Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 56-67
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31010 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Area Integral Operator on the Real Unit Ball*

Dongfang Wang[1,2], Bolin Ma[2], Dangui Shen[2]

[1]College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha
[2]College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing
Email: eastking001@126.com, blma@mail.zjxu.edu.cn

Received: Oct. 14th, 2012; revised: Oct. 24th, 2012; accepted: Nov. 11th, 2012

Abstract: In this paper, we introduce Carleson measures on the real unit ball in terms of Carleson boxes or tents, and establish relations among the non-tangential maximal function, Poisson integral and Carleson measures on the real unit ball. As an application, we introduce a certain area integral operator involving a nonnegative measure μ on the unit ball and characterize the measure in terms of Carleson measure and other forms such that A_μ maps from L^p to L^q or from H^p to L^q.

Keywords: Area Integral Operator; Carleson Measure; The Unit Ball; The Unit Sphere

实单位球上的面积积分算子*

王东方 [1,2]，马柏林 [2]，沈丹桂 [2]

[1] 湖南大学数学与计量经济学院，长沙
[2] 嘉兴学院数理与信息工程学院，嘉兴
Email: eastking001@126.com, blma@mail.zjxu.edu.cn

收稿日期：2012 年 10 月 14 日；修回日期：2012 年 10 月 24 日；录用日期：2012 年 11 月 11 日

摘　要：本文通过 Carleson boxes 或者 Tents 的方式定义了实单位球上的 Carleson 测度，并建立了单位球上非切极大函数、Poisson 积分和 Carleson 测度之间的联系。作为一个应用，我们引入一种与 R^{n+1} 中单位球体上非负测度 μ 相关的面积积分算子 A_μ，并用 Carleson 测度和其他方式刻画了这种使得 A_μ 从 L^p 到 L^q 或从 H^p 到 L^q 有界的非负测度 μ。

关键词：面积积分算子；Carleson 测度；单位球；单位球面

1. 引言

记复平面中的单位圆盘为 D，∂D 为它的边界。对于任意 $\varsigma\in\partial D$，集合

$$\Gamma(\varsigma)=\left\{z\in D:|\varsigma-z|\le 1-|z|^2\right\}$$

表示 D 上一个以 ς 为顶点的锥。

当 $\alpha>0$ 时，面积积分算子

$$A_\alpha f(\varsigma)=\left(\int_{\Gamma(\varsigma)}(1-|z|)^{2\alpha}\left|D^\alpha f(z)\right|^2\frac{\mathrm{d}A(z)}{(1-|z|)^2}\right)^{1/2},\quad \forall\varsigma\in\partial D$$

是从 $H^p(D)$ 到 $L^p(\partial D)$ 有界的算子，$\mathrm{d}A$ 是 D 上的 Lebesgue 测度，见[1]。但当 $\alpha=0$ 时，此结论不成立，为此，

*资助信息：本文得到浙江自然基金(y6100810, y6110824)和国家自然基金(11271162)的资助。

Cohn 在[2]中引入了一类广义面积积分算子 G_μ，即：

$$G_\mu(f)(\varsigma)=\int_{\Gamma(\varsigma)}\left|f(z)\right|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{1-|z|},\ \forall\varsigma\in\partial D,$$

并得到一个主要结果：G_μ 从 $H^p(D)$ 到 $L^p(\partial D)$ 有界当且仅当 μ 是 D 上的一个 Carleson 测度，其中 $0<p<\infty$。在[3]中，Z. Wu 用 D 上的 Carleson 测度和其他方式刻画了这种使得 G_μ 从 D 上的 Bergman 空间 $A_p^\alpha(D)$ 到 $L^p(\partial D)$ 的有界性，这里 $0<p,q\le\infty$。文献[4]进一步推广了 Cohn 在文献[2]中的结论，其主要结论是：当 $0<p\le q<\infty$ 时，G_μ 从 $H^p(D)$ 到 $L^p(\partial D)$ 有界当且仅当 μ 是复圆盘 D 上的 $(1+1/p-1/q)$-Carleson 测度；当 $1\le q<p\le\infty$ 时，G_μ 从 $H^p(D)$ 到 $L^p(\partial D)$ 有界当且仅当 $\mu^*(\varsigma)=\int_{\Gamma(\varsigma)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{1-|z|}\in L^{\frac{pq}{p-q}}(\partial D)$。

面积积分算子在调和分析中有很有用，它可以反映非切极大函数、Poisson 积分、Tent 空间、乘子以及许多算子之间的关联。在以上研究成果的启发下，本文关注于 R^{n+1} 中单位球 B 上的情形。本文中，我们先定义了 B 上的一系列概念，比如：B 上的 Carleson 测度、锥、帐篷等；然后在此基础上，我们引入一类与 B 上非负测度 μ 相关的面积积分算子 A_μ；最后，我们用 Carleson 测度和其他方式刻画了这种使得 A_μ 从 L^p 到 L^q 或者从 H^p 到 L^q 有界的 μ。本文反映了定义在单位球面上的函数空间与 Poisson 积分、面积积分算子 A_μ 等之间的密切关系，丰富了 B 上的理论基础，并推广了复分析和实分析中许多经典的技术和结论，具体读者参见文献[5-7]。

