Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 126-132
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32020 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Influence of Certain *C*-*S*-Permutable Subgroups on the Structure of Finite Groups*

Xuanli He[1], **Yanming Wang**[2#]

[1]College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning
[2]College of Mathematics and Information Science, Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou
Email: xuanlihe@163.com, #stswym@mail.sysu.edu.cn

Received: Nov. 29th, 2012; revised: Jan. 27th, 2013; accepted: Feb. 8th, 2013

Abstract: Let H be a subgroup of a finite group G and C a nonempty subset of G. Denote $\mathrm{Con}_C(H)=\{H^c \mid c\in C\}$. H is said to be *C*-*S*-permutable (Conjugate-Sylow-permutable) in G, if, for every Sylow subgroup T of G, there exists some element $H^c\in\mathrm{Con}_C(H)$ such that $H^cT=TH^c$. In this paper, we study the influence of certain *C*$-*S*-permutable subgroups of the finite group G on its structure. Some recent results are improved and extended.

Keywords: *C*-*S*-Permutable Subgroup; Generalized Fitting; Subgroup Formation

某些 *C*-*S*-置换子群对有限群结构的影响*

何宣丽 [1]，**王燕鸣** [2#]

[1]广西大学数学与信息科学学院，南宁
[2]中山大学岭南学院，数学与计算科学学院，广州
Email: xuanlihe@163.com, #stswym@mail.sysu.edu.cn

收稿日期：2012 年 11 月 29 日；修回日期：2013 年 1 月 27 日；录用日期：2013 年 2 月 8 日

摘 要：设 H 为有限群 G 的子群，C 为 G 的非空子集。记 $\mathrm{Con}_C(H)=\{H^c \mid c\in C\}$。如果对 G 的每个 Sylow 子群 T，都存在某个 $H^c\in\mathrm{Con}_C(H)$ 使得 $H^cT=TH^c$，则称 H 在 G 中是 *C*-*S*-置换的(共轭-Sylow-置换的)。本文，我们研究有限群 G 的某些 *C*-*S*-置换子群对 G 的结构的影响，改进并推广了最近的一些结果。

关键词：*C*-*S*-置换子群；广义 Fitting；子群群系

1. 引言

本文中所有群都是有限的。G总表示一个有限群，$|G|$为G的阶，$\pi(G)$为整除$|G|$的素因子所构成的集合。对某个 $p\in\pi(G)$，G_p表示G的一个Sylow p-子群。$M \lessdot G$是指M为G的一个极大子群。

设$\mathcal{F}$为一个群类。称$\mathcal{F}$为群系，如果1) 若 $G\in\mathcal{F}$ 且 $H\trianglelefteq G$，则 $G/H\in\mathcal{F}$；2) 若 $M;N\trianglelefteq G$ 且使得 G/M; $G/N\in\mathcal{F}$，则 $G/(M\cap N)\in\mathcal{F}$。称群系 $\mathcal{F}$ 为饱和群系，如果 $G/\Phi(G)\in\mathcal{F}$ 蕴含 $G\in\mathcal{F}$。本文中，μ表示所有超可解群构成的群类。显然μ是一个饱和群系(参见[1，p713，Satz 8.6])。对任意群G，广义Fitting子群$F^*(G)$是

*国家自然科学基金(11171353)和广西大学科研基金(DD051024)资助项目。
#通讯作者。

由G中诱导G的每个主因子的内自同构的元素所构成的集合。

称群G的子群H在G中是置换的(或逆正规的)，如果对G的任何子群K都有$HK = KH$。Kegel在[2]中首次引入了S-逆正规的概念，也称为S-置换的。称群G的子群H在G中是S-置换的，如果H与G的任何Sylow子群都可置换，即对G的任何Sylow子群S都有$HS = SH$。群论中的一个有趣的问题是研究群G的Sylow子群的极大子群对G的结构的影响。Srinivasan[3]给出了一个经典结果：如果G的任意Sylow子群的极大子群在G中正规，那么G是超可解的。显然，正规子群是置换子群。最近，一些学者通过替换子群的正规性为某种置换性，例如置换性或者S-置换性，从而推广了Srinivasan的结果。

子群的S-置换性的一个很重要的性质是它蕴含着正规性。注意到，在3阶对称群$S3$中，每个Sylow 2-子群都不是次正规的，从而都不是S-置换的。设P为S_3的一个Sylow 2-子群，Q是$S3$的一个Sylow子群。如果Q是一个Sylow 3-子群，则$PQ = QP$。如果是一个Sylow 2-子群，则存在$x \in G$使得$P = Q^x$，当然，此时有$PQ^x = Q^xP$。基于此，我们引入如下概念：

