Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 87-94
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31014 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Existence of Periodic Solution of a Non-Autonomous Food Chain Model with Allee Effect and Ratio-Dependent Functional Response

Yaping Zhao[1], Shang Xiang[2], Yuqian Zhou[1]

[1]Mathematic Department, Zhengzhou University, Zhengzhou
[2]Zhengzhou Vocational College of Light Industry, Zhengzhou
Email: zhaoyaping8910@126.com, Look2008Beijing@126.com, zhouyuqian1989@163.com

Received: Nov. 27th, 2012; revised: Dec. 11th, 2012; accepted: Dec. 29th, 2012

Abstract: This paper studies a non-autonomous three-species of food chain model with its first trophic level contains Allee effect and ratio-dependent functional response related to the density of food and prey. By using Mawhin coincidence degree theory, this paper proves this model has at least one positive periodic solution.

Keywords: Allee Effect; Mawhin Coincidence Degree Theory; Food Chain Model; Positive Periodic Solution; Ratio-Dependent Functional Response

具有Allee效应和比例依赖响应函数的非自治的食物链模型的周期解的存在性

赵亚萍[1]，向 上[2]，周玉倩[1]

[1]郑州大学数学系，郑州
[2]河南轻工业职工大学，郑州
Email: zhaoyaping8910@126.com, Look2008Beijing@126.com, zhouyuqian1989@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 27 日；修回日期：2012 年 12 月 11 日；录用日期：2012 年 12 月 29 日

摘 要：本文研究了第一营养级含有 Allee 效应，并且响应函数依赖于食物与猎物的密度之比的一个非自治的三种群的食物链模型，并利用 Mawhin 重合度理论证明了该模型至少存在一个正周期解。

关键词：Allee 效应；Mawhin 重合度理论；食物链模型；正周期解；比例依赖响应函数

1. 引言

随着人类活动强度的增强，生态环境在不经意间遭到破坏，这对生物的生存非常不利，全球的生物多样性正在遭受严重的威胁。近年来，许多生物学家开始关注生态环境并对此做了大量的研究。1838 年，比利时生物学家 P. F. Verhulst 提出自然界中任何物种都不可能无限制增加，所有的物种都有自限制能力，并在[1]中根据此逻辑推理引进了著名的 Logistic 模型：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = rX\left(1-\frac{X}{K}\right). \tag{1}$$

1949 年，美国动物生态学家 Allee 提出，群聚有利于种群的增长和存活，但过分稀疏和过分拥挤都可以阻止其生长，并对生殖发生负作用，每种生物都有自己的最适密度。基于此原理，人们对 Logistic 模型做了改进，当种群密度很大或者很小时，其增长率都是负的。王明新在[1]中提出具有这些性质的简单模型是：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=rX\left(1-\frac{X}{K}\right)\left(\frac{X}{N}-1\right) \tag{2}$$

Allee效应的提出在生物入侵和自然保护方面具有重大意义。一方面，阿利效应本身可以限制物种分布区的扩大，影响生物入侵策略，而入侵生物必须能克服阿利效应的影响才能得以入侵成功；另一方面对于濒危生物，其繁殖率的相对高低对物种灭绝的影响并不显著。但Allee效应对其物种灭绝的影响却很明显：Allee效应越弱，物种灭绝时间越长。因此，Allee效应也越来越受到科学家们重视。王明新教授在[1]中，提出了一个考虑Allee效应并具有比例依赖响应函数和猎物自限制项的捕食模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(1-cu)(u-k)-\dfrac{uv}{mu+v}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-av-bv^2+\dfrac{uv}{mu+v}\end{cases} \tag{3}$$

杜增吉在[2]中讨论了含有干扰项和Holling III型功能反应函数的模型：

$$\begin{cases}x'=x(t)\left(r_1(t)-b_1(t)x(t)\right)-\dfrac{c_1(t)x^2(t)}{x^2(t)+k^2}y^m(t)\\[2mm] y'=y(t)\left(-r_2(t)-b_2(t)y(t)\right)+\dfrac{c_2(t)x^2(t)}{x^2(t)+k^2}y^m(t)\end{cases} \tag{4}$$

