Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 139-143
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32022 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Forward Elimination and Backward Substitution Algorithm for Solving Block Pentadiagonal Linear Equations

Baozeng Chu, Chenghui Ju

The School of Science, China University of Geosciences in Beijing, Beijing
Email: cbz@cugb.edu.cn

Received: Dec. 16th, 2012; revised: Jan. 23rd, 2013; accepted: Feb. 9th, 2013

Abstract: Forward Elimination and Backward Substitution Algorithm is an important method for solving tridiagonal equations. This article shows the Forward Elimination and Backward Substitution Algorithm for solving block pentadiagonal linear equations according to the idea of algorithm for solving tridiagonal equations. It can prove that this algorithm for solving block pentadiagonal linear equations uses less memory and calculates faster than the traditional methods, such as direct method, iterative method and so on.

Keywords: Block Pentadiagonal Matrix; Forward Elimination and Backward Substitution Algorithm; Iterative Method

求解分块五对角线性方程组的追赶法

褚宝增，巨程晖

中国地质大学(北京)数理学院，北京
Email: cbz@cugb.edu.cn

收稿日期：2012 年 12 月 16 日；修回日期：2013 年 1 月 23 日；录用日期：2013 年 2 月 9 日

摘　要：追赶法是求解三对角方程组的一种很重要的方法，本文根据追赶法求解三对角方程组的思想，推导出了求解分块五对角方程组的追赶法，可以证明此算法相对传统迭代法具有占用内存小，计算速度快的特点。

关键词：分块五对角矩阵；追赶法；迭代法

1. 引言

在利用数值方法求解偏微分方程时，经常构造差分格式来进行求解，从而将问题归结为求解线性方程组[1]，分块五对角线性方程组的求解是其中很重要的一部分。因此，研究此类问题在许多领域的大规模科学工程计算和数值处理中都有广泛的应用，例如在油藏数值模拟的计算中[2]，经常会遇到求解偏微分方程数值解的问题，对偏微分方程使用有限差分法构造出差分方程[3,4]，差分方程的求解即转化为由其系数矩阵构成的线性方程组的求解问题，而其系数矩阵通常是大型稀疏矩阵，这样的矩阵阶数很大，比如阶数大于 10 万甚至 100 万或者更大[5]。目前迭代法已经得到了广泛的应用，传统的迭代法包括 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法以及 SOR 迭代法等，传统的迭代法求解大规模稀疏线性方程组时，占用空间随着迭代次数的增加而增大，而且计算时间比较长，对于高阶矩阵适当分块可以降低阶数，减少计算量，本文推导出求解分块五对角方程组的追赶法，并且证明得到该算法相对传统的迭代法可以提高计算精度和效率，在实际工程领域有广泛的应用前景。

2. 算法分解的推导

求解以分块五对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_1 & C_2 & E_3 & & & & \\ B_2 & A_2 & C_3 & E_4 & & & \\ D_3 & B_3 & A_3 & C_4 & E_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} & C_{n-1} & E_n \\ & & & D_{n-1} & B_{n-1} & A_{n-1} & C_n \\ & & & & D_n & B_n & A_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

为系数矩阵的方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{F}$ ，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

以上式子中 A_i,B_i,C_i,D_i,E_i 均为 r 阶方阵， X_i,F_i 均为 r 维向量。

追赶法在求解三对角占优方程组中得到了很好的应用[6,7]，同样将这种方法应用到分块五对角线性方程组的求解方面也是切实可行的。首先将矩阵分解为两个三角阵的乘积，将五对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解[8]为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}'\boldsymbol{U}' \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{L}'$、$\boldsymbol{U}'$ 都是 $n\times n$ 阶分块矩阵，即

$$\boldsymbol{L}'=\begin{pmatrix} M_1 & & & & \\ N_2 & M_2 & & & \\ D_3 & N_3 & M_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D_n & N_n & M_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & P_1 & Q_1 & & & \\ & \boldsymbol{I} & P_2 & Q_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{I} & P_{n-1} & Q_{n-2} \\ & & & & \boldsymbol{I} & P_{n-1} \\ & & & & & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

