

Complex Dynamics in Josephson System with Parametric and External Excitations*

Xiangling Fu^{1#}, Huirong Chen², Jin Deng³

¹School of Mathematics and Computational Sciences, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan

²School of Mathematics and Computational Sciences, Hunan University of Science and Technology, Changsha

³School of Sciences, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan

Email: [#]fxl8923@126.com, chhr76@163.com, jindeng@amss.ac.cn

Received: Feb. 23rd, 2013; revised: Mar. 9th, 2013; accepted: Mar. 24th, 2013

Copyright © 2013 Xiangling Fu et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In this paper, the Josephson system with parametric and external excitations by using second-order averaging methods and Melnikov's methods is investigated in detail. The threshold values of existence of chaotic motion are obtained under the periodic perturbation. We prove the criterion of existence of chaos in averaged system under quasi-periodic perturbation for $\omega_2 = \omega_1 + \epsilon\nu$ by applying the second-order averaging method and Melnikov's method, and prove that the criterion of existence of chaos in second-order averaged system under quasi-periodic perturbation for $\omega_2 = n\omega_1 + \epsilon\nu, n \geq 2$ cannot be obtained by applying Melnikov's method. The theoretical results are verified and some new dynamics are demonstrated by numerical simulation.

Keywords: Second-Order Averaging Method; Melnikov's Method; Bifurcation; Chaos; Periodic Perturbations; Quasi-Periodic Perturbations

带有参数和外力激励的 Josephson 系统的复杂动态*

傅湘陵^{1#}, 陈晖荣², 邓进³

¹湖南科技大学数学与计算科学学院, 湘潭

²湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙

³湖南工程学院理学院, 湘潭

Email: [#]fxl8923@126.com, chhr76@163.com, jindeng@amss.ac.cn

收稿日期: 2013年2月23日; 修回日期: 2013年3月9日; 录用日期: 2013年3月24日

摘要: 本文应用二阶平均方法和 Melnikov 理论, 研究带有参数和外力激励的 Josephson 系统。给出了周期扰动下系统产生混沌的准则; 得到了在拟周期扰动下当 $\omega_2 = \omega_1 + \epsilon\nu$ 时平均系统的混沌存在准则; 证明了当 $\omega_2 = n\omega_1 + \epsilon\nu$ ($n \geq 2$) 时, 平均系统的混沌存在准则不能通过运用 Melnikov 方法给出; 通过数值模拟验证了理论分析结果, 并发现了系统的一些新的有趣的动态。

关键词: 二阶平均; Melnikov 方法; 分支; 混沌; 周期扰动; 拟周期扰动

1. 引言

本文考虑带有参数和外力激励的 Josephson 系统

*项目基金: 湖南省软科学研究计划资助项目(2012ZK3142), 湖南省教育厅基金资助项目(#09C255)。

[#]通讯作者。

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \gamma - (\beta + \alpha \cos x)y + f_1 \sin \omega_1 t + f_2 \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (1)$$

这里 $x(t)$ 表示通过电感器的电流; $\sin x$ 表示具有相位检测特征的混合环路; ω_i ($i=1,2$) 和 f_i ($i=1,2$) 分别是驱动力的角频率和振幅; $\gamma - (\beta + \alpha \cos x)y$ 表示理想滤波器的转换函数的特征。

众所周知,许多系统都能用(1)或类似的模型描述,例如:单机无穷大母线的同步发电机模型^[1]、摆方程^[2,3]、电动转子的分流模型^[4]和许多其它的应用。另外,Josephson方程具有丰富的非线性动态,因而对Josephson方程的研究既有重要的应用价值,同时,对了解非线性系统的动态也是非常有意义的。

Josephson系统已被广泛研究。例如:Belyky^[5]研究了如下的Josephson系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \beta - \alpha \cos xy. \end{cases}$$

给出了Josephson方程动态的定性分析。

Schlup^[6]利用扰动理论和数值计算研究了Josephson方程的推广系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \beta - \alpha (\cos x + 2k \cos 2x)y + f_1 \sin \omega t \end{cases}$$

Abidi和Chua^[7], Odyniec和Chua^[8]给出上述Josephson方程有周期轨情形下的解析结果; Salam和Sastry^[9], Bartuccelli等^[10]利用Melnikov函数和定性理论的一些结果得到了分支图,证明在某些参数值处混沌的存在性。