的周期解的存在性和稳定性。受[1,2]的启发，本文引入了一个新的模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(t)\left(a_1(t)-b_1(t)u(t)\right)\left(u(t)-a_2(t)\right)-\dfrac{c_1(t)u(t)v(t)}{v(t)+m_1(t)u(t)}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v(t)\left(-a_3(t)-b_2(t)v(t)+\dfrac{c_2(t)u(t)}{v(t)+m_1(t)u(t)}\right)-\dfrac{c_3(t)v(t)w(t)}{w(t)+m_2(t)v(t)}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w(t)\left(-a_4(t)+\dfrac{c_4(t)v(t)}{w(t)+m_2(t)v(t)}\right)\end{cases} \tag{5}$$

其中u, v, w分别是第一营养级，第二营养级，最高营养级的种群数量。其中$a_i(t)$，$b_j(t)$，$c_i(t)$，$m_j(t)$是正的T周期函数，其生物学意义分别如下：

$a_1(t)$表示t时刻无捕食者v时食物u的增长率；

$b_1(t)$表示t时刻由于u物种内部竞争而引起的u物种的死亡率；

$a_2(t)$表示t时刻u物种的Allee效应函数，一般为常数；

$a_3(t)$表示t时刻捕食者v无食物u时，捕食者v的死亡率；

$b_2(t)$表示t时刻由于v物种内部竞争而引起的v物种的死亡率；

$c_1(t)$表示t时刻u物种被v物种吃掉的数量；

$c_2(t)$表示t时刻v物种吃掉u物种后转化成v物种的数量；

$c_3(t)$表示t时刻v物种被w物种吃掉的数量；

$c_4(t)$表示t时刻w物种吃掉v物种后转化成w物种的数量；

$m_1(t)$表示t时刻v物种处理单个u物种所用的时间；

$m_2(t)$表示t时刻w物种处理单个v物种所用的时间。

在[2]中，作者用重合度理论证明了含有干扰项和 Holling III 型功能反应函数二种群的周期解的存在性，本文则根据王民新教授的学术报告，把模型(3)扩展成三种群中去讨论它的周期解的存在性，在证明过程中利用连续函数导数的性质以及积分性质相结合，比[2]中只用连续函数导数的性质有所创新，并且在证明过程进行巧妙的处理。

2. 预备知识

引理2.1[3] (Mawhin延拓定理)设X，Y是Banach空间，$L:\mathrm{Dom}L\cap X\to Y$ 为线性映射，$N:X\to Y$ 为连续映射，如果 $\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{Codim}\ \mathrm{Im}L<+\infty$，且Im$L$为$Y$中闭子集，则称映射L为指标是零的Fredholm映射。如果L是指标为零的Fredholm映射且存在连续投影映射 $P:X\to X$，及 $Q:Y\to Y$ 使得 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$，$\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}(I-Q)$，则

$$L\big|_{DomL\cap KerP}:(I-P)X\to\mathrm{Im}L$$

可逆，其逆映射记为 L_P^{-1}。设 Ω 为 X 中的有界开集，如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界，且 $L_P^{-1}(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 是紧的，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的。由于 ImL 与 Ker$Q$ 同构，因而存在同构映射 $J:\mathrm{Im}L\to\mathrm{Ker}Q$。

定理2.1[3] (Mawhin重合度定理)设 $\Omega\in X$ 是有界开集，L是指标为零的Fredholm映射，N在 $\bar{\Omega}$ 是L-紧的。假设：

1) 对 $\forall\lambda\in(0,1)$，方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解满足 $x\notin DomL\cap\partial\Omega$，
2) 对 $\forall x\in KerL\cap\partial\Omega$，$QNx\neq 0$，
3) $\deg\{JQN,\Omega\cap KerL,0\}\neq 0$，

则方程 $Lx=Nx$ 在 $DomL\cap\bar{\Omega}$ 至少存在一个周期解。

引理2.2[4,5] 对于T周期函数 $x:T\to R$，$x\in X$，存在 $\xi,\eta\in[0,T]$，使得

$$x(\xi)=\min_{t\in[0,T]}x(t),\quad x(\eta)=\max_{t\in[0,T]}x(t) \tag{6}$$

那么有

$$x(t)\le x(\xi)+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t;\quad x(t)\ge x(\eta)+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t. \tag{7}$$

