_1$，则 $\left|\left(d(p,q)+c\right)-d(p,q)\right|=c<\left|\tilde{l}-l\right|<\delta_1$，于是可以在(17)式中取 $r_1=d(p,q)+c, r_2=d(p,q)$ 得

$$\left|\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d(p,q)+c\right)-\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d(p,q)\right)\right|<\varepsilon_1. \tag{18}$$

结合(16)，(18)两式就有

$$\mathrm{ct}_{\tilde{k}}\left(d(p,q)+c\right)-\mathrm{ct}_{k}\left(d(p,q)\right)>0. \tag{19}$$

类似引理 3.2 的证明，计算可得(其中为了方便计算，我们记 $\rho=d(p,q)+c$)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,\cdot)+c,\tilde{l}\right)\Big|_q&=\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,\cdot)+c,\tilde{l}\right)\right)''\Big|_q\cdot\left\|\nabla d(p,\cdot)\right\|_q^2+\left(\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,\cdot)+c,\tilde{l}\right)\right)'\Big|_q\cdot\Delta d(p,\cdot)|_q\\&\geq 1+(n-1)\left(\mathrm{ct}_{\tilde{k}}(\rho)-\mathrm{ct}_{k}\left(d(p,q)\right)\right)\int_\rho^{\tilde{l}}\left(\frac{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\tau)}{\mathrm{sn}_{\tilde{k}}(\rho)}\right)^{n-1}\mathrm{d}\tau\geq 1,\end{aligned}$$

其中最后一个不等号应用了(19)式。证毕。

c) 在闸函数意义下 $\Delta h|_{\partial B(p,l)}\geq C_2$。

证明 注意 $\hat{l}=l+c$ ，则由引理 3.1 知

$$g_1'(l)\leq g_2'(l+c),\quad g_1''(l)<g_2''(l+c).$$

令 $u(\rho)=g_1(\rho)-g_2(\rho+c)$ ，则

$$u'(l)=g_1'(l)-g_2'(l+c)\leq 0,\quad u''(l)=g_1''(l)-g_2''(l+c)<0.$$

由此可知 $u(\rho)$ 在 l 的右邻域内单调递减, 即对充分小的 $\delta>0$ 及任意 $\rho\in[l,l+\delta)$ 都有

$$g_1(\rho)-g_2(\rho+c)=u(\rho)\leq u(l)=g_1(l)-g_2(l+c)=H_0, \tag{20}$$

由于 $g_1(\rho)=C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right),\ g_2(\rho)=C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)$ (参见引理 3.1)，(20)式可变形为

$$C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)\leq C_3\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho+c,\tilde{l}\right)+H_0=\varphi_{\rho_0}(\rho),\quad \rho\in[l,l+\delta). \tag{21}$$

另外，由 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 的定义知(注意 δ 充分小)

$$C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right)=\varphi_{\rho_0}(\rho),\quad \rho\in(l-\delta,l). \tag{22}$$

综合(21), (22)两式就有

$$\varphi_{\rho_0}(\rho)\geq C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(\rho,\tilde{l}\right),\quad \rho\in(l-\delta,l+\delta). \tag{23}$$

对于任意 $q\in\partial B(p,l)$，取 q 的小邻域 $U_q=B(q,\delta)$，则对于任意 $x\in U_q$，在(23)式中取 $\rho=d(p,x)$ 可得

$$h(x)\geq C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,x),\tilde{l}\right),\quad \forall x\in U_q. \tag{24}$$

另一方面由 h 的定义知 $h(q)=C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,q),\tilde{l}\right)$，结合(24)式可知 $C_2\varphi_{n,\tilde{k}}\left(d(p,\cdot),\tilde{l}\right)$ 在 q 处的闸函数也是 h 的闸函数(参见(3)式)。进而由引理 3.2 知在闸函数意义下 $\Delta h|_q \ge C_2$，从而由 q 的任意性知在闸函数意义下 $\Delta h|_{\partial B(p,l)} \ge C_2$。证毕。