井竹君等^[2,11,12]研究具有一个外力的Josephson方程,给出极限环和鞍点-鞍点分界线环和混沌的存在性。另外,井竹君和曹鸿军^[13,14]研究了具一个相差的外力的Josephson方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \beta - \bar{\delta} (\cos x + 2k \cos 2x)y + \bar{\gamma} \sin \omega t + \theta \end{cases}$$

给出了导致混沌的存在条件,同时相差的变动对周期解或次调和解的分支的影响也被考虑。

在[15]中,井竹君、杨建平研究了具有两个外力项的Josephson方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \beta - \alpha (\cos x + 2k \cos 2x)y + f_1 \sin \omega_1 t + f_2 \sin \omega_2 t \end{cases}$$

得到了一些重要的结果,如周期扰动和拟周期扰动下系统的混沌存在准则。

本文运用二阶平均方法, Melnikov方法以及混沌理论,数值模拟来研究具有参数和外力激励的Josephson系统(1)。本文由六节组成: 1) 引言; 2) 未扰动系统的定性分析; 3) 周期扰动下的混沌; 4) 拟周期扰动下的混沌; 5) 数值模拟; 6) 结论。

2. 未扰动系统的定性分析

本节,考虑如下的未扰动系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \gamma \quad (2)$$

未扰动系统(2)是具有如下Hamiltonian函数的Hamiltonian系统

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x - \gamma x$$

函数 $V(x, y) = -\cos x - \gamma x$ 是相应的势能函数。通过对系统(2)的不动点及其稳定性的分析不难得到如下引理:

引理1

- 1) 如果 $\gamma < -1$ 或者 $\gamma > 1$, 那么系统(2)没有不动点;
- 2) 如果 $\gamma = -1$ 或者 $\gamma = 1$, 那么系统(2)有无穷多个不动点 $\left(m\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$, 这里 $m \in \mathbb{Z}$, 均为有两个零特征值的分支点;
- 3) 如果 $-1 < \gamma < 1$, 那么系统(2)有无穷多个不动点, 即鞍点 $\left((2m+1)\pi - \arcsin \gamma, 0\right)$, 中心 $\left((2m+1)\pi + \arcsin \gamma, 0\right)$, 这里 $m \in \mathbb{Z}$ 。

系统(2)在 (γ, x) 平面中的不动点分支图在图1(a)给出。从图1可知, 系统(2)在 $\gamma = 1$ 或 $\gamma = -1$ 处经历鞍结点分支。图1(b)是系统(2)在 $\gamma = 0.72577502168037$ 的相图, 这里 S 由一条同宿轨道 Γ_{hom} 与其自身连接。

注意到, 对于鞍点 $\left((2m+1)\pi - \arcsin \gamma, 0\right)$, 能量 $H\left((2m+1)\pi - \arcsin \gamma, 0\right) = \sqrt{1-\gamma^2} - \gamma\left((2m+1)\pi - \arcsin \gamma\right)$ 因此, 对于不同的 $m \in \mathbb{Z}$, 也即不同的鞍点, 它们的能量不可能相等, 从而可知, 未扰动系统(2)没有异宿轨道。

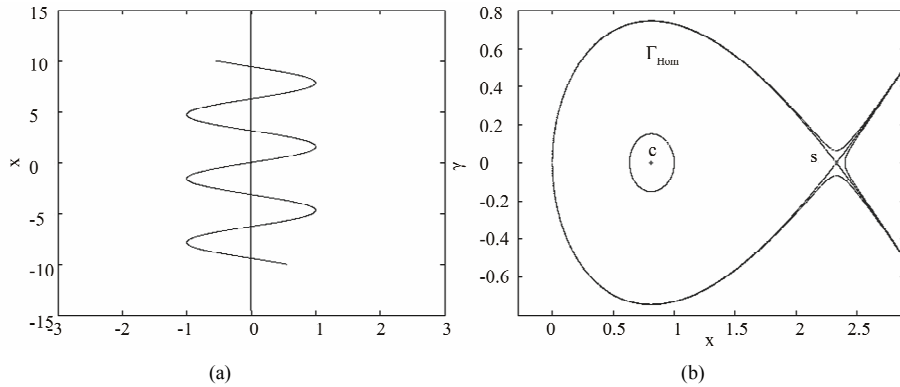


Figure 1. (a) Bifurcation diagram of system (2) in (γ, x) plane; (b) Phase portrait of system (2) at $\gamma = 0.72577502168037$