定义2.1[6] (Brower度)设 Ω 是 R^n 中的有界开集，$f:\bar{\Omega}\to R^n$ 是连续映射，且对所有的 $x\in\Omega$，偏导数 $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ 存在且连续，$f(x)$ 在 $x\in\Omega$ 处的雅可比矩阵记为 $f'(x)$，用 $J(f(x))$ 表示 $f'(x)$ 的行列式，$p\in R^n/f(\partial\Omega)/f(z)$，$f$关于 Ω 对于p的Brower度为 $\deg(f,\Omega,p)=\sum\limits_{x\in f^{-1}(p)}signJ(f(x))$。

引理2.3[6] (同伦不变性)设 $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to R^n$ 连续，$h_t(t)=H(x,t)$，设 $\theta:[0,1]\to R^n$ 连续，且当 $0\le t\le 1$时，$\theta(t)\notin h_t(\partial\Omega)$，则 $\deg(h_t,\Omega,\theta(t))$ 于t无关。

备注：为了方便叙述，我们令 $\bar{g}=\dfrac{1}{T}\int_0^T g(s)\mathrm{d}s$，$\bar{G}=\dfrac{1}{T}\int_0^T|g(s)|\mathrm{d}s$，其中 g 是周期函数。

3. 周期解的存在性

定理：假设 $c_3(\eta_2)m_1(\eta_2)>c_2(t)>a_3(\xi_2)m_1(\xi_2)$，并且 $c_4(\eta_3)>a_4(\eta_3)m_2(\eta_3)$，那么(5)至少存在一个正周期解。

证明：令 $u(t)=\mathrm{e}^{x(t)}$，$v(t)=\mathrm{e}^{y(t)}$，$w(t)=\mathrm{e}^{z(t)}$，代入系统(5)得

$$\begin{cases} x'(t)=\left(a_1(t)-b_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}\right)\left(\mathrm{e}^{x(t)}-a_2(t)\right)-\dfrac{c_1(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{y(t)}+m_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}} \\ y'(t)=-a_3(t)-b_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}+\dfrac{c_2(t)\mathrm{e}^{x(t)}}{\mathrm{e}^{y(t)}+m_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}}-\dfrac{c_3(t)\mathrm{e}^{z(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}+m_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}}. \\ z'(t)=-a_4(t)+\dfrac{c_4(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}+m_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}} \end{cases} \tag{8}$$

令 $X=Y=\left\{k(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)^{\mathrm{T}}\in C\left(R,R^{3}\right),k(t+T)=k(t)\right\}$ 并定义

$$\|k(t)\|=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|+\max_{t\in[0,T]}|y(t)|+\max_{t\in[0,T]}|z(t)|,$$

显然 X, Y 是 Banach 空间，$\forall k\in X$，定义映射 $L:X\to Y,L(k)=\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$，$P:X\to X,P(k)=k(0),Q:Y\to Y$，$Q(k)=\frac{1}{T}\int_0^T k(t)\mathrm{d}t$. $N:X\to Y$

$$N(k)=\begin{pmatrix}\left(a_1(t)-b_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}\right)\left(\mathrm{e}^{x(t)}-a_2(t)\right)-\dfrac{c_1(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{y(t)}+m_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}}\\ -a_3(t)-b_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}+\dfrac{c_2(t)\mathrm{e}^{x(t)}}{\mathrm{e}^{y(t)}+m_1(t)\mathrm{e}^{x(t)}}-\dfrac{c_3(t)\mathrm{e}^{z(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}+m_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}}\\ -a_4(t)+\dfrac{c_4(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}+m_2(t)\mathrm{e}^{y(t)}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1(t)\\ \omega_2(t)\\ \omega_3(t)\end{pmatrix}$$

$\ker L=\left\{k\middle|k\in X,k'=0,k=\left(h_1,h_2,h_3\right)^{\mathrm{T}}\right\}$，其中 $h_i\in R,i=1,2,3$，$\operatorname{Im}L=\left\{k\middle|k\in Y,\int_0^T k(t)\mathrm{d}t=0\right\}$ 因此 $\dim KerL=3=co\dim\operatorname{Im}L$，$P(k)=k(0)=\left(x(0),y(0),z(0)\right)^{\mathrm{T}},k(0)\in R^3$，所以 $\operatorname{Im}P=R^3$，又因 $Q(k)=\frac{1}{T}\int_0^T k(t)\mathrm{d}t$，故 $\operatorname{Im}P=KerL,\operatorname{Im}L=KerQ=\operatorname{Im}(I-Q)$。

