Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 46-50
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31008 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Littlewood-Paley Function Associated to Self-Adjoint Operators on Variable Exponent Spaces*

Ruming Gong[1,2], **Peizhu Xie**[1,2#]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou
[2]Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou University, Guangzhou
Email: gongruming@163.com, #xiepeizhu82@163.com

Received: Nov. 26th, 2012; revised: Dec. 12th, 2012; accepted: Dec. 21st, 2012

Abstract: In this article, we prove norm inequalities for the Littlewood-Paley function associated to a non-negative self-adjoint operator satisfying a pointwise Gaussian estimate for its heat kernel on generalized L^p spaces with variable exponent.

Keywords: Littlewood-Paley Function; Self-Adjoint Operators; Variable Exponent Spaces

变指数空间上的与自伴算子相联的 Littlewood-Paley 函数*

龚汝明[1,2]，谢佩珠[1,2#]

[1]广州大学数学与信息科学学院，广州
[2]广州大学数学与交叉科学广东普通高校重点实验室，广州
Email: gongruming@163.com, #xiepeizhu82@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 26 日；修回日期：2012 年 12 月 12 日；录用日期：2012 年 12 月 21 日

摘　要：本文研究了与非负自伴且热核满足 Gaussian 上界的算子相联系的 Littlewood-Paley 函数在一般的变指数 L^p 空间上的有界性。

关键词：Littlewood-Paley 函数；自伴算子；变指数空间

1. 引言

对给定的可测函数 $p: R^n \to [1,\infty)$，变指数Lebesgue空间 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 表示为由满足以下条件的 R^n 上的可测函数 f 所组成的空间

$$\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty,$$

其中 $\lambda>0$。定义 f 的范数为

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}}=\inf\left\{\lambda>0:\ \int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<1\right\},$$

*资助信息：国家自然科学基金数学天元基金资助(No. 11226100)。
#通讯作者。

则 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 是一个 Banach 空间。若 $p(x)=p$ 是一个常数，则 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 就是 $L^p(R^n)$。$L^{p(\cdot)}(R^n)$ 与经典的 L^p 空间有很多共同之处。变指数 L^p 空间在 PDE 中有着广泛的应用，见[1,2]。在应用过程中，经典算子在变指数 L^p 空间上的有界性起着至关重要的作用。许多学者研究了极大函数、奇异积分算子及分数次积分算子在变指数 L^p 空间上有界的充分条件，见[1,3-8]。在本文中，我们研究与非负自伴且热核满足 Gaussian 上界的算子相联系的 Littlewood-Paley 函数在变指数 L^p 空间上的有界性。

假设算子 L 是 $L^2(R^n)$ 上的非负自伴算子，且其生成的半群 e^{-tL} 的核 $p_t(x,y)$ 满足Gaussian上界

$$\left|p_t(x,y)\right|\le\frac{C}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right),\tag{1}$$

对所有的 $t>0$ 及 $x,y\in R^n$，其中 C 和 c 是正的常数。

对 $f\in\mathcal{S}(R^n)$，定义 Littlewood-Paley 面积函数 S_L 为

$$S_Lf(x)=\left(\int_{|x-y|<t}\left|t^2Le^{-t^2L}f(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/2}.\tag{2}$$

有关 S_L 在 $L^p(R^n)$ 空间上的有界性，见[9-11]。

Hardy-Littlewood极大函数 Mf 定义为 $Mf(x)=\sup\limits_{B:\,x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y$，其中上确界取遍所有包含 x 的球。Fefferman-Stein的#极大函数 $M^{\#}f(x)$ 定义为

$$M^{\#}f(x)=\sup_{B:\,x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B\left|f(y)-f_B\right|\mathrm{d}y,$$

其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B(x)\mathrm{d}x$。我们称一个非负局部可积的函数 w 为权函数。若存在常数 C 使得对所有的球 B 有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\le C,$$

其中 $1/p+1/p'=1$，则称 $w\in A_p(R^n),1<p<\infty$。当 $p=1$ 时，若存在常数 C 使得对所有的球 B 有 $\frac{1}{|B|}\int_B w\mathrm{d}y\le Cw(x)$ 几乎处处成立，则称 $w\in A_1$。记 $A_\infty(R^n)=\bigcup\limits_{1\le p<\infty}A_p(R^n)$。有关上述的定义，见[12]。