定义1.1 设H为G的子群，C为G的非空子集。记$\mathrm{Con}_C(H) = \left\{H^c \middle| c \in C\right\}$。称$H$在$G$中是$C$-$S$-置换的，如果对$G$的每个Sylow子群$T$，均存在某个元素$H^c \in \mathrm{Con}_C(H)$使得$H^cT = TH^c$，即存在某个元素$c \in C$使得$H^cT = TH^c$。

由定义，显然，对G的任意包含C的任何子集B，C-S-置换性蕴含B-S-置换性。

当包含G的单位元1时，S-置换子群必然是C-S-置换子群。事实上，S-置换子群可以看作是1-S-置换的。然而，下面的例子表明，C-S-置换性是S-置换性的非平凡推广。

例1 设$G = A_4$为4阶交错群，$H = \langle(123)\rangle$，$K = \langle(12)(34)\rangle$，$C = K_4 = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$。我们知道$H$在$G$中不是次正规的，因而$H$在$G$中不是$S$-置换的。然而，$H$在$G$中是$C$-$S$-置换的。事实上，$H^{(12)(34)}\langle(124)\rangle = \langle(124)\rangle H^{(12)(34)}$，$H^{(13)(24)}\langle(134)\rangle = \langle(134)\rangle H^{(13)(24)}$，$H^{(14)(23)}\langle(234)\rangle = \langle(234)\rangle H^{(14)(23)}$。显然$HK_4 = K_4H$，其中$K_4$是Klein 4-群。因此$H$在$G$中是$C$-$S$-置换的。

我们知道K在K_4中是正规的，从而在G中是次正规的。然而K在G中不是G-S-置换的，这是因为，要不然G有6阶子群。因此，对G的任意非空子集C，K都不是C-S-置换的。

此例表明，S-置换性蕴含着次正规性和C-S-置换性，但次正规性和C-S-置换性是不同的概念。

例2 设$G = A_5$是5阶交错群，$H = \langle(12)(34)\rangle$。

1) G的任意二阶子群与H在G中共轭。

注意到，G的2阶元具有形式$(a_1,a_2)(a_3,a_4)$。令

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

那么$\langle(a_1,a_2)(a_3,a_4)\rangle = H^\alpha$。

2) H在G中是G-S-置换的。事实上，设G_2是G的任意Sylow 2-子群。由Sylow定理可知，存在某个$g \in G$使得$H \le G_2^g$那么$HG_2^g = G_2^gH$，$H^{g^{-1}}G_2 = G_2H^{g^{-1}}$。设$G_3$为$G$的任意Sylow 3-子群，则$\left|N_G(G_3)\right| = 6$。设$G_5$是$G$的任意Sylow 5-子群。易知，$\left|N_G(G_5)\right| = 10$。因此，$G$的Sylow 3-子群的正规化子以及Sylow 5-子群的正规化子之中均包含G 的2阶子群。再由(1)可知，对G的任意Sylow p-子群G_p，$p \in \pi(G)$，都存在某个$y \in G$使得$H^y \le N_G(G_p)$。于是有$H^yG_p = G_pH^y$。因此H在G中是G-S-置换的。然而，显然H在G中不是次正规的，从而也不是S-置换的。

此例表明，即使是不可交换单群也有非平凡的G-S-置换子群，但这对于S-置换性和次正规性来说是不正确的。

定义1.2 设G为群。我们按以下规则定义n-广义Fitting子群$\left\{F_n^*(G)\right\}$：

$$F_0^*(G) = 1, F_1^*(G) = F^*\left(G/F_0^*(G)\right) = F^*(G),\cdots,F_n^*(G)/F_{n-1}^*(G) = F^*\left(G/F_{n-1}^*(G)\right),\cdots。$$

因为$G \ne 1$时$F^*(G) > 1$，所以存在一个正整数n，使得$F_n^*(G) = G$因此G有下面正规列：

$$1 \lhd F^*(G) \lhd F_2^*(G) \lhd \cdots \lhd F_n^*(G) \lhd \cdots \lhd G. \quad (1)$$

当G可解时，正规列(1)将变为如下正规列：

$$1 \lhd F(G) \lhd F_2(G) \lhd \cdots \lhd F_n(G) \lhd \cdots \lhd G. \quad (2)$$

本文中，$S(G)$总表示G的最大可解正规子群，我们主要讨论$C = S(G)$时有限群G的某些C-S-置换极大子群对G的结构的影响。特别地，当G是可解群时，即是G-S-置换性。

由著名的P. Hall定理可知，任何可解群G都有Hall{p；q}-子群，其中p；q为$|G|$的任意素因子。因此可解群G的任意Sylow子群都是G-S-置换的。有限单群的分类定理(参见[4]，定理4.1)表明上述结论的逆也成立。