所以 L 为指标为零的 Fredholm 映射，且 L 的逆映射存在，记为 k_p：$k_p\operatorname{Im}L\to KerP\cap DomL$，经简单计算，我们得到

$$K_p(k)=\int_0^t k(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

根据 Q，N，及 k_p 的定义，简单计算出

$$QN=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{T}\int_0^T\omega_1(t)\mathrm{d}t\\ \dfrac{1}{T}\int_0^T\omega_2(t)\mathrm{d}t\\ \dfrac{1}{T}\int_0^T\omega_3(t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}$$

$$k_p(I-Q)N(k)=\begin{pmatrix}\int_0^t\omega_1(s)\mathrm{d}s-\dfrac{1}{T}\int_0^T\int_0^t\omega_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \int_0^t\omega_2(s)\mathrm{d}s-\dfrac{1}{T}\int_0^T\int_0^t\omega_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \int_0^t\omega_3(s)\mathrm{d}s-\dfrac{1}{T}\int_0^T\int_0^t\omega_3(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{pmatrix}$$

显然，根据 Lebesgue 收敛定理，知 QN, $k_p(I-Q)N$ 都连续，根据 Arzela-Ascoli 定理，对于任意有界开集 Ω，$QN(\Omega)$ 是有界的，$k_p(I-Q)N\left(\bar{\Omega}\right)$ 是紧的，所以对 $\forall\Omega\in X$，N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的。

下面我们来找一个合适的开的有界集合 Ω。对于 $Lx=\lambda Nx$，$\forall\lambda\in(0,1)$，我们有

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda\left[\left(a_1(t) - b_1(t)e^{x(t)}\right)\left(e^{x(t)} - a_2(t)\right) - \dfrac{c_1(t)e^{y(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}}\right] \\ y'(t) = \lambda\left(-a_3(t) - b_2(t)e^{y(t)} + \dfrac{c_2(t)e^{x(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}} - \dfrac{c_3(t)e^{z(t)}}{e^{z(t)} + m_2(t)e^{y(t)}}\right) \\ z'(t) = \lambda\left(-a_4(t) + \dfrac{c_4(t)e^{y(t)}}{e^{z(t)} + m_2(t)e^{y(t)}}\right) \end{cases} \tag{9}$$

对(9)第一式和第三式从 0 到 T 积分，得

$$\int_0^T a_1(t)a_2(t)dt + \int_0^T b_1(t)e^{2x(t)}dt + \int_0^T \frac{c_1(t)e^{y(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}}dt = \int_0^T \left(a_1(t) + a_2(t)b_1(t)\right)e^{x(t)}dt \tag{10}$$

$$\int_0^T a_3(t)dt + \int_0^T b_2(t)e^{y(t)}dt + \int_0^T \frac{c_3(t)e^{z(t)}}{e^{z(t)} + m_2(t)e^{y(t)}}dt = \int_0^T \frac{c_2(t)e^{x(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}}dt \tag{11}$$

$$\int_0^T a_4(t)dt = \int_0^T \frac{c_4(t)e^{y(t)}}{e^{z(t)} + m_2(t)e^{y(t)}}dt \tag{12}$$

由(9)第一式及(10)得

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|x'(t)\right|dt &< \int_0^T \left|\left(a_1(t) - b_1(t)e^{x(t)}\right)\left(e^{x(t)} - a_2(t)\right) - \frac{c_1(t)e^{y(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}}\right|dt \\ &\le 2\int_0^T \left|\frac{c_1(t)e^{y(t)}}{e^{y(t)} + m_1(t)e^{x(t)}}\right|dt = 2\int_0^T \left|\frac{c_1(t)}{1 + m_1(t)e^{x(t)-y(t)}}\right|dt < 2\int_0^T \left|c_1(t)\right|dt = 2T\bar{C}_1 = H_1 \end{aligned} \tag{13}$$

同理可得

$$\int_0^T \left|y'(t)\right|dt < 2\int_0^T \left|\frac{c_2(t)}{e^{y(t)-x(t)} + m_1(t)}\right|dt < 2\int_0^T \left|\frac{c_2(t)}{m_1(t)}\right|dt = 2T\frac{\bar{C}_2}{\bar{M}_1} = H_2 \tag{14}$$

$$\int_0^T \left|z'(t)\right|dt < 2\int_0^T \left|a_4(t)\right|dt = 2T\bar{A}_4 = H_3 \tag{15}$$