在本文中，S^n 表示 R^{n+1} 中单位球上 B 的球面。对于任意球冠 $\sigma\subset S^n$，$|\sigma|$ 表示它的 Lebesgue 测度，$r(\sigma)=\left(|\sigma|/|S^n|\right)^{1/n}$ 表示它的半径。对于 $x\in R^{n+1}$，$|x|$ 表示一般的欧氏向量模。当 $x\in S^n$ 时，记 $\sigma(x,r)$ 为 S^n 上一个以 x 为中心、以 r 为半径的球冠，而对于任意常数 c，$c\sigma(x,r)$ 表示和 $\sigma(x,r)$ 同心但半径为其 c 倍的球冠。这里显然，当 $cr>1$ 时，$c\sigma(x,r)=S^n$。C 和 c 表示正常数，在不同的地方可能表示不同的值。对于任意球冠，定义集合

$$S(\sigma)=\left\{z\in B:\frac{z}{|z|}\in\sigma,1-r(\sigma)<|z|\le1\right\}$$

为基于 σ 的 Carleson box。

[8]定义了单位球 B 上的 s-Carleson 测度，在这里，为了本文研究方便，我们通过 Carleson box 给出下面这种定义形式，即：对于 $s>0$，B 上的一个非负测度 μ 被称为 s-Carleson 测度，如果存在常数 C 使得

$$\mu(S(\sigma))\le C|\sigma|^s$$

对任意球冠 $\sigma\subset S^n$ 都成立。

对于任意 $x\in S^n$，B 中以 x 为顶点的锥是集合

$$\Gamma(x)=\left\{z\in B:x\in\sigma\left(\frac{z}{|z|},1-|z|\right)\right\}。$$

众所周知，对于任意定义在 S^n 上的可测函数 f，其 Poisson 扩张到 $z\in B$ 记做

$$F(z)=\int_{S^n}f(x)p(x,z)\mathrm{d}x=\int_{S^n}f(x)\frac{1-|z|^2}{|S^n||x-z|^{n+1}}\mathrm{d}x,$$

这里 $p(x,z)=\frac{1-|z|^2}{|S^n||x-z|^{n+1}}$ 是单位球 B 上的 Poisson 核。

对于定义在 S^n 上的可测函数 f 和 B 上的一个非负测度 μ，一类 B 上的广义面积积分算子 A_μ 可以定义为

$$A_\mu(f)(x)=\int_{\Gamma(x)}|F(z)|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n},\ \forall x\in S^n\text{。}$$

本文有如下主要结论：

定理 1.1 设$1<p\le q<\infty$，μ是单位球B上的一个非负测度。那么，μ是单位球B上的一个$(1+1/p-1/q)$-Carleson 测度当且仅当

$$\int_{S^n}\left(A_\mu(f)(x)\right)^q\mathrm{d}x\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^q\quad\forall f\in L^p(S^n)\text{。}\tag{1.1}$$

定理 1.2 μ是单位球B上的一个非负测度。

(a) 当$1<p<\infty$时，μ是单位球B上的一个 Carleson 测度当且仅当

$$\int_{S^n}\left(A_\mu(f)(x)\right)^p\mathrm{d}x\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^p,\quad\forall f\in L^p(S^n)\text{。}\tag{1.2}$$

(b) 对于$\alpha>0$，如果μ是单位球B上的一个 Carleson 测度，则有

$$\left|\left\{x\in S^n:A_\mu(f)(x)>\alpha\right\}\right|\le\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)},\quad\forall f\in L^1(S^n)\text{。}$$

定理 1.3 设$0<p\le q<\infty$，μ是单位球B上的一个非负测度。μ是单位球B上一个$(1+1/p-1/q)$-Carleson 测度，则有

$$\int_{S^n}\left(A_\mu(f)(x)\right)^q\mathrm{d}x\le C\|f\|_{H^p(S^n)}^q,\quad\forall f\in H^p(S^n)\text{。}$$

定理 1.4 设$1\le q<p<\infty$，μ是单位球B上的一个非负测度。那么，

$$\int_{S^n}\left(A_\mu(f)(x)\right)^q\mathrm{d}x\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^q,\quad\forall f\in L^p(S^n)$$

当且仅当$\mu^*\in L^{\frac{pq}{p-q}}(S^n)$，这里$\mu^*(x)=\int_{\Gamma(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}$。

2. 预备知识和若干引理

对于任意球冠$\sigma\subset S^n$，集合

$$T(\sigma)=\left\{z\in B:\sigma\left(\frac{z}{|z|},1-|z|\right)\subset\sigma\right\}$$

是基于球冠σ的帐蓬。

对于$s>0$，B上的一个非负测度μ也被称为s-Carleson 测度，如果存在常数C使得

$$\mu(T(\sigma))\le C|\sigma|^s$$

对任意球冠$\sigma\subset S^n$都成立。不难看出，对于任意球冠$\sigma\subset S^n$，必存在正常数C使得$T(\sigma)\subset S(\sigma)\subset T(C\sigma)$，则这种通过帐蓬来定义和通过 Carleson box 来定义的s-Carleson 测度是等价的。

对于任意$z\in B$，记$\sigma(z)=\left\{x\in S^n:z\in\Gamma(x)\right\}$。不难看出，$\sigma(z)$是$S^n$中的一个球冠，且这个球冠是以$z/|z|$为中心、以为$1-|z|$半径的球冠，我们可以称$\sigma(z)$是由点$z$确定的球冠。同时，不难发现，对任意球冠$\sigma\subset S^n$，必存在一点$z\in B$使得$\sigma(z)=\sigma$。从而，对任意$\sigma(z)$，有下面有用估计

$$|\sigma(z)|=\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\mathrm{d}x=(1-|z|)^n\text{。}\tag{2.1}$$

对于任意$z\in B$和$g\in L^1(S^n)$，

$$T(g)(z)=\frac{1}{|\sigma(z)|}\int_{\sigma(z)}g(x)\mathrm{d}x$$

可以看做是 g 的另一种在单位球 B 上的扩张。

设 $\phi(z)$ 是单位球 B 上的一个可测函数，那么定义

$$\phi^*(x)=\sup_{z\in\Gamma(x)}|\phi(z)|$$

是 ϕ 在 $x\in S^n$ 的非切极大函数。而对于 S^n 上的可测函数 f，它的 Hardy-Littlewood 极大函数记做

$$M(f)(x)=\sup_{0<r<1}\frac{1}{|\sigma(x,r)|}\int_{\sigma(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,\ \forall x\in S^n\text{。}$$