本文得到如下主要定理：

主要定理 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。那么$G \in \mathcal{F}$当且仅当存在G的正规子群H及正整数n使得$G/H \in \mathcal{F}$且n-广义Fitting子群$F_n^*(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的。

2. 预备知识

引理**2.1** 设C为G的非空子集。如果$K \trianglelefteq G$且$H \le G$，那么我们有：

1) 若H在G中是C-S-置换的，$H \le K$，则H在K中是C-S-置换的。进一步，如果C是G的置换子群，那么H在K中也是$C \cap K$-S-置换的；

2) 若H在G中是C-S-置换的，则HK/K在G/K中是CK/K-S-置换的；

3) 假设H在G中是C-S-置换的，$K \le H$。则H/K在G/K中是CK/K-S-置换的当且仅当H在G中是C-S-置换的。

证明 1) 设K_p为K的Sylow子群，则存在G的Sylow子群G_p使得$K_p \le G_p$。由假设可知，存在$c \in C$使得$H^cG_p = G_pH^c$。因为$K \trianglelefteq G$，所以$Hc \le K$。因此，

$$H^cK_p = H^c(G_p \cap K) = (H^cG_p) \cap K = (G_pH^c) \cap K = (G_p \cap K)H^c = K_pH^c,$$

故H在K中是C-S-置换的。

如果C是G的置换子群，那么$K_pC = CK_p$是G的子群。因为$K_p^{c^{-1}} \le K$且$K_p^{c^{-1}} \le K_pC$，所以$K_p^{c^{-1}} \le (K_pC) \cap K = K_p(C \cap K) \le K$。由于$K_p^{c^{-1}}$和$K_p$都是$K_p(C \cap K)$的Sylow p-子群，于是存在某个元素$l \in C \cap K$使得$K_p^{c^{-1}} = K_p^l$注意到，$H^cK_p = K_pH^c$当且仅当$HK_p^{c^{-1}} = K_p^{c^{-1}}H$当且仅当$HK_p^l = K_p^lH$当且仅当$H^{l^{-1}}K_p = K_pH^{l^{-1}}$，其中$l^{-1} \in C \cap K$。因此$H$在$K$中是$C \cap K$-$S$-置换的。

2) 设G_p为G的任意Sylow子群。由假设条件，存在某个$c \in C$使得$H^cG_p = G_pH^c$。因为$K \trianglelefteq G$，所以$(HK/K)^{cK} \cdot G_pK/K = H^cK/K \cdot G_pK/K = G_pK/K \cdot H^cK/K = G_pK/K \cdot (HK/K)^{cK}$。因此$HK/K$在$G/K$中是$CK/K$-$S$-置换的。

3) 充分性由(2)可得，下证必要性。由假设条件，存在某个$cK \in CK/K$使得$(H/K)^{cK} \cdot G_pK/K = G_pK/K \cdot (H/K)^{cK}$，其中$c \in C$。于是有$H^cG_p/K = G_pH^c/K$，所以$H^cG_p = G_pH^c$。因此$H$在$G$中是$C$-$S$-置换的。

引理**2.2** ([5，引理2.6])设H是G的正规子群。如果$H \cap \Phi(G) = 1$，那么$F(H)$是G的包含着$F(H)$中的极小正规子群的之积。特别地，若$\Phi(G) = 1$，则$F(G)$是包含在$F(G)$ 中的G 的极小正规子群的之积。

引理**2.3** ([1，p. 269，Hilfssatz 3.3(a)]) 设N为G的正规子群，$H \le G$。如果$N \le \Phi(H)$，那么$N \le \Phi(G)$。

引理**2.4** 设M为G的子群。

1) $F^*(G) = F(G)E(G)$且$[F(G), E(G)] = 1$，其中$E(G)$是G的不可解成份；

2) 若M在G中正规，则$F^*(M) \le F^*(G)$；

3) 若 $G\neq 1$，则 $F^*(G)\neq 1$。事实上，$F^*(G)/F(G)=Soc\left(F(G)C_G\left(F(G)\right)/F(G)\right)$；

4) $F^*\left(F^*(G)\right)=F^*(G)\geq F(G)$。若 $F^*(G)$ 可解，则 $F^*(G)=F(G)$；

5) 设*P*是包含在 $Op(G)$ 中的*G*的正规子群，则 $F^*\left(G/\Phi(P)\right)=F^*(G)/\Phi(P)$；

6) 如果*K*是包含在 $Z(G)$ 中的*G*的子群，那么 $F^*(G/K)=F^*(G)/K$。

证明(1)~(4)参看[6，X，定义13.14，推论13.11和定理13.13]；(5)参看[7，引理2.3 (5)]；(6)参看[8，引理2.9 (4)]。

3. 一些独立的结果

定理**3.1** 设*p*是 $\pi(G)$ 中的最小素数，*P*是*G*的Sylow *p*-子群。如果*P*的所有极大子群在*G*中都是*S*(*G*)-*S*-置换的，那么*G*是*p*-幂零的。