M_i,N_i,P_i,Q_i 均为 r 阶方阵，$\boldsymbol{I}$ 为 r 阶单位矩阵。

比较(2)式两边的元素，利用待定系数法求得

$$\begin{cases} A_1=M_1 \\ A_2=N_2P_1+M_2 \\ B_2=N_2 \\ C_2=M_1P_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} A_i=D_iQ_{i-2}+N_iP_{i-1}+M_i \\ B_i=D_iP_{i-2}+N_i \\ C_i=N_{i-1}Q_{i-2}+M_{i-1}P_{i-1} \\ E_i=M_{i-2}Q_{i-2}\ \left(i=3,4,\cdots,n\right) \end{cases} \tag{4}$$

由(3)和(4)式可以得出

$$\begin{cases} M_1 = A_1 \\ N_2 = B_2 \\ P_1 = M_1^{-1} C_2 \\ N_i = B_i - D_i P_{i-2} \ (i = 3, 4, \cdots, n) \\ M_2 = A_2 - B_2 A_1^{-1} C_2 \\ M_i = A_i - D_i Q_{i-2} - N_i P_{i-1} \ (i = 3, 4, \cdots, n) \\ P_i = M_i^{-1} \left(C_{i+1} - N_i Q_{i-1} \right) (i = 2, 3, \cdots, n) \\ Q_i = M_i^{-1} E_{i+2} \ (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{5}$$

3. 算法回代的推导

由(5)式解得 L', U' 的值，则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{F}$ 的求解就转化为求解 $\boldsymbol{L'Y} = \boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{U'X} = \boldsymbol{Y}$， $\boldsymbol{Y} = \left(Y_1^{\mathrm{T}}, Y_2^{\mathrm{T}}, \cdots, Y_n^{\mathrm{T}} \right)$，其中 $\boldsymbol{Y}_i$ 为 r 维向量。

求解

$$\boldsymbol{L'Y} = \begin{pmatrix} M_1 & & & & & \\ N_2 & M_2 & & & & \\ D_3 & N_3 & M_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & D_n & N_n & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} Y_1 = M_1^{-1} F_1, \quad Y_2 = M_2^{-1} \left(F_2 - N_2 Y_1 \right) \\ Y_i = M_i^{-1} \left(F_i - D_i Y_{i-2} - N_i Y_{i-1} \right) \end{cases} \tag{6}$$

根据(6)的值，求解

$$\boldsymbol{U'X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & P_1 & Q_1 & & & \\ & \boldsymbol{I} & P_2 & Q_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{I} & P_{n-1} & Q_{n-2} \\ & & & & \boldsymbol{I} & P_{n-1} \\ & & & & & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-2} \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} X_n = Y_n \\ X_{n-1} = Y_{n-1} - P_{n-1} X_n \\ X_i = Y_i - P_i X_{i+1} - Q_i X_{i+2} \end{cases} \tag{7}$$

由(6)和(7)式即可得到分块五对角线性方程组的解。

4. 追赶法与迭代法的对比

本文以 Jacobi 迭代法为例，对比追赶法和迭代法的计算量(即乘除运算的次数总和)。

4.1. 迭代法的计算量

在求解大型稀疏矩阵方程组的时候，迭代法也是一种比较常用的方法[9]。首先，将方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分

裂为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$ ，其中，$\boldsymbol{D}$ 为对角线上的元素组成的对角矩阵，$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$ 分别是严格下三角阵和严格上三角阵。假设分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块均为 3 阶矩阵，设 $\boldsymbol{A}$ 未分块时为 m 阶矩阵，则 $m=3n$ 。Jacobi 迭代法通过事先给定一组初始值 $X^{(0)}=\left[x_1^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right]$ ，然后将初始值代入待求解的方程组中得到一组新的值 $X^{(1)}=\left[x_1^{(1)},\cdots,x_m^{(1)}\right]$ ，重复迭代步骤。若迭代后生成的序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 x^* ，则 x^* 为方程组的解。

对于以矩阵(1)为系数的方程组，Jacobi 迭代公式[10]可以表示为：

$$\begin{cases} x^{(0)}=\left[x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}\left(\text{初始向量}\right), \\ x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}a_{ij}x_j^{(k)}\right). \end{cases} \tag{8}$$

等式(8)中的 k 代表迭代次数，迭代的次数取决于迭代后得到的数值与上一次数值之间的误差，事先需要给定一个误差的范围，然后每次迭代结束均需要与给定的误差范围做对比，直到新值与上次迭代的值误差小于给定的范围时，迭代才能结束。因此，该方法对初始值的要求比较高，如果给定的初始值不够恰当，迭代有可能无限进行下去，这将导致无法算出方程组的解。

