Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 133-138
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32021 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Periodic Solutions of the Restricted 3-Body Problem with Homogeneous Potentials

Yingying Qi[1], Xuemei Chen[1], Wei Li[2]

[1]Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu
[2]The School of Economic Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu
Email: qssy0510@163.com, 1048851639@qq.com, liwei66824@163.com

Received: Dec. 1st, 2012; revised: Jan. 2nd, 2013; accepted: Jan. 19th, 2013

Abstract: We use variational minimizing methods to study spatial restricted 3-body problems with a very small mass moving on the vertical axis of the moving plane for two masses. We assume the denominator exponent $\beta \geq 0$ in the potential energy depending on distances. We use Jacobi's necessary condition to prove the periodic solution is nonconstant for any period.

Keywords: Restricted 3-Body Problems; Non-Planar Periodic Solutions; Jacobi's Necessary Conditions

具有齐次势的空间限制三体问题的非平面周期解

齐英瑛[1]，陈雪梅[1]，李　伟[2]

[1]四川大学数学学院，成都
[2]西南财经大学经济数学学院，成都
Email: qssy0510@163.com, 1048851639@qq.com, liwei66824@163.com

收稿日期：2012 年 12 月 1 日；修回日期：2013 年 1 月 2 日；录用日期：2013 年 1 月 19 日

摘　要：在本文中，我们用变分法研究一类具有齐次势的空间限制三体问题。我们先用变分极小化方法得到一个变分极小值点，然后应用雅克比必要条件证明该变分极小值点对应该空间限制三体问题的非平面周期解。

关键词：限制三体问题；非平面周期解；雅克比必要条件

1. 引言

三个天体中，有一个天体的质量与其他两个天体的质量相比，小到可以忽略时，这样的三体问题称为限制性三体问题。一般地把这个小质量的天体称为无限小质量体，或简称小天体；把两个大质量的天体称为有限质量体。把小天体的质量看成无限小，就可不考虑它对两个有限质量体的吸引，也就是说，它不影响两个有限质量体的运动。于是，对两个有限质量体的运动状态的讨论，仍为二体问题，其轨道就是以它们的质量中心为焦点的圆锥曲线。根据圆锥曲线为圆、椭圆、抛物线和双曲线等四种不同情况，相应地限制性三体问题分四种类型：圆型限制性三体问题、椭圆型限制性三体问题、抛物线型限制性三体问题和双曲线型限制性三体问题。图 1 限制性三体问题常用于研究月球火箭和行星际飞行器运动的简化力学模型和行星际飞行器运动理论。

K. Sitnikov，Mathlouthis 等都曾用变分中的极小极大方法来研究限制三体题的周期解[1-7]。近来，张世清，李凤英，赵晓晓研究了一类圆形限制 $N+1$ 问题的周期解。他们研究的是等质量的 N 个天体在同一个圆周上运动，另外一个小质量的天体在过这 N 个天体公共质心且垂直于圆轨道平面的轴线上运动。他们用变分极小化方法证明了此类问题非平面周期解的存在性。

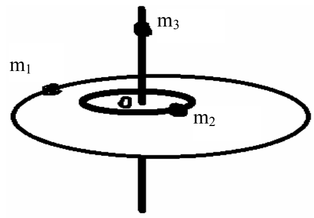

Figure 1. The orbits of the restricted three body problem
图 1. 限制三体问题轨道示意图

在他们工作的的启发下，我们研究下述空间限制三体问题非平面周期解的存在性：质量为$m_1, m_2\ (m_1 \neq m_2)$的两个质点绕着它们的公共质心做圆轨道运动。第三个质量很小的质点在过m_1, m_2的质心，且垂直m_1, m_2圆轨道平面的直线上运动。假设平面圆轨道由下式给出：

$$q_1(t) = r_1 e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{T}t}, q_2(t) = -r_2 e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{T}t} \tag{1}$$

半径r_1，r_2是正常数。我们假设

$$m_1 q_1(t) + m_2 q_2(t) = 0, \qquad m_1 + m_2 = 1 \tag{2}$$

$q_1(t)$，$q_2(t)$满足牛顿方程：

$$m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

李凤英，张世清，赵晓晓[8]研究了如下的势函数U

$$U = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|}$$

我们考虑更广的势函数U

$$U = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|^{\beta}}, \quad \beta \geq 0$$

小质量质点受到m_1，m_2的引力，它的轨道$z(t) = (0, 0, q(t))$满足下面的方程：

$$\ddot{z} = \frac{-\beta m_1 z}{\left(z^2 + r_1^2\right)^{\frac{\beta}{2}+1}} + \frac{-\beta m_2 z}{\left(z^2 + r_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}+1}}, \tag{4}$$