4. 小结

本文主要推广了 U. Abresch 和 D. Gromoll 的关于 Ricci 曲率有下界黎曼流形上的一个函数估计定理(定理 2.1)，我们放宽了定理 2.1 中关于 Laplace 的条件(由条件(iv)改为了(iv)')，证明了定理 2.1 的结论依然成立，即证明了定理 2.2。证明是应用反证法，首先构造了一个关键的辅助函数(参见(8)式)，之后应用极大值原则和 Laplace 比较定理得到矛盾，进而完成证明。定理 2.1 是有很好的应用的(参见注 4)；我们推广了定理 2.1，使得定理 2.1 应用范围可以更为广泛(但笔者当前还未找到定理 2.2 直接的应用)。所以我们对定理 2.1 的推广是有一定意义的。

参考文献 (References)

[1] U. Abresch, D. Gromoll. On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature. Journal of AMS, 1990, 3(2): 355-374.
[2] P. Peterson. Riemannian geometry, GTM 171. New York: Springer-Verlag, 1998.
[3] S. Zhu. The comparison geometry of Ricci curvature. Comparison Geometry (MSRI Publications), 1997, 30: 221-262.
[4] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.
[5] 丘成桐, 孙理察. 微分几何[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

附录

在附录中我们介绍一下我们给出的定理 2.2 的证明与定理 2.1 的原证明的主要不同之处。

首先指出定理 2.2 的证明思路与定理 2.1 原证明的思路是一样的。在假设定理结论不成立的前提下，构造辅助函 h (参见(8)式)，可以证明 $f-h$ 在相应区域上可以取到极小值，且同时满足在闸函数意义下 Laplace 小于或等于 0，这与极大值原则矛盾。

定理 2.2 的证明与定理 2.1 的证明的关键不同之处在于函数 h 或说 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ (参见(8)式)的构造。由于在定理 2.1 中，在整个 $B(p,R)$ 上在闸函数意义下有 $\Delta f \le C_2$ (条件(iv))，所以 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 仅需要构造为[1]

$$\varphi_{\rho_0}(d)=\begin{cases} C_1(\rho_0-d)+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho_0,\tilde{l}), & 0\le d\le \rho_0 \\ C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(d,\tilde{l}), & \rho_0\le d\le \tilde{l} \\ 0, & \tilde{l}\le d<R \end{cases}.$$

而由于定理 2.1 中的条件(iv)被减弱为定理 2.2 中的条件(iv)'，定理 2.1 原证明中的 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 已经不能满足我们的需要。我们需要更为精巧的辅助函数，本文中 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 的构造(参见(8)式)

$$\varphi_{\rho_0}(d)=\begin{cases} C_1(\rho_0-d)+C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(\rho_0,\tilde{l}), & 0\le d\le \rho_0 \\ C_2\varphi_{n,\tilde{k}}(d,\tilde{l}), & \rho_0\le d\le l \\ C_3\varphi_{n,\tilde{k}}(d+c,\tilde{l})+H_0, & l\le d\le l+\overline{c} \end{cases}$$

的关键是 $\hat{l}$ (注意 $\hat{l}=l+c$)的存在(参见引理 3.1，当然引理 3.1 及其相关讨论在原证明中并不需要)。由于本文中 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 的构造基于引理 3.1，所以在证明 $f-h$ 在相应区域上可以取到极小值(即证明断言 1)时要用到引理 3.1；而原证明中的讨论要容易很多。而且由于原证明中 $\varphi_{\rho_0}(\cdot)$ 的构造相对容易，证明 $f-h$ 在相应区域上在闸函数意义下 Laplace 小于或等于 0 也要容易些，只用到证明断言 2 中的 a)部分或说引理 3.2 的讨论即可，与 b)部分和 c)部分无关；而对于定理 2.2 的证明来说，证明断言 2 中的 b)部分和 c)部分是至关重要，不可缺少的。