下面给出几个有用的结果。

引理1.1 设 $\varphi\in C_0^\infty(R)$ 是一个偶函数且 $\operatorname{supp}\varphi\subset(-1,1)$。记 Φ 为 φ 的Fourier变换。则对任意的 $k=0,1,2,\cdots$，及所有的 $t>0$，算子 $(t^2L)^k\Phi(t\sqrt{L})$ 的核 $K_{(t^2L)^k\Phi(t\sqrt{L})}(x,y)$ 满足：

$$\operatorname{supp}K_{(t^2L)^k\Phi(t\sqrt{L})}(x,y)\subseteq\left\{(x,y)\in R^n\times R^n:|x-y|\le t\right\}\tag{3}$$

及

$$\left|K_{(t^2L)^k\Phi(t\sqrt{L})}(x,y)\right|\le Ct^{-n}\tag{4}$$

其中 $x,y\in R^n$。

关于该引理的证明，见[11]。

记 $\mathcal{P}(R^n)$ 为满足以下条件的可测函数 $p:R^n\to[1,\infty)$ 所组成的集合

$$p_-=\operatorname{ess\,inf}\left\{p(x):x\in R^n\right\}>1,\ p_+=\operatorname{ess\,sup}\left\{p(x):x\in R^n\right\}<\infty.$$

记 $\mathcal{P}^0(R^n)$ 为满足以下条件的可测函数 $p:R^n\to[1,\infty)$ 所组成的集合

$$p_- = \text{ess inf}\left\{p(x): x \in R^n\right\} > 0,\ p_+ = \text{ess sup}\left\{p(x): x \in R^n\right\} < \infty.$$

记 $\mathcal{B}(R^n)$ 为使得 M 在 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 上有界的 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(R^n)$ 所组成的集合。

令 $\mathcal{F}$ 表示由非负可测函数对 (f,g) 所组成的集合。不等式

$$\int_{R^n} f(x)^{p_0} w(x)\mathrm{d}x \le C\int_{R^n} g(x)^{p_0} w(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

对任意的 $(f,g) \in \mathcal{F}$ 及 $w \in A_q$ 成立是指常数 C 仅依赖于 p_0 及 w 的 A_q 权常数。

引理1.2 对给定的集合 $\mathcal{F}$，假设存在某个 $p_0, 1 < p_0 < \infty$，使得对所有的 $w \in A_{p_0}$ 有

$$\int_{R^n} f(x)^{p_0} w(x)\mathrm{d}x \le C_0\int_{R^n} g(x)^{p_0} w(x)\mathrm{d}x,\quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0(R^n)$，存在 $p_0 < p_-$ 使得 $\left(p(\cdot)/p_0\right)' \in \mathcal{B}(R^n)$。则对所有的 $(f,g) \in \mathcal{F}$，只要 $f \in L^{p(\cdot)}(R^n)$，就有

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|g\|_{L^{p(\cdot)}} \tag{7}$$

关于该引理的证明，见[4]。

2. 主要结果及证明

本文的主要结果是如下的定理：

定理2.1 设 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(R^n)$ 且设 L 是一个非负自伴算子且热核满足Gaussian上界(1)。则对任意的 $f \in L^{p(\cdot)}$，$S_L f \in L^{p(\cdot)}$，有

$$\|S_L f\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}. \tag{8}$$

为了证明定理2.1，我们需要如下的辅助函数。设 $\varphi \in C_0^\infty(R)$ 是一个偶函数且 $\int \varphi \mathrm{d}x = 1$，$\operatorname{supp}\varphi \subset (-1/10, 1/10)$。记 Φ 为 φ 的Fourier变换，且令 $\Psi(s) = s^{2n+2}\Phi^3(s)$。定义算子 $g_{\mu,\Psi}^*$ 为

$$g_{\mu,\Psi}^*(f)(x) = \left(\iint_{R_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\mu} \left|\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y)\right|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/2}, \mu > 1. \tag{9}$$