我们得到下面的定理：

定理 1 方程(4)至少存在一个非平凡的周期解。

注解 本文研究的是不等质量的限制三体问题，所考虑的势函数更加广泛，得到的非平面周期解对应变分泛函最小值点，这种解恰恰是物理学家最关注的解。

2. 预备知识

下面引入一些记号：

$$W^{1,2}(R/TZ, R) = \left\{u(t) \middle| u(t), u'(t) \in L^2(R, R), u(t+T) = u(t)\right\}$$

$$H_{\#} \triangleq \left\{z \middle| z \in W^{1,2}(R/TZ, R), z(-t) = -z(t)\right\}$$

$$\|z\|_{W^{1,2}} = \|\dot{z}\|_{L^2} + \|z\|_{L^2}$$

$$f(z) \triangleq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 + \frac{m_1}{\left(z^2 + r_1^2\right)^{\frac{\beta}{2}}} + \frac{m_2}{\left(z^2 + r_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}}} \right) \mathrm{d}t$$

泛函 f 在 $H_\#$ 上的临界点就对应方程(4)的周期解。

引理 2(Poincare-Wirtinger[9])

假设 $q \in W^{1,2}\left(R/TZ, R^N\right)$, $\int_0^T q(t)\,\mathrm{d}t = 0$，则

$$\int_0^T |\dot{q}(t)|^2\,\mathrm{d}t \ge \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T |q(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

引理 3(Palais's 对称性原理) 假设 σ 是一个有限群或者紧 $f(\sigma \cdot x) = f(x), \forall \sigma \in G, \forall x \in H$ 群 G 的正交表示，H 是一个实数域上的希尔伯特空间。$f: H \to R$，满足。

记 $F = \{x | \sigma \cdot x = x, \forall \sigma \in G\}$，则泛函 f 在 F 上的临界点也是 f 在 H 上的临界点。

引理 4[10] 考虑下面的二阶哈密顿系统 T 周期解的存在性：

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \nabla_x V(x,t) = 0 \\ &x(0) = x(T),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $x(t) \in R^n$。

若 $V(x,t)$ 满足下面的条件：

(V_1) $V(x,t) \in C\left(R \times R^n \to R\right)$, $V(\cdot,t)$ 是 T 周期的，对任意的 $t \in R,\ x \in R^n$，$V(t,\cdot)$ 可微，$\nabla_x V(t,x)$ 连续；

(V_2) $\nabla_x V(-x,-t) = -\nabla_x V(x,t), \forall t, x$；

(V_3) 存在常数 $0 < a < \frac{4\pi^2}{T}$, $b > 0$，使得 $V(t,x) \le \frac{1}{2}|x|^2 + b$，则(5)至少存在一个经典解。

引理 5(雅克比必要条件[11]) 假设 $F \in C^3(R \times R \times R, R)$，如果临界点 $u = \bar{u}(t)$ 对应变分泛函 $\int_0^T F(t, u(t), u'(t))\,\mathrm{d}t$ 在 $W^{1,2}(R/TZ, R)$ 上的最小值点，而且 $F\big|_{\bar{u}'\bar{u}'} > 0$，则开区间 $(0,T)$ 不包含与 0 共轭的点，$\forall c \in (0,T)$ 下面边值问题：

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ph') + Qh = 0 \\ &h(0) = 0,\ h(c) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

只有零解，其中

$$P = \frac{1}{2} F_{u'u'}\big|_{u=\bar{u}} \tag{7}$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(F_{uu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{uu'}\right)\Big|_{u=\bar{u}} \tag{8}$$

3. 定理 1 的证明

定理 1.1 的证明分为两部分。首先应用引理 2 至引理 4，我们将证明(4)存在一个奇轨道。然后我们应用引理 5 证明该奇轨道是非常值的。证明需要下面的引理：

引理 6 质量为 m_1, m_2 平面圆形轨道的半径：

$$r_1 = \left(\frac{\beta T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{\beta+2}} m_2,\quad r_1 = \left(\frac{\beta T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{\beta+2}} m_1 \tag{9}$$

证明：由(1)和(2)，可得

$$r_2=\frac{m_1}{m_2}r_1 \tag{10}$$

从(3)可以得到

$$\ddot{q}_1=\frac{\partial U}{\partial q_1}=\frac{\beta\left(q_2-q_1\right)m_2}{\left|q_2-q\right|^{\beta+2}} \tag{11}$$

把(1)、(2)和(10)代入(11)，得到

$$-\frac{4\pi^2}{T^2}q_1=\frac{\beta m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}-1\right)q_1}{r_1^{\beta+2}\left|-\frac{m_1}{m_2}-1\right|^{\beta+2}}$$

因此

$$r_1=\left(\frac{\beta T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{\beta+2}}m_2,\quad r_1=\left(\frac{\beta T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{\beta+2}}m_1$$

接下来，应用引理 4 我们证明方程(4)存在一个古典解。

记

$$V\left(z\right)=-\left[\frac{m_1}{\left(z^2+r_1^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}+\frac{m_2}{\left(z^2+r_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}\right]\frac{m_1}{\left(z^2+r_1^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}$$

$V<0,\ \nabla_z V\left(-z\right)=-\nabla_z\left(z\right)$，因此很容易验证$V\left(z\right)$满足引理 4 中的($V_1$)~($V_3$)。结合引理 2 和引理 3，我们可知方程(4)存在一个奇轨道，而且该轨道极小化泛函 f (定义域空间为$H_\#$)。