证明 假定结论不成立并设*G*为极小阶反例。由引理2.1 (2)可知，定理条件是商群遗传的。设*N*是*G*的一个极小正规子群。因为*p*-幂零群类是饱和群系，所以由*G*的选取蕴含着*N*是*G*的唯一的极小正规子群且 $\Phi(G)=1$。因此*G*是单块本原群且满足*G*/*N*是*p*-幂零群。如果 $O_{p'}(G)\neq 1$，那么 $G=O_{p'}(G)$ 是*p*-幂零群，从而*G*也是*p*-幂零群，矛盾。故 $O_{p'}(G)=1$。

断言*N*是可解的。若*N*不可解，则 $N\not\leq S(G)$。因此 $S(G)=1$，此时*P*的极大子群在*G*中*S*-置换。由[9，定理3.1]可知，*G*是*p*-幂零的，矛盾。因此*N*可解，并且 $N\leq O_p(G)\leq F(G)\leq C_G(N)$。因为*G*是单块本原群，所以可得 $N=C_G(N)$。

由 $\Phi(G)=1$ 及引理2.3可得，$N\not\leq\Phi(P)$。于是存在*P*的某个极大子群*P*1使得 $N\not\leq P_1$。根据定理假设条件可知，*P*1在*G*中*S*(*G*)-*S*-置换，则对任意 $q\in\pi(G)$ 及 $G_q\in Syl_q(G)$，均存在 $c\in S(G)$ 使得 $P_1^cG_q=G_qP_1^c$。如果 $q\neq p$，那么 $N\bigcap P_1=N\bigcap P_1G_q^{c^{-1}}\trianglelefteq P_1G_q^{c^{-1}}$。于是对任意 $q\in\pi(G)$，$q\neq p$，都有 $G_q^{c^{-1}}\leq N_G\left(N\bigcap P_1\right)$。显然，$N\bigcap P_1\trianglelefteq P$。从而 $N\bigcap P_1\trianglelefteq G$，$N\bigcap P_1=1$。因此 $|N|=p$，*G*是*p*-幂零的，矛盾。

定理3.2 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系，*H*是*G*的正规子群且使得 $G/H\in\mathcal{F}$。则 $G\in\mathcal{F}$ 当且仅当*H*的Sylow子群的所有极大子群在*G*中都是*S*(*G*)-*S*-置换的。

证明 如果 $G\in\mathcal{F}$，通过选取*H* = 1就能证明必要性。所以我们只需证明充分性。假设充分性不成立，设*G*为极小阶反例。则有：

1) $G/Q\in\mathcal{F}$，其中*Q*为*H*的Sylow *q*-子群，*q*是整除 $|H|$ 的最大素因子

因为*S*(*G*)在*G*正规，所以由引理2.1(1)可得，*H*的任意Sylow子群的极大子群在*H*中都是 $S(G)\bigcap H$-*S*-置换的，从而是*S*(*H*)-*S*-置换的。由定理3.1可得，*H*是*p*-幂零的，其中*p*为整除 $|H|$ 的最小素因子。因此*H*有正规Hall p'-子群，记为*K*。由引理2.1(1)，*K*满足定理假设条件。反复应用引理2.1及定理3.1可得，*H*具有超可解型Sylow塔性质。设*q*为整除 $|H|$ 的最大素因子，*Q*为*H*的Sylow *q*-子群。因为*Q*是*H*的特征子群且 $H\trianglelefteq G$，所以 $Q\trianglelefteq G$。考虑因子群*G*/*Q*。由引理2.1(2)可知，*G*/*Q*满足定理假设条件。*G*的极小性选择蕴含着 $G/Q\in\mathcal{F}$。

2) *Q*是*G*的极小正规子群

设*N*为*G*的包含在*Q*中的极小正规子群。类似地可验证得*G* = *N*满足假设定理条件。由*G*的选择可知 $G/N\in\mathcal{F}$。若*Q*中包含*G*的另一个极小正规子群*K*，则易证得 $G\in\mathcal{F}$。因此，*N*是*G*的包含在*Q*中的唯一的极小正规子群。如果*N* ≤ $\Phi(G)$，那么 $G/\Phi(G)\cong(G/N)/\left(\Phi(G)/N\right)\in\mathcal{F}$，$G\in\mathcal{F}$，矛盾。从而 $\Phi(Q)=1$，*Q*交换且 $N\not\leq\Phi(G)$。所以*G*有极大子群*M*使得 $N\not\leq M$。则有 $G=N\rtimes M=QM$。因为 $Q\bigcap M\trianglelefteq M$ 且*Q*交换，所以 $Q\bigcap M\trianglelefteq G$。如果 $Q\bigcap M\neq 1$，那么 $Q\bigcap M$ 就是*G*的包含在*Q*中的正规子群。因此由*N*的唯一性可得 $N\leq Q\bigcap M\leq M$，矛盾，于是有 $Q\bigcap M=1$，$Q=N$。