显然迭代公式(8)的矩阵形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)}\left(\text{初始向量}\right), \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x}^{(k)}+f, \end{cases} \tag{9}$$

其中，$B_0=I-D^{-1}A=D^{-1}\left(L+U\right),\ f=D^{-1}b$ ，$\boldsymbol{B}_0$ 称为 Jacobi 方法迭代矩阵，迭代矩阵的谱半径 $\rho\left(B_0\right)<1$ ，则对于任意迭代初始值 $X^{(0)}$ ，Jacobi 迭代法收敛。

由此看出，Jacobi 迭代法公式简单，每迭代一次只需计算一次矩阵和向量乘法。在计算机计算时，需要两组工作单元，以存储 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 及 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 。

分析等式(8)迭代一次需要计算量为 $m\cdot\left(m-1\right)$ 次，那么迭代 k 次，需要计算 $k\cdot m\cdot\left(m-1\right)$ 次。

4.2. 追赶法的计算量

假设分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块均为 3 阶矩阵，首先，分析等式(5)中的计算量，3 阶矩阵求逆需要乘除计算 32 次，两个 3 阶矩阵相乘需要乘除运算 27 次，则(5)中乘除总运算量为 $280n-184$ 次。然后，分析回代过程等式(6)乘法为 $113n-226$ 次，等式(7)乘法为 $54n-81$ 次。那么，追赶法总共需要的计算量为 $447n-491$ 次。

对比迭代法和追赶法的计算量，$m=3n$ ，迭代法计算量为 $9k\cdot n^2-3k\cdot n$ 。追赶法计算量为 $447n-491$ 。在实际工程计算领域，大型稀疏矩阵的阶数通常成百上千甚至上万，假设系数矩阵的阶为 100，迭代法计算量为 $90000k-300k=89700k$ ，二追赶法的计算量为 $44700-491=44209$ ，即使迭代次数 $k=1$ 迭代法的计算量也远大于追赶法。因此，当系数矩阵规模更大的时候，即 n 的值比较大，这时使用迭代法的计算量将远远大于追赶法，可见追赶法可以有效的提高计算效率，并且追赶法只需存储非零元素占用存储空间小。

5. 结论

本文推导得到了求解分块五对角线性方程组的追赶法，通过推导证明了此算法相对于传统的迭代法计算量少，提高了计算效率，另外迭代法每次迭代都要存储新的一组数值，追赶法只需要存储分解的分块矩阵中的非零子块即可，大大节省了计算机的内存空间，对于对角占优的分块五对角矩阵该算法具有明显的优越性。在实际技术和工程领域大型方程组的求解中可以得到广泛的应用。对于规模较大，非对角占优的分块五对角方程组，求解的稳定性和收敛性需要进一步研究。

参考文献 (References)

[1] 王礼广, 蔡放, 熊岳山. 五对角线性方程组追赶法[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2008, 22(1): 1-4.
[2] 陈月明. 油藏数值模拟[M]. 北京: 石油大学出版社, 1989.
[3] 李晓梅, 迟利华. 并行求解大型稀疏线性方程组的研究概况[J]. 指挥技术学院学报, 1999, 10(3): 1-8.
[4] 吴建平, 王正华. 块对角占优性与对称矩阵的块对角预条件[J]. 数值计算与计算机应用, 2003, 12(4): 241-246.
[5] 林首位, 徐宏, 侯华, 褚忠, 龚荣良. 大型稀疏矩阵线性化方程组的数值解法[J]. 华北工学院学报, 2002, 23(4): 265-269.
[6] 李庆阳, 王能超, 易大义. 数值分析(第四版)[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 164-216.
[7] 徐长发, 李红. 偏微分方程数值解法(第二版)[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000.
[8] 夏爱生, 李长国, 胡宝安, 王瑞, 刘艳娜. 求解五对角方程组追赶法[J]. 军事交通学院学报, 2008, 7(4): 87-89.
[9] 李爱芹. 线性方程组的迭代解法[J]. 科学技术与工程, 2007, 7(14): 3357-3364.
[10] 高益明. Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的收敛准则[J]. 高等学校计算数学学报, 1992, 2: 106-110.