最后我们证明上面得到的极小点是非常值解。用反证法，假设上面得到的极小值点是方程(4)的常值解。由于该常值解是奇函数，所以它只能是零解。

记

$$F\left(z,z'\right)=\frac{1}{2}\left|\dot{z}\right|^2+\frac{m_1}{\left(r_1^2+z^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}+\frac{m_2}{\left(r_2^2+z^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}$$

则在 $z=0$ 的邻域中， f 的二阶变分由下式给出

$$\int_0^1\left(Ph'^2+Qh^2\right)\mathrm{d}t \tag{12}$$

其中

$$P=\frac{1}{2}F_{z'z'}\big|_{z=0}=\frac{1}{2}, \tag{13}$$

$$Q=\frac{1}{2}\left(F_{zz}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{zz'}\right)\Bigg|_{z=0}=-\frac{\beta}{2}\left(\frac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\frac{m_2}{r_2^{\beta+2}}\right), \tag{14}$$

(12)的欧拉方程称为 f 的雅克比方程，由下式给出：

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ph'\right)+Qh=0, \tag{15}$$

把(13)和(14)代入(15)式，得到

$$h''+\beta\left(\frac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\frac{m_2}{r_2^{\beta+2}}\right)h=0 \tag{16}$$

接下来，研究方程(16)加上边界条件$h(0)=0,h'(0)=1$的解。很容易得到：

$$h(t)=\sqrt{\beta\left(\frac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\frac{m_2}{r_2^{\beta+2}}\right)}\sin\sqrt{\frac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\frac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}, \tag{17}$$

显然h在$\left[0,\dfrac{T}{\sqrt{\dfrac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}}\right]$上不恒等于 0。

应用柯西－施瓦茨不等式，可得到

$$\frac{m_1}{m_2^{\beta+2}}+\frac{m_2}{m_1^{\beta+2}}\geq\frac{m_1^{\beta+3}+m_1^{\beta+3}}{\left(m_1m_2\right)^{\beta+2}}\geq 2\frac{1}{\left(m_1m_2\right)^{\frac{\beta+1}{2}}}$$

由于$m_1+m_2=1$，可以推出

$$\sqrt{\frac{1}{\dfrac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}}<1 \tag{18}$$

从而

$$T\sqrt{\frac{1}{\dfrac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}}<T \tag{19}$$

由引理 6 可以得到

$$\beta\left(\sqrt{\frac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\frac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}\right)=\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{m_1}{m_2^{\beta+2}}+\frac{m_2}{m_1^{\beta+2}}}, \tag{20}$$

所以

$$h\left(\frac{T}{\dfrac{m_1}{m_2^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{m_1^{\beta+2}}}\right)=0, \tag{21}$$

取

$$0<c=\frac{T}{2\sqrt{\dfrac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}}<\frac{T}{\sqrt{\dfrac{m_1}{r_1^{\beta+2}}+\dfrac{m_2}{r_2^{\beta+2}}}}<T$$

可以得到

$$h(c)=0 \tag{22}$$

这与雅克比必要条件矛盾。从而证得用变分法得到的极小值点不是常值解。因此我们得到的周期解是非平面的周期解。

4. 结论

以上我们用变分极小化方法得到了一类限制三体问题的非平面周期解，得到的非平面周期解对应变分泛函的最小值点。我们得到的解是很有物理意义的解，根据物理学中最小化作用原理：物体真实的运动应该是某一对应泛函的极小值点。因此我们得到的结论在物理学能够得到一定的运用。

5. 致谢

本文之所以能够顺利得以完成，离不开我的导师张世清教授的指导和帮助，在此对他表示衷心的感谢。另外还要感谢评审专家们和编辑，他们对本篇文章提出了一些很好的修改意见。

参考文献 (References)

[1] U. Bessi, V. Coti Zelati. Symmetries and non-collision closed orbits for planar N-body type problems. Nonlinear Analysis TMA, 1991, 16: 587-598.
[2] S. Mathlouthis. Periodic orbits of the restricted three-body problem. Transactions of the American Mathematical Society, 1998, 350(6): 2265-2276.
[3] R. Moeckel, C. Simo. Bifurcation of spatial central configurations from planar ones. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1995, 4: 978-998.
[4] R. Palais. The principle of symmetric criticality. Communications in Mathematical Physics, 1979, 69(1): 19-30.
[5] K. Sitnikov. Existence of oscillating motions for the three-body problem. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1960, 133: 303-306.
[6] M. Struwe. Variational methods. 3rd Edition, Berlin: Springer, 2000.
[7] A. Wintnerr. The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1941.
[8] F. Y. Li, S. Q. Zhang and X. X. Zhao. Nonplanar periodic solutions for spatial restricted N + 1-body problem. 2012, in press.
[9] J. Mawhin, M. Willem. Critical point theory and applications. Berlin: Springer, 1989.
[10] D. G. Costa. An invitation to variational methods in differential equations. Boston: Birkhauser, 2007.
[11] I. S. Formin Gelfand. Calculus of variations, Nauka, Moscow (Russian). English Edition, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.