令

$$x(\eta_1) = \max_{t\in[0,T]} x(t), x(\xi_1) = \min_{t\in[0,T]} x(t)$$

$$y(\eta_2) = \max_{t\in[0,T]} y(t), y(\xi_2) = \min_{t\in[0,T]} y(t)$$

$$z(\eta_3) = \max_{t\in[0,T]} z(t), z(\xi_3) = \min_{t\in[0,T]} z(t)$$

那么有 $x'(\eta_1) = x'(\xi_1) = 0$， $y'(\eta_2) = y'(\xi_2) = 0$， $z'(\eta_3) = z'(\xi_3) = 0$， 从而得出

$$a_1(\eta_1)a_2(\eta_1) + b_1(\eta_1)e^{2x(\eta_1)} + \frac{c_1(\eta_1)e^{y(\eta_1)}}{e^{y(\eta_1)} + m_1(\eta_1)e^{x(\eta_1)}} = \left[a_1(\eta_1) + a_2(\eta_1)b_1(\eta_1)\right]e^{x(\eta_1)} \tag{16}$$

$$a_1(\xi_1)a_2(\xi_1) + b_1(\xi_1)e^{2x(\xi_1)} + \frac{c_1(\xi_1)e^{y(\xi_1)}}{e^{y(\xi_1)} + m_1(\xi_1)e^{x(\xi_1)}} = \left[a_1(\xi_1) + a_2(\xi_1)b_1(\xi_1)\right]e^{x(\xi_1)} \tag{17}$$

$$a_3(\eta_2)+b_2(\eta_2)e^{y(\eta_2)}+\frac{c_3(\eta_2)e^{z(\eta_2)}}{e^{z(\eta_2)}+m_2(\eta_2)e^{y(\eta_2)}}=\frac{c_2(\eta_2)e^{x(\eta_2)}}{e^{y(\eta_2)}+m_1(\eta_2)e^{x(\eta_2)}} \tag{18}$$

$$a_3(\xi_2)+b_2(\xi_2)e^{y(\xi_2)}+\frac{c_3(\xi_2)e^{z(\xi_2)}}{e^{z(\xi_2)}+m_2(\xi_2)e^{y(\xi_2)}}=\frac{c_2(\xi_2)e^{x(\xi_2)}}{e^{y(\xi_2)}+m_1(\xi_2)e^{x(\xi_2)}} \tag{19}$$

$$a_4(\eta_3)=\frac{c_4(\eta_3)e^{y(\eta_3)}}{e^{z(\eta_3)}+m_2(\eta_3)e^{y(\eta_3)}} \tag{20}$$

$$a_4(\xi_3)=\frac{c_4(\xi_3)e^{y(\xi_3)}}{e^{z(\xi_3)}+m_2(\xi_3)e^{y(\xi_3)}} \tag{21}$$

由(10)式得

$$\overline{a_1a_2}T=\int_0^T a_1(t)a_1(t)\mathrm{d}t<\int_0^T\left[a_1(t)+a_2(t)b_1(t)\right]e^{x(t)}\mathrm{d}t\le\int_0^T\left(a_1(t)+a_2(t)b_1(t)\right)e^{x(\eta_1)}\mathrm{d}t=\overline{(a_1+a_2b_1)}e^{x(\eta_1)}T$$

从而

$$e^{x(\eta_1)}>\frac{\overline{a_1a_2}}{\overline{a_1+a_2b_1}}$$

因此得 $x(\eta_1)>\ln\frac{\overline{a_1a_2}}{\overline{a_1+a_2b_1}}=s_1$， 又由引理(2.2)得

$$x(t)>x(\eta_1)-\int_0^T\left|x'(t)\right|\mathrm{d}t>s_1-H_1=\underline{B_1} \tag{22}$$

由(17)得

$$b_1(\xi_1)e^{2x(\xi_1)}<\left(a_1(\xi_1)+a_2(\xi_1)b_1(\xi_1)\right)e^{x(\xi_1)}$$