下面几个引理是关于单位球 B 上非切极大函数、S^n 上 L^p 函数空间、Hardy-Littlewood 极大函数和 Carleson 测度之间的关系。

引理 2.1 设 E 是单位球面 S^n 中的一个非空开集，那么必然可以找到一列两两互不相交的球冠 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_m$，使得

$$\sum_{k=1}^{m}|\sigma_k|\ge c|E|\text{ 和 }E\subset\bigcup_{k=1}^{m}\sigma_k^*\text{，}$$

这里的 c 是一个正常数，σ_k^* 表示与 σ_k 同心但半径是其 3 倍的球冠。

引理 2.2 设 f 是单位球面 S^n 上可测函数。那么

(a) 当 $f\in L^p(S^n)$ 和 $1\le p\le\infty$ 时，$M(f)$ 是几乎处处有界的；

(b) 当 $f\in L^1(S^n)$ 时，对于任意 $\alpha>0$，有 $\left|\{x\in S^n:M(f)(x)>\alpha\}\right|\le\frac{c}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}$；

(c) 当 $f\in L^p(S^n)$ 且 $1<p\le\infty$ 时，那么有 $M(f)\in L^p(S^n)$ 和 $\|M(f)\|_{L^p(S^n)}\le A_p\|f\|_{L^p(S^n)}$。

引理 2.1 和引理 2.2 的证明可参见[7, p. 79]中在上半空间的证明方法，这里省略。

引理 2.3 设 f 是单位球面 S^n 上可测函数，$F(z)$ 是其在单位球 B 上的 Poisson 扩张。则有

$$F^*(x)\le CM(f)(x),\ \forall x\in S^n\text{。}$$

证明：对于任意 $z\in B$，必存在一个球冠 $\sigma=\sigma(z/|z|,1-|z|)$。$j$ 表示非负整数，N 表示比 $\log^{1/(1-|z|)}$ 小的最大正整数。σ_j 表示与 σ 同心但半径为其 2^j 倍的球冠，则有 $\sigma_0=\sigma,\sigma_{N+1}=S^n$。此时，对于任意 $x\in\sigma_{j+1}\backslash\sigma_j$，有估计

$$|x-z|\ge C2^j(1-|z|)\text{。}$$

使用上面的估计，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^n}f(x)p(x,z)\mathrm{d}x\right|&\le C\left(\sum_{j=0}^{N+1}\int_{\sigma_{j+1}\backslash\sigma_j}\frac{|f(x)|(1-|z|)}{|x-z|^{n+1}}\mathrm{d}x+\int_{\sigma}\frac{|f(x)|(1-|z|)}{|x-z|^{n+1}}\mathrm{d}x\right)\\&\le C\frac{1}{(1-|z|)^n}\int_{\sigma}|f(x)|\mathrm{d}x+C\sum_{j=0}^{N+1}\frac{1}{2^j\left(2^j(1-|z|)\right)^n}\int_{\sigma_{j+1}\backslash\sigma_j}|f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}\text{。}$$

根据上面 Hardy-Littlewood 极大函数的定义，上式可得

$$\left|\int_{S^n}f(x)p(x,z)\mathrm{d}x\right|\le CM(f)\left(\frac{z}{|z|}\right),\quad\forall z\in B\text{。}$$

对于任意 $z\in B$，当 $\xi\in\Gamma\left(z/|z|\right)$ 且 $|\xi|=|z|$ 时，可推得

$$|x-\xi|>|x-z|-|z-\xi|>|x-z|-C\left(1-|z|\right)>|x-z|-C|x-\xi|$$

对于任意 $x\in S^n$ 均成立。换句话说，当 $\xi\in\Gamma\left(z/|z|\right)$ 且 $|\xi|=|z|$ 时，

$$C|x-\xi|>|x-z|,\quad \forall x\in S^n\text{。}$$

根据上面估计，可得当 $\xi\in\Gamma\left(z/|z|\right)$ 且 $|\xi|=|z|$ 时，$\left|F(\xi)\right|\le CM(f)\left(z/|z|\right)$。不难看出，对于任意 $z\in B$，当 $\xi\in\Gamma\left(z/|z|\right)$ 时，则有 $\left|F(\xi)\right|\le CM(f)\left(z/|z|\right)$，即：

$$F^*(x)\le CM(f)(x),\ \forall x\in S^n\text{。}$$

定理证明完毕。

下面引理是[9,10]中关于复圆盘 D 上解析函数结论的推广。

引理 2.4 μ 是单位球 B 上的一个非负测度。那么

(a) 设 $0<p\le q<\infty$，ϕ 是单位球 B 上的一个可测函数，ϕ^* 是 ϕ 的非切极大函数。若 μ 是单位球 B 上的 $\dfrac{q}{p}$-Carleson 测度，则有

$$\int_B\left|\phi(z)\right|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\left\|\phi^*\right\|_{L^p\left(S^n\right)}^q\text{；}\tag{2.2}$$

(b) 设 $1<p\le q<\infty$。μ 是单位球 B 上的 $\dfrac{q}{p}$-Carleson 测度当且仅当

$$\int_B\left|F(z)\right|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{L^p\left(S^n\right)}^q,\quad \forall f\in L^p\left(S^n\right)\text{。}\tag{2.3}$$