命题2.2 设 L 是一个非负自伴算子且热核满足条件(1)。则存在常数 C 使得对所有的 $f \in \mathcal{S}(R^n)$，有以下的逐点估计：

$$S_L f(x) \le C g_{\mu,\Psi}^*(f)(x). \tag{10}$$

关于该命题的证明，见[11]。

利用命题 2.2，为了证明定理 2.1，只需证明如下结论即可。

定理2.3 设 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(R^n)$ 且设 L 是一个非负自伴算子且热核满足Gaussian上界(1)。设 $\mu > 3$。则对任意的 $f \in L^{p(\cdot)}$，$g_{\mu,\Psi}^* f \in L^{p(\cdot)}$，有

$$\left\|g_{\mu,\Psi}^* f\right\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}. \tag{11}$$

证明 我们首先来证明若 $\mu > 3$，则对任意的 $0 < \delta < 1$，都存在常数 C 使得

$$M_\delta^\#\left(g_{\mu,\Psi}^*(f)\right)(x) \le CMf(x). \tag{12}$$

记 $T(B) = \left\{(y,t): y \in B, 0 < t < r_B\right\}$，其中 r_B 表示球 B 的半径。若 $(y,t) \in T(B)$，由引理1.1的(4)可得

$$\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y) = \Psi\left(t\sqrt{L}\right)\left(f\chi_{3B}\right)(y). \tag{13}$$

设 $\mu > 3$ 及 $0 < \delta < 1$。为了证明(12)，我们只需证明对任意包含 x 的球 B 及某个数 c_B 有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left|g_{\mu,\Psi}^*(f)(z)\right|^\delta-\left|c_B\right|^\delta\right|\mathrm{d}z\right)^{1/\delta}\le CMf(x).$$

给定一个包含 x 的球 B 。记 $R_+^{n+1}=R^n\times(0,\infty)$ 。对任意的 $z\in B$，将 $\left|g_{\mu,\Psi}^*(f)(z)\right|^2$ 分解为以下两式之和：

$$I_1(z)=\iint_{T(2B)}\left|\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y)\right|^2\left(\frac{t}{t+|z-y|}\right)^{n\mu}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$$

及

$$I_2(z)=\iint_{R_+^{n+1}/T(2B)}\left|\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y)\right|^2\left(\frac{t}{t+|z-y|}\right)^{n\mu}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}.$$

选取 $c_B=I_2(z_B)^{1/2}$ ，其中 z_B 为 B 的球心。因为当 $0<s<1$ 时，$\left||a|^s-|b|^s\right|\le|a-b|^s$ 。所以，

$$\begin{aligned}\left|\left|g_{\mu,\Psi}^*(f)(z)\right|^\delta-\left|I_2(z_B)^{1/2}\right|^\delta\right|&=\left|\left(I_1(z)+I_2(z)\right)^{1/2}-I_2(z_B)^{1/2}\right|^\delta\le\left|I_1(z)+I_2(z)-I_2(z_B)\right|^{\delta/2}\\&\le I_1(z)^{\delta/2}+\left|I_2(z)-I_2(z_B)\right|^{\delta/2}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left|g_{\mu,\Psi}^*(f)(z)\right|^\delta-I_2(z_B)^{\delta/2}\right|\mathrm{d}z\right)^{1/\delta}\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B I_1(z)^{\delta/2}\,\mathrm{d}z\right)^{1/\delta}+\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|I_2(z)-I_2(z_B)\right|^{\delta/2}\mathrm{d}z\right)^{1/\delta}=:II_1+II_2.$$

众所周知，若 $\mu>3$，则 $g_{\mu,\Psi}^*$ 是弱(1,1)的(见[11])。所以，

$$\begin{aligned}\int_B\left(g_{\mu,\Psi}^*(f\chi_{6B})(z)\right)^\delta\mathrm{d}z&=\delta\int_0^\infty t^{\delta-1}\left|\left\{z\in B:g_{\mu,\Psi}^*(f\chi_{6B})(z)>t\right\}\right|\mathrm{d}t\le\delta\int_0^\infty\min\left(C\frac{\|f\chi_{6B}\|_{L^1}}{t},|B|\right)t^{\delta-1}\mathrm{d}t\\&\le\delta\int_0^{\frac{\|f\chi_{6B}\|_{L^1}}{t}}|B|t^{\delta-1}\mathrm{d}t+C\int_{\frac{\|f\chi_{6B}\|_{L^1}}{t}}^\infty\frac{\|f\chi_{6B}\|_{L^1}}{t}t^{\delta-1}\mathrm{d}t\le C\|f\chi_{6B}\|_{L^1}^\delta|B|^{1-\delta}.\end{aligned}$$