从而得

$$x(\xi_1)<\ln\frac{a_1(\xi_1)+a_2(\xi_1)b_1(\xi_1)}{b_1(\xi_1)}$$

由引理(2.2)得

$$x(t)<x(\xi_1)+\int_0^T\left|x'(t)\right|\mathrm{d}t<\ln\frac{a_1(\xi_1)+a_2(\xi_1)b_1(\xi_1)}{b_1(\xi_1)}+H_1=\bar{B}_1 \tag{23}$$

取 $R_1=\max\left\{\left|\bar{B}_1\right|,\left|\underline{B_1}\right|\right\}$，根据(22)、(23)，则对 $\forall t\in R$ 有 $\left|x(t)\right|<R_1$， 由(19)式，

$$a_3(\xi_2)<\frac{c_2(\xi_2)e^{x(\xi_2)}}{e^{y(\xi_2)}+m_1(\xi_2)e^{x(\xi_2)}}$$

从而

$$e^{y(\xi_2)}<\frac{c_2(\xi_2)-a_3(\xi_2)m_1(\xi_2)}{a_3(\xi_2)}e^{x(\xi_2)}\le\frac{c_2(\xi_2)-a_3(\xi_2)m_1(\xi_2)}{a_3(\xi_2)}e^{\bar{B}_1}$$

故

$$y(\xi_2)<\ln\frac{\left[c_2(\xi_2)-a_3(\xi_2)m_1(\xi_2)\right]e^{\bar{B}_1}}{a_3(\xi_2)}=s_1 \tag{24}$$

由引理(2.2)得

$$y(t) < y(\xi_2) + \int_0^T |y'(t)| \mathrm{d}t < s_1 + H_2 = \bar{B}_2$$

由(12)得

$$\bar{a}_4 T = \int_0^T a_4(t)\mathrm{d}t < \int_0^T \frac{c_4(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}}\mathrm{d}t < \int_0^T \frac{c_4(t)\mathrm{e}^{\bar{B}_2}}{\mathrm{e}^{z(\xi_3)}}\mathrm{d}t = \frac{\bar{c}_4\mathrm{e}^{\bar{B}_2}}{\mathrm{e}^{z(\xi_3)}}T$$

从而有

$$z(\xi_3) < \ln\frac{\bar{c}_4\mathrm{e}^{\bar{B}_2}}{\bar{a}_4}$$

由引理(2.2)得

$$z(t) < z(\xi_3) + \int_0^T |z'(t)| \mathrm{d}t < \ln\frac{\bar{c}_4\mathrm{e}^{\bar{B}_2}}{\bar{a}_4} + H_3 = \bar{B}_3$$

有(18)得

$$\left(c_3(\eta_2)m_1(\eta_2) - c_2(\eta_2)\right)\mathrm{e}^{x(\eta_2)+z(\eta_2)} < c_2(\eta_2)m_2(\eta_2)\mathrm{e}^{x(\eta_2)}\mathrm{e}^{y(\eta_2)}$$

故

$$\mathrm{e}^{y(\eta_2)} > \frac{c_2(\eta_2)m_2(\eta_2)\mathrm{e}^{x(\eta_2)}}{\left(c_3(\eta_2)m_1(\eta_2) - c_2(\eta_2)\right)\mathrm{e}^{x(\eta_2)}\mathrm{e}^{z(\eta_2)}} > \frac{c_2(\eta_2)m_2(\eta_2)}{\left(c_3(\eta_2)m_1(\eta_2) - c_2(\eta_2)\right)\mathrm{e}^{\bar{B}_3}}$$

从而

$$y(\eta_2) > \ln\frac{c_2(\eta_2)m_2(\eta_2)}{\left(c_3(\eta_2)m_1(\eta_2) - c_2(\eta_2)\right)\mathrm{e}^{\bar{B}_3}} = s_2 \tag{25}$$

由引理(2.2)得

$$y(t) > s_2 - H_2 = \underline{B}_2$$

取 $R_2 = \max\left\{\left|\bar{B}_2\right|, \left|\underline{B}_2\right|\right\}$，则对 $\forall t \in R$，均有 $\left|y(t)\right| \le R_2$，由(20)得

$$a_4(\eta_3) = \frac{c_4(\eta_3)}{\mathrm{e}^{z(\eta_3)-y(\eta_3)} + m_2(\eta_3)} > \frac{c_4(\eta_3)}{\mathrm{e}^{z(\eta_3)-\underline{B}_2} + m_2(\eta_3)}$$