3) 完成证明

由引理2.3 可知，$Q\not\leq\Phi\left(G_q\right)$，其中$G_q$是*G*的任意Sylow *q*-子群。否则 $Q\leq\Phi(G)$，矛盾。因此，G_q有一个极大子群G_1使得 $Q\not\leq G_1$，因此有 $QG_1=G_q$。那么 $|Q:Q\bigcap G_1|=|QG_1:G_1|=|G_q:G_1|=q$。所以 $Q\bigcap G_1$ 是*Q*的极大子群。

记$Q_1 = Q\bigcap G_1$。由定理假设知，Q_1在G中是$S(G)$-S-置换的。因此，对任意$r\in\pi(G)$，$G_r\in Syl_r(G)$，存在某个$c\in S(G)$使得$Q_1^c G_r = G_r Q_1^c$。如果$r\neq q$，那么$Q_1 = Q\bigcap G_1 = Q\bigcap G_1 G_r^{c^{-1}} \trianglelefteq G_1 G_r^{c^{-1}}$。进而对任意$r\in\pi(G)$，$r\neq q$，都有$G_r^{c^{-1}}\le N_G(Q_1)$。显然，$Q_1 = Q\bigcap G_1\trianglelefteq G_q$。从而有$Q_1\trianglelefteq G$。由(2)可知，$Q_1 = 1$。因此$|Q| = q$。应用文[5]中引理2.7。

可得$G\in\mathcal{F}$，矛盾。

推论3.1 设H是G的正规子群且满足G/H是超可解群。如果H的Sylow子群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的，那么G是超可解群。

定理3.3 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系，C为G的非空子集。则$G\in\mathcal{F}$当且仅当G有可解的正规子群H使得$G/H\in\mathcal{F}$且$F(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是C-S-置换的。

证明 显然我们只需证明充分性。假设充分性不成立，设G为极小阶反例，则我们有：

1) $H\bigcap\Phi(G)=1$

如果$H\bigcap\Phi(G)\neq 1$，那么存在素数p使得整除$p\,\|\,H\bigcap\Phi(G)|$。设$P_0\in Syl_p(H\bigcap\Phi(G))$，则$P_0\trianglelefteq G$。由[1，p.270，Satz 3.5]知，$F(H/P_0)=F(H)/P_0$。由引理2.1(2)可知，$G/P_0$满足假设定理条件。再由$G$的极小选取可知，$G/P_0\in F$。因为$P_0\le\Phi(G)$，所以$G\in F$，矛盾。

2) $G/F(H)\in\mathcal{F}$

由(1)及引理2.2可知，$F(H)$是G的包含在$F(H)$中的极小正规子群的乘积。记$F(H)=R_1\times R_2\times\cdots\times R_t$，其中$R_i$是$G$的极小正规子群。因为$H$是可解的，所以$F(H)$是交换群。

我们断言每一个$R_i(i=1,\cdots,t)$都是素数阶循环群。否则，存在某个R_i不是素数阶的。不失一般性，我们可以假设R_1不是素数阶群，且设R_1的阶为p^α，其中$p\in\pi(F(G))$，$\alpha>1$为正整数。设$Op(H)$为$F(H)$的Sylow p-子群，G_p是G的Sylow p-子群。那么$O_p(H)\trianglelefteq G$由(1)及引理2.3可知，$R_1\not\le\Phi(G_p)$，因此存在G_p的某个极大子群G_p^*使得$R_1\not\le G_p^*$。那么$|R_1:R_1\bigcap G_p^*|=|R_1G_p^*:G_p^*|=|G_p:G_p^*|=p$。所以$R_1\bigcap G_p^*$是$R_1$的极大子群。记$P=O_p(H)=R_1R_{i_2}\cdots R_{i_s}$，其中$R_{i_j}\in\{R_2,\cdots,R_t\}$，$P_1=(R_1\bigcap G_p^*)R_{i_2}\cdots R_{i_s}=P\bigcap G_p^*$，那么$P_1$是$P$的极大子群且$R_1\not\le P_1$。由定理假设知，$P_1$在$G$中是$C$-$S$-置换的。从而对任意$q\in\pi(G)$及$G_q\in Syl_q(G)$均存在某个$c\in C$使得$P_1^cG_q=G_qP_1^c$。如果$q\neq p$，那么$R_1\bigcap P_1=R_1\bigcap P_1G_q^{c^{-1}}\trianglelefteq P_1G_q^{c^{-1}}$于是，对任意$q\in\pi(G)$，$q\neq p$，都有$G_q^{c^{-1}}\le N_G(R_1\bigcap P_1)$。显然，$P_1=P\bigcap G_p^*\trianglelefteq G_p$，$R_1\bigcap P_1\trianglelefteq G_p$。因此$R_1\bigcap P_1\trianglelefteq G$，进而$R_1\bigcap P_1=1$。故$|R_1|=p$是素数。