这里 $F(z)$ 表示函数 $f\in L^p\left(S^n\right)$ 在单位球 B 上的 Poisson 扩张。

证明：要想证明(2.2)成立，只需证明，对于单位球 B 上的任意可测函数 φ 有

$$\int_B\left|\varphi(z)\right|\mathrm{d}\mu(z)\le C\left\|\varphi^*\right\|_{L^{\frac{q}{p}}\left(S^n\right)}\tag{2.4}$$

成立即可，这里 φ^* 是 φ 的非切极大函数。事实上，令 $\varphi=|\phi|^q$，若不等式(2.4)成立，则有

$$\int_B\left|\phi(z)\right|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\left(\int_B\left|\varphi^*(x)\right|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}=C\left(\int_B\left|\phi^*(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}},$$

即不等式(2.3)成立。

假设 μ 是单位球 B 上的 (q/p)-Carleson 测度。记 $\Omega=\left\{x\in S^n:\varphi^*(x)>\alpha\right\}$，则由 Whitney 覆盖引理，可知存在一个两两互不相交的球冠族 $\left\{\sigma_j\right\}$ 使得 $\Omega\subset\bigcup_j\sigma_j^*$，这里 σ_j^* 表示和 σ_j 同心但半径为其三倍的球冠。那么，可以断言

$$\left\{z\in B:\varphi(z)>\alpha\right\}\subset\bigcup_j T\left(\sigma_j^*\right)\text{。}$$

事实上，若 $z\in B$ 且 $\left|\varphi(z)\right|>\alpha$，根据 φ^* 的定义，则有对于任意 $x\in\sigma\left(z/|z|,1-|z|\right)$，$\varphi^*(x)>\alpha$。进而，$\sigma\left(z/|z|,1-|z|\right)\subset\Omega\subset\bigcup_j\sigma_j^*$，则有 $z\in\bigcup_j T\left(\sigma_j^*\right)$。

根据上面的断言和假设，不难看出

$$\mu\left(\left\{z\in B:F(z)>\alpha\right\}\right)\le\mu\left(\bigcup_j T\left(\sigma_j^*\right)\right)\le\sum_j\mu\left(T\left(\sigma_j^*\right)\right)\le C\sum_j\left|\sigma_j\right|^{\frac{q}{p}}\le C|\Omega|^{\frac{q}{p}}\text{。}$$

于是，有

$$\int_B|\varphi(z)|\mathrm{d}\mu(z)=\int_0^\infty\mu\left(\left\{z\in B:|\varphi(z)|>\alpha\right\}\right)\mathrm{d}\alpha\le\int_0^\infty\left|\left\{x\in S^n:\varphi^*(x)>\alpha\right\}\right|^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}\alpha\le\int_0^\infty\left(\int_{S^n}\chi_{\varphi^*>\alpha}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}\alpha,$$

对上面式子最右边使用 Minkowski 不等式，可得

$$\int_B|\varphi(z)|\mathrm{d}\mu(z)\le C\left(\int_{S^n}|\varphi^*(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}。$$

由上，即得证(2.4)式，从而(a)得证。

下面证明(b)。假若 μ 是单位球 B 上的 (q/p)-Carleson 测度。因为 $p>1$，对于任意 $f\in L^p\left(S^n\right)$，结合引理2.2 和引理 2.3，我们有

$$\|F^*\|_{L^p(S^n)}\le C\|M(f)\|_{L^p(S^n)}\le C\|f\|_{L^p(S^n)},$$

进而由(a)的结论，推得 $\int_B|F(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^q$。

反之，若是对于任意 $f\in L^p\left(S^n\right)$，有 $\int_B|F(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^q$ 成立。对于任意球冠 $\sigma\subset S^n$ 和 $z\in T(\sigma)$，有 $\sigma(z)\subset\sigma$。当 $x\in\sigma(z)$ 时，不难看出有 $|x-z|\le C(1-|z|)$ 成立。应用估计式(2.1)，令函数 $f=\chi_\sigma$，则可得

$$F(z)=\int_{S^n}\chi_\sigma(x)p(x,z)\mathrm{d}x\ge C\int_{\sigma(z)}\frac{1}{(1-|z|)^n}\mathrm{d}x\ge C,\ \forall z\in T(\sigma)。\tag{2.5}$$

于是

$$\mu(T(\sigma))\le C\int_{T(\sigma)}|F(z)|^p\mathrm{d}\mu(z)\le C\left(\int_{S^n}|\chi_\sigma(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\le C|\sigma|^{\frac{q}{p}},$$

上面不等式即说明 μ 是单位球 B 上的一个 (q/p)-Carleson 测度。至此，(b)得证。

下面是众所周知的 Calderón-Zygmund 分解引理。

引理 2.5 设 $\alpha>0$，$1\le p<\infty$。对于 $f\in L^1\left(S^n\right)$，存在函数 g 和 h_j，使得

$$f(x)=g(x)+\sum_j h_j(x),\quad\forall x\in S^n,$$

且有 1) 对于任意 $x\in S^n$，$g(x)\le C\alpha$ 且有 $\|g\|_{L^p(S^n)}^p\le C\alpha^{p-1}\|f\|_{L^1(S^n)}$；

2) h_j 支在两两互不相交的球冠 $\sigma_j\left(x_j,r_j\right)$ 上，$\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}h_j(x)\mathrm{d}x=0$ 和 $\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}|h_j(x)|\mathrm{d}x\le C\alpha\left|\sigma_j\left(x_j,r_j\right)\right|$；

3) $\sum_j\left|\sigma_j\left(x_j,r_j\right)\right|\le\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}$。

引理 2.6 (Fubini 定理)假设 (A,μ) 和 (B,ν) 是两个完备的测度空间，$f(x,y)$ 是 $(A\times B,\mu\times\nu)$ 上的可测函数且可积的。则有

$$\int_A\int_B f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)=\int_B\int_A f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)。$$