从而得

$$z(\eta_3) > \ln\frac{\left[c_4(\eta_3) - a_4(\eta_3)m_2(\eta_3)\right]\mathrm{e}^{\underline{B}_2}}{a_4(\eta_3)} = s_3 \tag{26}$$

由引理(2.2)得

$$z(t) > z(\eta_3) - \int_0^T |z'(t)| \mathrm{d}t > s_3 - H_3 = \underline{B}_3$$

取 $R_3 = \max\left\{\left|\bar{B}_3\right|, \left|\underline{B}_3\right|\right\}$，则对 $\forall t \in R$，均有 $\left|z(t)\right| < R_3$。

定理的条件保证了(24)、(25)、(26)有意义，取

$$\Omega=\left\{k(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T\in X:\left\|k(t)\right\|<R\right\},$$

其中 $R=R_1+R_2+R_3$， R_1， R_2， R_3 如上文假设，显然 N 在 Ω 上是 L-紧的，现在我们来验证 Mawhin 重合度定理。

1) 由 Ω 的选取及以上所述，对 $\forall\lambda\in(0,1)$， $\forall k\in\partial\Omega\cap DomL$， $Lk\neq\lambda Nk$；

2) 取 $\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T\in\partial\Omega\cap DomL$，那么 $\left\|\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T\right\|=R$，若 $QN\left(k(t)\right)=0$，那么由上述证明只其解 $\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T$ 是(10)~(12)所组成的方程组的解，故 $\left\|\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T\right\|<R$，这与 $\left\|\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T\right\|=R$ 矛盾，故 $QN\left(k(t)\right)\neq 0$；

3) 令 $J=I$，由于 $\operatorname{Im}Q=KerL$，为了验证 Mawhin 重合度定理，我们首先定义一个映射
$H:DomL\cap KerL\times[0,1]\to X$

$$H(x,y,z)=\mu QN(x,y,z)+(1-\mu)G(x,y,z)$$

其中 $\mu\in[0,1]$，

$$G(x,y,z)=\begin{pmatrix}\overline{a_1a_2}T-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\left(a_1(t)+b_1(t)a_2(t)\right)\mathrm{e}^{x(t)}\mathrm{d}t\\ \bar{a}_3T-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\dfrac{c_2(t)\mathrm{e}^{x(t)}}{\mathrm{e}^{y(t)}+m_1\mathrm{e}^{x(t)}}\mathrm{d}t\\ \bar{a}_4T-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\dfrac{c_4(t)\mathrm{e}^{y(t)}}{\mathrm{e}^{z(t)}+m_2\mathrm{e}^{y(t)}}\mathrm{d}t\end{pmatrix}$$

那么，G 是 QN 的一个同伦，由于 $G(x,y,z)=0$，在 R^3 内有唯一解，且 $(x,y,z)^T\neq(0,0,0)^T$，故
$\deg\{G,\Omega\cap KerL,0\}\neq 0$，根据引理(2.3)

$$\deg\{JQN,\Omega\cap KerL,0\}=\deg\{QN,\Omega\cap KerL,0\}=\deg\{G,\Omega\cap KerL,0\}\neq 0.$$

因此 $L(k)=N(k)$ 在 $DomL\cap\bar{\Omega}$ 上至少有一个周期解，从而(5)至少存在一个正周期解，证毕。

参考文献 (References)

[1] 徐利治. 现代数学手册——近代数学卷——第 7 篇[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1999: 343.

[2] 任景莉, 薛春燕. 微分方程中的泛函方法应用研究[M]. 北京: 北京科技大学出版社, 2006.

[3] 王明新. 生态学捕食模型、扩散与交错扩散[R]. 2010.

[4] Y. S. Lv, Z. J. Du. Existence and global attractivity of a positive periodic solution to a Lotka-Volterra model with mutual interference and Holling III type functional response. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(6): 3654-3664.

[5] M. Bohner, M. Fan and J. Zhang. Periodicity of scalar dynamic equations and applications to population models. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2007, 330: 1-9.

[6] M. Bohner, M. Fan and J. Zhang. Existence of periodic solution in predator-prey and competition dynamic systems. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2006, 7(5): 1193-1204.