所以，我们有$G/C_G(R_i)$是交换群。从而$G/C_G(R_i)\in\mathcal{F}$。因此，$G/C_H(R_i)=G/H\bigcap C_G(R_i)\in\mathcal{F}$，$G/\bigcap C_H(R_i)\in\mathcal{F}$。因为$C_H(F(H))=\bigcap_{i=1}^{i=t}C_H(R_i)$，所以$G/C_H(F(H))\in\mathcal{F}$。又因为$H$可解，所以$C_H(F(H))\le F(H)$。故$G/F(H)\in\mathcal{F}$。

3) 反例不存在

设$T_i=R_1\times\cdots\times R_{i-1}\times R_{i+1}\times\cdots\times R_t$，则$F(H)/T_i\cong R_i$。由(2)可知，$(G/T_i)/(F(H)/T_i)\in\mathcal{F}$。由(2)的证明可知，$|Ri|$为素数。因此$G/T_i\in\mathcal{F}$，从而$G\cong G/\bigcap T_i\in\mathcal{F}$，矛盾，证毕。

推论3.2 设H为G的可解正规子群且满足G/H是超可解群，C是G的非空子集。如果$F(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是C-S-置换的，那么G是超可解群。

定理3.4 设H是G的正规子群且使得G/H是超可解群。如果$F^*(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的，那么G是超可解的。

证明 假设定理不成立，设G为极小阶反例。则有

1) $H=G$且$F^*(G)=F(G)<G$

由引理2.1 (1)及推论3.1可知，$F^*(H)$是超可解的。由引理2.4(4)可得，$F^*(H)=F(H)$。若$F^*(H)=(H)$，再由推论3.1可得，G是超可解的，矛盾。

如果$H<G$，那么由(1)可得H是超可解的。再由推论3.2可得，G是超可解的，矛盾。

2) G的每个包含$F^*(H)$的真正规子群都是超可解的

设N是G的包含 $F^*(H)$的真正规子群。由引理2.4(2)可得，$F^*(H)=F^*(F^*(H))\le F^*(N)\le F^*(H)$，所以 $F^*(H)=F^*(N)$。因此，由引理2.1(1)可知，N满足定理假设条件。G的选取蕴含着N是超可解的。

3) G没有素数阶正规子群

否则，设P_0是G的素数阶正规子群，P是 $F(G)$ 的包含P_0的Sylow子群。因为 $P_0\le Z(P)\le Z(F(G))$，所以 $F^*(G)=F(G)\le C_G(P_0)\trianglelefteq G$。如果$C_G(P_0)<G$，那么由(1)可知，$CG(P_0)$是超可解的。因此 $F(C_G(P_0))=F^*(C_G(P_0))=F^*(G)=F(G)$。由于$G/C_G(P_0)$循环，再由推论3.2可知，$G$是超可解的，矛盾。如果$C_G(P_0)=G$，那么$P_0\le Z(G)$。由引理2.4 (6)知，$F^*(G/P_0)=F^*(G)/P_0$。应用引理2.1(2)可得，$G/P$满足定理假设条件。再由$G$的极小选取可知，$G/P_0$是超可解的，从而$G$是超可解的，矛盾。因此$G$没有素数阶正规子群。

4) 对任意 $p\in\pi(F(G))$，$P\in Syl_p(F(G))$，都有 $P\cap\Phi(G)\ne 1$

如果 $P\cap\Phi(G)=1$，那么由引理2.2可知，$P=L_1\times L_2\times\cdots\times L_s$，其中 $L_i\,(i=1,\cdots,s)$是G的包含在P中的极小正规子群。因为 $P\not\le\Phi(G)$，所以G有一个极大子群M使得$G=PM$。则 $G_p=PM_p$，其中M_p是M的Sylow p-子群。取G_p的包含M_p的极大子群G_0。则$|P:P\cap G_0|=|PG_0:G_0|=|G_p:G_0|=p$，因此 $P\cap G_0\lessdot P$ 记 $P_0=P\cap G_0$。由定理假设可知，P_0在G中是$S(G)$-S-置换的。从而，对任意 $q\in\pi(G)$，$Gq\in Sylq(G)$，都存在某个 $c\in S(G)$ 使得 $P_0^cG_q=G_qP_0^c$。如果 $q\ne p$，那么 $P_0=P\cap P_0=P\cap P_0G_q^{c^{-1}}\trianglelefteq P_0G_q^{c^{-1}}$。从而，对任意 $q\in\pi(G)$，$q\ne p$，均有 $G_q^{c^{-1}}\le N_G(P_0)$。显然，$P_0=P\cap G_0\trianglelefteq G_p$。因此 $P_0\trianglelefteq G$。由Jordan-Hölder定理可知，G有一个包含在P中的素数阶正规子群，与(3)矛盾。