由此以及式(13)可得

$$II_1\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left(g_{\mu,\Psi}^*(f\chi_{6B})(z)\right)^\delta\mathrm{d}z\right)^{1/\delta}\le\frac{C}{|B|}\int_{6B}|f(z)|\mathrm{d}z\le CMf(x).\tag{14}$$

另外，由均值定理可知，若 $z\in B$ 且 $(y,t)\notin T(2B)$，则存在 $0<s\le1$ 使得

$$\left(t+|z-y|\right)^{-n\mu}-\left(t+|z_B-y|\right)^{-n\mu}\le Cr_B^s\left(t+|z-y|\right)^{-n\mu-s}.$$

因此，联合式(13)，引理 1.1，Holder 不等式及 $\mu>3$ 可得

$$\begin{aligned}\left|I_2(z)-I_2(z_B)\right|&\le Cr_B^s\iint_{R_+^{n+1}/T(2B)}t^{n\mu}\left|\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y)\right|^2\left(\frac{1}{t+|z-y|}\right)^{n\mu+s}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\\&\le C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{sk}\left(2^kr_B\right)^{n\mu}}\iint_{T\left(2^{k+1}B\right)/T\left(2^kB\right)}\left|\Psi\left(t\sqrt{L}\right)f(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1-n\mu}}\\&\le C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{sk}\left(2^kr_B\right)^{n\mu}}\left(\int_0^{2^{k+1}r_B}\int_{2^{k+1}B}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{3n+1-n\mu}}\right)\left(\int_{6\times2^kB}|f(y)|\mathrm{d}y\right)^2\\&\le C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{sk}}\left(\frac{1}{\left|2^{k+1}B\right|}\int_{6\times2^kB}|f(y)|\mathrm{d}y\right)^2\le CMf(x)^2\end{aligned}$$

对所有的$z \in B$都成立。由此以及式(14)可知

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left| \left| g_{\mu,\Psi}^{*}(f)(z) \right|^{\delta} - I_2(z_B)^{\delta/2} \right| \mathrm{d}z \right)^{1/\delta} \le CMf(x).$$

式(12)得证。对任意的$1 < p < \infty$及$w \in A_p$，由(12)可得

$$\left\| g_{\mu,\Psi}^{*}(f) \right\|_{L^p(w)} \le C \|f\|_{L^p(w)}. \tag{15}$$

由式(15)及引理1.2可知定理2.3的结论成立。

利用定理 2.3 及命题 2.2，我们可以得到定理 2.1 的结论。

参考文献 (References)

[1] L. Diening. Maximal functions on generalized $L^{p(x)}$ spaces. Mathematical Inequalities and Applications, 2004, 7(2): 245-253.

[2] D. Edmunds and J. Rakosnik. Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Mathematica, 2000, 143(3): 267-293.

[3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. Neugebauer. The maximal function on variable L^p spaces. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, 2003, 28(1): 223-238.

[4] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. Martell, et al. The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, 2006, 31(1): 239-264.

[5] L. Diening. Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Mathematische Nachrichten, 2004, 268(1): 31-43.

[6] A. Karlovich, A. Lerner. Commutators of singular integrals on generalized L^p spaces with variable exponen. Publicacions Matemàtiques, 2005, 49(1): 111-125.

[7] V. Kokilashvili, S. Samko. Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Georgian Mathematical Journal, 2003, 10(1): 145-156.

[8] A. Nekvinda. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(R^n)$. Mathematical Inequalities and Applications, 2004, 7(2): 255-265.

[9] P. Auscher. On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on R and related estimates. Memoirs of the American Mathematical Society, 2007, 186(871).

[10] T. Coulhon, X. Duong and X. Li. Littlewood-Paley-Stein functions on complete Riemannian manifolds for $1 \le p \le 2$. Studia Mathematica, 2003, 154(1): 37-57.

[11] R. Gong, P. Xie. Weighted L^p estimates for the area integral associated to self-adjoint operators on homogeneous space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 393(2): 590-604.

[12] E. Stein. Harmonic analysis: Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993.