3. 主要定理证明

设 $g\in L^1\left(S^n\right)$ 且 $g>0$，G 表示 g 在单位球 B 上的 Poisson 扩张，G^* 表示 G 的非切极大函数，而 $T(g)(z)=\frac{1}{|\sigma(z)|}\int_{\sigma(z)}g(x)\mathrm{d}x$ 则是 g 的另外一种在单位球 B 上扩张形式。那么，我们有下面两个估计，反映了 $T(g)$ 和 $T\left(G^*\right)$ 分别是 G 的下估计和上估计。

引理 3.1 设 $g\in L^1\left(S^n\right)$ 且 $g>0$，则

$$T\left(g\right)\left(z\right)\le CG\left(z\right),\ \forall z\in B$$

证明： 显然，只要证明对于任意 $z\in B$ 有

$$\frac{1}{\left|\sigma\left(z\right)\right|}\chi_{\sigma(z)}\left(x\right)\le C\frac{1-\left|z\right|^2}{\left|x-z\right|^{n+1}},\ \forall x\in S^n$$

事实上，当 $x\in\sigma\left(z\right)$ 时，有 $1-\left|z\right|\ge C\left|x-z\right|$ 成立，结合估计式(2.1)，则得证上面不等式。引理得证。

引理 3.2 设 $g\in L^1\left(S^n\right)$ 且 $g>0$，则

$$G\left(z\right)\le CT\left(G^*\right)\left(z\right),\quad \forall z\in B\text{ 。}$$

证明： 根据 $T\left(G^*\right)$ 和单位球 B 上锥的定义直接可证明。只需注意，当 $x\in\sigma\left(z\right)$ 时，有 $G^*>G\left(z\right)$，从而

$$T\left(G^*\right)\left(z\right)=\frac{1}{\left|\sigma\left(z\right)\right|}\int_{\sigma(z)}G^*\left(x\right)\mathrm{d}x\ge G\left(z\right)\frac{1}{\left|\sigma(z)\right|}\int_{\sigma(z)}\mathrm{d}x,\quad \forall z\in B\text{ 。}$$

上面不等式结合估计式(2.1)即可证得引理。

定理 1.1 的证明： 假若不等式(1.1)成立。对于任意球冠 $\sigma\subset S^n$，取函数 $f=\chi_\sigma$，则不难看出，$f\in L^p\left(S^n\right)$ 且 $\|f\|_{L^p\left(S^n\right)}=\left|\sigma\right|^{\frac{1}{p}}$。对于任意 $z\in T\left(\sigma\right)$，可知 $\sigma\left(z\right)\subset\sigma$。此时，结合估计式(2.1)，则有

$$\int_\sigma\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\ge C\int_{\sigma(z)}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\ge C,\quad \forall z\in T\left(\sigma\right)\text{ 。}$$

从而，使用上面的这个估计，可得

$$\frac{1}{\left|\sigma\right|}\int_{T(\sigma)}\mathrm{d}\mu\left(z\right)\le C\frac{1}{\left|\sigma\right|}\int_{T(\sigma)}\int_{\sigma\cap\sigma(z)}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\mathrm{d}\mu\left(z\right)\le C\int_\sigma\int_{T(\sigma)}\chi_{\sigma(z)}\left(x\right)\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\frac{\mathrm{d}x}{\left|\sigma\right|}\le C\int_\sigma\int_{T(\sigma)\cap\Gamma(x)}\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\frac{\mathrm{d}x}{\left|\sigma\right|}\text{ 。}$$

因为 $1<q<\infty$，使用估计式(2.5)和 Jensen 不等式，可推得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|\sigma\right|}\int_{T(\sigma)}\mathrm{d}\mu\left(z\right)&\le C\left(\int_\sigma\left(\int_{T(\sigma)\cap\Gamma(x)}\left|F\left(z\right)\right|\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\right)^q\frac{\mathrm{d}x}{\left|\sigma\right|}\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left|\sigma\right|^{-\frac{1}{q}}\left(\int_{S^n}\left(\int_{\Gamma(x)}\left|F\left(z\right)\right|\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\right)^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},\\&\le C\left|\sigma\right|^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p\left(S^n\right)}\le C\left|\sigma\right|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

上面即证得 μ 是单位球 B 上的一个 $\left(1+1/p-1/q\right)$-Carleson 测度。定理的充分性得证。

下面证明定理的必要性。假设 μ 是单位球 B 上的一个 $\left(1+1/p-1/q\right)$-Carleson 测度。设 $g\in L^{q'}\left(S^n\right)$ 且 $g>0$，这里 q' 是 q 的共轭指数。由 Fubini 定理，可得

$$\int_{S^n}g\left(x\right)A_\mu\left(f\right)\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_B\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}\left(z\right)g\left(x\right)\left|F\left(z\right)\right|\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}=\int_B\int_{\sigma(z)}g\left(x\right)\left|F\left(z\right)\right|\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}\mu\left(z\right)}{\left(1-\left|z\right|\right)^n}\text{ 。}$$

结合估计式(2.1)、引理 3.1 和 $T\left(g\right)$ 的定义，则有

$$\int_{S^n}g\left(x\right)A_\mu\left(f\right)\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_BT\left(g\right)\left(z\right)\left|F\left(z\right)\right|\mathrm{d}\mu\left(z\right)\le C\int_BG\left(z\right)\left|F\left(z\right)\right|\mathrm{d}\mu\left(z\right)\text{ 。}\tag{3.1}$$

此时记 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}$，根据假设 μ 是单位球 B 上的一个 $\frac{1}{r}$-Carleson 测度，用引理 2.4 作用于不等式(3.1)的最右边，那么

$$\int_{S^n} g(x) A_\mu(f)(x)\mathrm{d}x \le C\left\|G^* F^*\right\|_{L^r(S^n)}。$$