设p为$\pi(F(G))$中固定的素数，取L为G的包含在 $P\cap\Phi(G)$ 中的极小正规子群。

5) $F(G)=P$

设 $Q\ne 1$为 $F(G)$ 的Sylow q-子群，Q_0是G的包含在Q中的极小正规子群，其中 $q\ne p$。由引理2.4(1)知，$F^*(G/L)=F(G/L)\cdot E(G/L)=F(G)/L\cdot T/L$，其中 $E(G/L)$ 是 G/L 的层。因为$[F(G/L),E(G/L)]=1$，所以，由引理2.4(1)可知，$[Q_0,T]\le L\cap Q_0=1$，即 $T\le C_G(Q_0)$。由(3)可得，$C_G(Q_0)<G$。显然，$F^*(G)=F(G)\le C_G(Q_0)$。再由(1)可得，$C_G(Q_0)$ 是超可解的，那么$T=L$。所以 $F^*(G/L)=F(G)/L=F^*(G)/L$。由引理2.1(2)及G的极小性可知，G/L 是超可解的，从而G是超可解的，矛盾。故 $F(G)$ 是p-群。

6) $F^*(G/L)=G/L$

如果 $F^*(G/L)<G/L$，那么由引理2.4(1)知，$F^*(G/L)=F(G/L)\cdot E(G/L)=F(G)/L\cdot E/L$，其中 $E(G/L)$ 是 G/L 的层。因为 $F^*(G)=F(G)\le F(G)E<G$，由(1)可知，$F(G)E$ 是超可解的，从而 $F(G)E/L=F^*(G/L)$ 是超可解的。因此 $F^*(G/L)=F(G/L)=F(G)/L=F^*(G)/L$。由引理2.1(2)及$G$的极小性可知，$G/L$ 是超可解的，从而G 是超可解的，矛盾。

7) G/P是非交换单群

由(5)，(6)及引理2.4(3)可知，

$$G/P\cong(G/L)/(P/L)=F^*(G/L)/F(G/L)=Soc\left(F(G/L)\cdot C_{G/L}(F(G/L))/F(G/L)\right)$$

设 $Soc\left(F(G/L)\cdot C_{G/L}(F(G/L))/F(G/L)\right)=(N_1/L)/F(G/L)\times(N_2/L)/F(G/L)\times\cdots\times(N_s/L)/F(G/L)$，其中 $(N_i/L)/F(G/L)$是 $(G/L)/F(G/L)$ 的极小正规子群。如果$s>1$，那么($(N_i/L)/F(G/L)<(G/L)/F(G/L)$。由(1)可知，$F^*(G)/L=F(G)/L=F(G/L)\le N_i/L<G/L$ 且N_i是超可解的。所以，G是可解的。由推论3.2可知，G是超可解的，矛盾。因此$s=1$，$G/P\cong(G/L)/(P/L)=(N_1/L)/F(G/L)$是非交换单群。

8) 得出矛盾

因为 $S(G)P/P$ 是 G/P 的可解正规子群，所以由(7)可知 $S(G)P/P=1$，从而 $S(G)\le P$。任取P的极大子群，记为P_1。由假设知，P_1在G中是$S(G)$-S-置换的。从而，对任意 $q\in\pi(G)$，$G_q\in Syl_q(G)$，均存在某个 $c\in S(G)$ 使得 $P_1^cG_q=G_qP_1^c$。因为$S(G)\le P$，所以，对任意 $q\in\pi(G)$，$G_q\in Syl_q(G)$，均存在某个 $c\in S(G)$ 使得 $P_1Gq=GqP_1$。从而P_1在G中是S-置换的。由[5，定理3.1]可知，G是超可解的，矛盾。

证毕。

推论3.3 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。那么 $G\in\mathcal{F}$ 当且仅当G有正规子群H使得 $G/H\in\mathcal{F}$ 且 $F^*(H)$ 的Sylow子