最后注意到$1=\dfrac{r}{p}+\dfrac{r}{q'}$，应用 Hölder 不等式和引理 2.4，则得

$$\int_{S^n} g(x) A_\mu(f)(x)\mathrm{d}x \le C\left(\int_{S^n}\left|G^*(x)\right|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{S^n}\left|F^*(x)\right|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C\|g\|_{L^{q'}(S^n)}\|f\|_{L^p(S^n)},$$

根据对偶理论，可以推得(1.1)式成立。定理必要性得证。

定理 1.2 的证明：关于此定理中(a)的证明，显然是定理 1.1 的推论，令 $p=q$ 时，则得证。

下证定理中(b)。假设μ是单位球B上一个 Carleson 测度，$f\in L^1(S^n)$。由引理 2.5，可以把函数 f 分解为

$$f(x)=g(x)+\sum_j h_j(x)=g(x)+h(x)。$$

对任意$\alpha>0$，我们有

$$\left|\left\{x\in S^n : A_\mu(f)(x)>\alpha\right\}\right| \le \left|\left\{x\in S^n : A_\mu(g)(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x\in S^n : A_\mu(h)(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\right|。$$

因为μ是单位球B上一个 Carleson 测度，则由此定理中(a)，对于任意 $p>1$，可得

$$\int_{S^n}\left|A_\mu(g)(x)\right|^p\mathrm{d}x \le C\|g\|_{L^p(S^n)}^p \le C\alpha^{p-1}\|f\|_{L^1(S^n)},$$

从而，

$$\left|\left\{x\in S^n : A_\mu(g)(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\right| \le \frac{C}{\alpha^p}\left\|A_\mu(g)\right\|_{L^p(S^n)}^p \le \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}。$$

记$\sigma_j^*=3\sigma_j(x_j,r_j)$，根据引理 2.5 有$\sum_j\left|\sigma_j^*\right| \le \dfrac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}$。令$E^*=\bigcup_j\sigma_j^*$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{S^n\setminus E^*}\left|A_\mu(h)(x)\right|\mathrm{d}x &\le \sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\left|A_\mu(h_j)(x)\right|\mathrm{d}x \le C\sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\left|\int_{\Gamma(x)}\left|\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left(\frac{1-|z|^2}{|y-z|^{n+1}}-\frac{1-|z|^2}{\left|x_j-z\right|^{n+1}}\right)h_j(y)\mathrm{d}y\right|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\right|\mathrm{d}x \\ &\le C\sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\left|\int_{\Gamma(x)}\left|\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left(\frac{r_j}{|y-z|^{n+2}}\right)h_j(y)\mathrm{d}y\right|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^{n-1}}\right|\mathrm{d}x\end{aligned}。$$

因为当$z\in\Gamma(x)$，$y\in\sigma_j(x_j,r_j)$和$x\in S^n\setminus\sigma_j^*$时，有$|y-z|>C\left|x-x_j\right|$。此时令$\bar{\sigma}_j$表示以$x\in S^n\setminus\sigma_j^*$为中心且使得$x_j$正好在其边界上的球冠，那么由假设$\mu$是单位球$B$上一个 Carleson 测度和引理 2.5，可推得

$$\begin{aligned}\int_{S^n\setminus E^*}\left|A_\mu(h)(x)\right|\mathrm{d}x &\le C\sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\left|\int_{\Gamma(x)\cap S(\bar{\sigma}_j)}\frac{r_j}{\left|x-x_j\right|^{n+2}}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^{n-1}}\right|\mathrm{d}x\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left|h_j(y)\right|\mathrm{d}y \\ &\quad +C\sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\left|\int_{\Gamma(x)\cap\left(S^n\setminus S(\bar{\sigma}_j)\right)}\frac{r_j}{(1-|z|)^{n+2}}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^{n-1}}\right|\mathrm{d}x\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left|h_j(y)\right|\mathrm{d}y \\ &\le C\sum_j\int_{S^n\setminus\sigma_j^*}\frac{r_j}{\left|x-x_j\right|^{n+1}}\mathrm{d}x\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left|h_j(y)\right|\mathrm{d}y \\ &\le C\sum_j\int_{\sigma_j(x_j,r_j)}\left|h_j(y)\right|\mathrm{d}y \le C\alpha\sum_j\left|\sigma_j(x_j,r_j)\right| \le C\|f\|_{L^1(S^n)}\end{aligned},$$

进而，上面可以推得

$$\left|\left\{x\in S^n\setminus E^*: A_\mu(h)(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\right|\le\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}。$$

结合 $\sum_j\left|\sigma_j^*\right|\le\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}$，可断言

$$\left|\left\{x\in S^n: A_\mu(h)(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\right|\le\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1(S^n)}。$$

至此，定理的 (b) 部分得证。定理完毕。

定理 1.3 的证明：当 $p>1$ 时，显然根据引理 2.2、引理 2.3 和定理 1.1 可得证。下面考虑 $0<p\le 1$ 时候的情形。

不难看出，对于任意 $x\in S^n$，有

$$|F(z)|\le\left|F^*(x)\right|^{(1-q)\frac{p}{q}}|F(z)|^{1-(1-q)\frac{p}{q}}，\ \forall z\in\Gamma(x)。$$

根据 Fubini 定理和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\|A_\mu(f)\|_{L^q(S^n)}^q&=\int_{S^n}\left(\int_{\Gamma(x)}|F(z)|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\right)^q\mathrm{d}x\\&\le\int_{S^n}\left|F^*(x)\right|^{(1-q)p}\left(\int_{\Gamma(x)}|F(z)|^{1-(1-q)\frac{p}{q}}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\right)^q\mathrm{d}x\\&\le C\left(\int_{S^n}\left|F^*(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1-q}\left(\int_{S^n}\int_{\Gamma(x)}|F(z)|^{1+p-\frac{p}{q}}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\mathrm{d}x\right)^q\end{aligned}。$$

因为 μ 是单位球 B 上的一个 $(1+1/p-1/q)$-Carleson 测度，应用引理 2.4 和估计式(2.1)，则有

$$\begin{aligned}\|A_\mu(f)\|_{L^q(S^n)}^q&\le C\|f\|_{H^p(S^n)}^{p(1-q)}\left(\int_B\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\frac{\mathrm{d}x}{(1-|z|)^n}|F(z)|^{1+p-\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu(z)\right)^q\\&\le C\|f\|_{H^p(S^n)}^{p(1-q)}\left(\int_B|F(z)|^{1+p-\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu(z)\right)^q\le C\|f\|_{H^p(S^n)}^{p(1-q)}\left\|F^*\right\|_{L^p}^{\left(1+p-\frac{p}{q}\right)q}\le C\|f\|_{H^p(S^n)}^q\end{aligned},$$

即是所证结论。

在证明定理 1.4 之前，我们先引入下面一个引理。

引理 3.3：设 $1\le q<p\le\infty$，μ 是单位球 B 上的一个非负测度。那么，

$$\int_B|F(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{L^p(S^n)}^q,\quad\forall f\in L^p(S^n)\tag{3.2}$$

当且仅当 $\mu^*\in L^{\frac{p}{p-q}}(S^n)$，这里 $\mu^*(x)=\int_{\Gamma(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}$。

证明：先证明充分性，假若 $\mu^*\in L^{\frac{p}{p-q}}(S^n)$。如同引理 2.4，只需证明

$$\int_B|F(z)|\mathrm{d}\mu(z)\le C\|f\|_{L^{\frac{p}{q}}(S^n)},\ \forall f\in L^{p/q}(S^n)。$$

对于任意 $f\in L^{p/q}(S^n)$，使用估计式(2.1)和 Fubini 定理，可知

$$\int_B |F(z)|\mathrm{d}\mu(z) \le C\int_B |F(z)| \frac{1}{(1-|z|)^n}\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(z) \le C\int_{S^n}\int_{\Gamma(x)}|F(z)|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\mathrm{d}x \le C\int_{S^n}F^*(x)\mu^*(x)\mathrm{d}x$$

注意到 $\frac{p}{q}>1$，则有 Hölder 不等式和引理 2.3 可得

$$\int_B |F(z)|\mathrm{d}\mu(z) \le C\|f\|_{L^{\frac{p}{q}}(S^n)}\|\mu^*\|_{L^{\frac{p}{p-q}}(S^n)},$$

即得证充分性。

下证引理的必要性。假设不等式(3.2)成立，我们分别讨论 $p=\infty$ 和 $p<\infty$ 。

当 $p=\infty$ 时，取 $f(x)=C$ 是 S^n 上的常值函数。由 Fubini 定理和估计(2.1)，可知

$$\|\mu^*\|_{L^1(S^n)} = \int_{S^n}\int_{\Gamma(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\mathrm{d}x = \int_B \frac{1}{(1-|z|)^n}\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}x \le C\mu(B),$$

进而根据假设不等式(3.2)成立，则有 $\mu(B)\le C$ ，从而 $\|\mu^*\|_{L^1(S^n)}\le C$ 。

当 $p<\infty$ 时，不等式(3.2)成立可推得

$$\int_B |F(z)|\mathrm{d}\mu(z) \le C\|f\|_{L^{\frac{p}{q}}(S^n)},\quad \forall f\in L^{\frac{p}{q}}(S^n)$$

对于 $f\in L^{p/q}(S^n)$ 且 $f\ge 0$ ，由 Fubini 定理有

$$\int_B |F(z)|\mathrm{d}\mu(z) = \int_B\int_{S^n} f(x)p(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(z) \le C\|f\|_{L^{\frac{p}{q}}(S^n)}。$$

若记 $\mu'(x)=\int_B p(x,z)\mathrm{d}\mu(z)$ ，则上式根据对偶理论可得 $\mu'\in L^{\frac{p}{p-q}}(S^n)$ 。

对任意 $x\in S^n$ ，不难发现 $\frac{1}{(1-|z|)^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\le Cp(x,z)$ ，从而我们断言

$$\mu^*(x)\le C\mu'(x),\ \forall x\in S^n,$$

即得 $\mu^*\in L^{\frac{p}{p-q}}(S^n)$ 。必要性证明完毕。

定理 1.4 的证明：先证明充分性，假设 $\mu^*\in L^{\frac{pq}{p-q}}(S^n)$ 成立。我们分别讨论 $p=\infty$ 和 $p<\infty$ 。

当 $p=\infty$ 时，假设即说明 $\mu^*\in L^q(S^n)$ 。显然，有

$$\int_{S^n}\left(\int_{\Gamma(x)}|F(z)|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\right)^q\mathrm{d}x \le C\|f\|_{L^\infty(S^n)}\int_{S^n}\left(\int_{\Gamma(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(1-|z|)^n}\right)^q\mathrm{d}x \le C\|f\|_{L^\infty(S^n)}\|\mu^*\|_{L^q(S^n)},$$

上面即得证 $p=\infty$ 时所需结论。

当 $p<\infty$ 时。因为 $1<q/p$ ，由 Hölder 不等式和引理 2.4，有

$$\|A_\mu(f)\|^q_{L^q(S^n)} \le \int_{S^n}|F^*(x)|^q|\mu^*|^q\mathrm{d}x \le \|F^*\|^q_{L^p(S^n)}\|\mu^*\|^q_{L^{\frac{pq}{p-q}}(S^n)} \le C\|f\|^q_{L^p(S^n)}\|\mu^*\|^q_{L^{\frac{pq}{p-q}}(S^n)},$$