群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的。

证明 我们只需证明充分性。由推论假设及引理2.1(1)可知，$F^*(H)$的Sylow子群的极大子群在H中是$S(G)$-S-置换的。由定理3.4可知，H是超可解的。所以$F^*(H)=F(H)$。再由定理3.3可知，$G\in\mathcal{F}$。证毕。

4. 主要定理及应用

定理4.1 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。那么$G\in\mathcal{F}$当且仅当存在G的正规子群H及正整数n使得$G/H\in\mathcal{F}$且n-广义Fitting子群$F_n^*(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的。

证明 我们只需证明充分性。假设定理不真，设G为极小阶反例。分以下两步证明。

1) $G/F_n^*(H)\in\mathcal{F}$

如果$n=1$，那么由推论3.3可知$G\in\mathcal{F}$，矛盾。因此$n\geq 2$。由定义1.2可知，$F^*\left(H/F_{n-1}^*(H)\right)=F_n^*(H)/F_{n-1}^*(H)$。根据定理假设及引理2.1 (2)可知，$F_n^*(H)/F_{n-1}^*(H)$的Sylow子群的极大子群在$F_n^*(H)/F_{n-1}^*(H)$中是$S(G)F_{n-1}^*(H)/F_{n-1}^*(H)$置换的。再由推论3.3可得，$G/F_{n-1}^*(H)\in\mathcal{F}$因此

$$G/F_n^*(H)\cong\left(G/F_{n-1}^*(H)\right)/\left(F_n^*(H)/F_{n-1}^*(H)\right)\in\mathcal{F}\text{。}$$

2) 得出矛盾

由引理2.1(1)及推论3.1可知，$F_n^*(H)$是超可解的。设Q是$F_n^*(H)$的Sylow q-子群，其中q是$\pi\left(F_n^*(H)\right)$中的最大素因子。因为Q char $F_n^*(H)\trianglelefteq G$，所以$Q\trianglelefteq G$。考虑因子群$G/Q$。由(1)及引理2.1可知，$G/Q\in\mathcal{F}$。再由定理3.2可知，$G\in\mathcal{F}$，矛盾。证毕。

推论4.1 设H是G的正规子群且满足G/H是超可解群。如果存在正整数n使得n-广义Fitting子群$F_n^*(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是$S(G)$-S-置换的，那么G是超可解群。

定理3.2和推论3.3分别是定理4.1当$n=\infty$和$n=1$时的特殊情形。

定理4.1中，当$n=\infty$且$S(G)=1$时，是S-置换等价于1-S-置换，我们有

推论4.2 (Asaad [10]) 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。那么$G\in\mathcal{F}$当且仅当存在G的正规子群H使得$G/H\in\mathcal{F}$且H的Sylow子群的极大子群在G中是S-置换的。定理4.1中，当$n=1$且$S(G)=1$时，我们有

推论4.3 (Li. Wang，Wei [5]) 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。那么$G\in\mathcal{F}$当且仅当存在G的正规子群H使得$G/H\in\mathcal{F}$且$F^*(H)$的Sylow子群的极大子群在G中是S-置换的。

如果定理4.1中的H是可解群，那么当$n=\infty$时，即为定理3.2；当$n=1$时，即为定理3.3；当$n=\infty$且$S(G)=1$时，即为推论4.2；当$n=1$且$S(G)=1$时，我们有

推论 4.4 (Asaad [10]) 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{U}$的饱和群系。如果 G 是可解群，那么$G\in\mathcal{F}$当且仅当存在 G 的正规子群 H 使得$G/H\in\mathcal{F}$且 $F(H)$的 Sylow 子群的极大子群在 G 中是 S-置换的。

参考文献 (References)

[1] B. Huppert. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
[2] O. H. Kegel. Sylow-Gruppen und subnormalteiler endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, 78: 205-221.
[3] S. Srinivasan. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups. *Israel Journal of Mathematics*, 1980, 35: 210-214.
[4] Z. Arad, M. B. Ward. New criteria for the solvability of finite groups. *Journal of Algebra*, 1982, 77: 234-246.
[5] Y. Li, Y. Wang and H. Wei. The influence of π-quasinormality of some subgroups of a finite group. *Archiv der Mathematik* (*Basel*), 2003, 81(3): 245-252.
[6] B. Huppert, N. Blackburn. Finite groups III. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1982.
[7] H. Wei, Y. Wang and Y. Li. On *c*-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups II. *Communications in Algebra*, 2003, 31(10): 4807-4816.
[8] Y. Li, Y. Wang. On π-quasinormally embedded subgroups of finite group. *Journal of Algebra*, 2004, 281: 109-123.
[9] M. Asaad and A. A. Heliel. On S-quasinormal embedded subgroups of finite groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2001, 165: 129-135.
[10] M. Asaad. On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. *Communications in Algebra*, 1998, 26(11): 3647-3652.