即所证结论。至此，定理充分性得证。

下面证明必要性，假设 $\|A_\mu(f)\|^q_{L^q(S^n)}\le C\|f\|^q_{L^p(S^n)}$ 对于任意 $f\in L^p(S^n)$ 恒成立。我们分下面几种情形来证明。

当 $p=\infty$ 时，则由假设，有

$$\int_{S^n}\left(\int_{\Gamma(x)}\left|F(z)\right|\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\left(1-|z|\right)^n}\right)^q \mathrm{d}x \le C\|f\|_{L^\infty(S^n)}^q,$$

取 $f=C$ 是是 S^n 上的常值函数，即得 $\left\|\mu^*\right\|_{L^q(S^n)}\le C$。

当 $p<\infty$ 且 $q=1$ 时，使用估计式(2.1)和假设，有

$$\int_B\left|F(z)\right|\mathrm{d}\mu(z)\le C\int_B\left|F(z)\right|\frac{1}{\left(1-|z|\right)^n}\int_{S^n}\chi_{\Gamma(x)}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(z)=\left\|A_\mu(f)\right\|_{L^1(S^n)}\le C\|f\|_{L^p(S^n)},$$

根据引理 3.3，则由上面不等式可得 $\mu^*\in L^{\frac{p}{p-1}}(S^n)$。

当 $p<\infty$ 且 $q>1$ 时，令 $g\in L^{q'}(S^n)$ 且 $g\ge 0$。在证明定理 1.1 中，我们有

$$\int_{S^n} g(x)A_\mu(f)(x)\mathrm{d}x=\int_B T(g)(z)\left|F(z)\right|\mathrm{d}\mu(z),\ \forall f\in L^p(S^n)。\tag{3.3}$$

根据引理 2.4，$q'>1$ 和 $g\ge 0$，可得 $\left\|G^*\right\|_{L^{q'}(S^n)}\le C\|g\|_{L^{q'}(S^n)}$。由引理 3.2 可知，对于任意 $z\in B$，有 $G(z)\le CT(G^*)(z)$。因此，不等式(3.3)可推得

$$\int_{S^n} G^*(x)A_\mu(f)(x)\mathrm{d}x=\int_B T(G^*)(z)\left|F(z)\right|\mathrm{d}\mu(z)\ge\int_B G(z)F(z)\mathrm{d}\mu(z)。$$

使用引理 2.4、假设和 Hölder 不等式，继续上面不等式，则有

$$\int_B G(z)F(z)\mathrm{d}\mu(z)\le C\left\|G^*\right\|_{L^{q'}(S^n)}\left\|A_\mu(f)\right\|_{L^q(S^n)}\le C\|g\|_{L^{q'}(S^n)}\|f\|_{L^p(S^n)}。$$

记 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}$，有引理 3.3 则上面不等式可断言

$$\mu^*\in L^{\frac{r}{r-1}}(S^n)\in L^{\frac{pq}{p-q}}(S^n)。$$

定理证明完毕。

4. 小结

众所周知，Carleson 测度很多年来都一直是研究热门课题，它与众多诸如 BMO 空间、Bloch 空间、Morrey 空间、Q 空间都有着很重要的关系，但是这些工作主要是关于复圆盘、C^n 中单位球乃至上半空间上的，而本文主要关注于实单位球上的 Carleson 测度，丰富了实分析方法的应用。

本文有很多有意义的工作。首先是一些单位球 B 上相关概念，比如：由 Carleson box 来定义的 Carleson 测度、Tent、锥等，这些概念推广了复分析和实分析中的一些重要概念，为以后描述单位球 B 提供了工具。其次，我们建立了关于单位球面上 Hardy-Littlewood 极大函数、B 上的 Poisson 积分、非切极大函数和 Carleson 测度的一些理论基础，这些工作对以后关于单位球 B 上调和分析问题的研究也有重要意义。除这些之外，通过面积积分算子，我们揭示了单位球面 S^n 上的函数空间和 Poisson 积分、Carleson 测度的关系，这些研究工作为以后更深一步研究提供了帮助。当然，这些工作也只是一些初步工作，希望读者能更进一步丰富关于单位球体上 Carleson 测度、算子理论、函数空间等的研究。

参考文献 (References)

[1] P. Ahern, J. Bruna. Maximal and area integral characterizations of Hardy-Sobolev spaces in the unit ball of C^n. Revista Matemática Iberoamericana, 1988, 4(1): 123-153.

[2] W. S. Cohn. Generalized area operator on Hardy spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 216(1): 112-121.
[3] Z. Wu. Area operator on Bergman spaces. Science in China Series A, 2006, 49(7): 987-1008.
[4] M. Gong, Z. Lou and Z. Wu. Area operators from H^p spaces to L^q spaces. Science China Mathematics, 2010, 53(2): 357-366.
[5] J. B. Garnett. Bounded analytic functions. New York: Academic Press, 1982.
[6] E. S. Stein. Harmornic analysis, real variable, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993.
[7] L. Grafakos. Classical and modern Fourier analysis. Beijing: China Machine Press, 2005.
[8] C. A. Nolder. A characterization of certain measures using Quasiconformal mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, 109(2): 349-356.
[9] P. L. Duren. Extension of a theorem of Carleson. Bulletin of the American Mathematical Society, 1969, 75(1): 143-146.
[10] L. Carleson. An interplation problem for bounded analytic functions. American Journal of Mathematics, 1958, 80(4): 921-930.