图1. (a) 系统(2)在 (γ, x) 平面中的分支图; (b) 系统(2)在 $\gamma = 0.72577502168037$ 时的相图。下面研究未扰动系统(2)在周期扰动和拟周期扰动情形下的动态变化

下面研究未扰动系统(2)在周期扰动和拟周期扰动情形下的动态变化。

3. 周期扰动下的混沌

本节考虑未扰动系统(2)在周期扰动下混沌的存在性, 即讨论系统(1)在 β, α, f_1, f_2 与 ϵ 为同阶无穷小且 $\omega_2 = \frac{n}{m}\omega$ 情形下的混沌存在性, 这里 m, n 是正整数, 满足 $(m, n) = 1$ 。

系统(1)可写成如下的自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \gamma - (\epsilon\bar{\beta} + \epsilon\bar{\alpha}\cos x)y + \epsilon\bar{f}_1 \sin \phi_1 + \epsilon\bar{f}_2 \sin \phi_2, \\ \dot{\phi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad (3)$$

这里 $\beta = \epsilon\bar{\beta}, f_1 = \epsilon\bar{f}_1, f_2 = \epsilon\bar{f}_2, \alpha = \epsilon\bar{\alpha}$ 。

由引理1和图1(b)可知, 未扰动系统(1) ($\epsilon = 0$) 有一条同宿轨道 Γ_{hom} 。当扰动被加到系统(1)时, 同宿轨道可能破裂, 稳定和不稳定流形可能有横截相交。由Smale-Birkhoff定理^[16], 横截相交的同宿轨道可能导致混沌。因此可应用Melnikov方法得到系统(3)的分支和混沌的存在准则。

假设未扰动系统的同宿轨道为 $(x_0, y_0) = (x_0(t), y_0(t))$, 那么系统(3)的Melnikov函数为

$$M_1(t_0) = -\bar{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0^2(t) dt - \bar{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x_0(t) y_0^2(t) dt + \bar{f}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) \sin \omega_1(t+t_0) dt + \bar{f}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) \sin \omega_2(t+t_0) dt \quad (4)$$

这里 t_0 是 Poincaré 映射与横截面相交的时间。

由于 $x_0(t)$, $y_0(t)$ 的解析表达式很难给出, 将在 § 5 中给出数值解。 $x_0(t)$, $y_0(t)$ 是关于时间 t 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数。设 P_1 为 Γ_{hom} 和 x 轴的交点, 并且选择 P_1 为 Γ_{hom} 的初始点, 则 $x_0(t)$ ($y_0(t)$) 关于时间 t 为偶(奇)函数。因此, 同宿轨道 Γ_{hom} 的 Melnikov 函数(4)可写成

$$M_1(t_0) = 2 \left[-\bar{\beta} A_1 - \bar{\alpha} A_2 + \bar{f}_1 B_1(\omega_1) \cos(\omega_1 t_0) + \bar{f}_2 B_2(\omega_2) \cos(\omega_2 t_0) \right],$$

这里

$$A_1 = \int_0^{+\infty} y_0^2(t) dt, A_2 = \int_0^{+\infty} y_0^2(t) \cos(x_0(t)) dt,$$

$$B_1(\omega_1) = \int_0^{+\infty} y_0(t) \sin(\omega_1 t) dt, B_2(\omega_2) = \int_0^{+\infty} y_0(t) \sin(\omega_2 t) dt,$$

$$\omega_2 = \frac{n}{m} \omega_1, m, n \in \mathbb{N}$$

令

$$R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{-\bar{\alpha} A_2 + |\bar{f}_1 B_1(\omega_1) + \bar{f}_2 B_2(\omega_2)|}{A_1},$$

$$R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{-\bar{\alpha} A_2 - |\bar{f}_1 B_1(\omega_1) + \bar{f}_2 B_2(\omega_2)|}{A_1},$$

当

$$R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2) < \bar{\beta} < R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2),$$

时, 存在 t'_0 , 使得当 $t'_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$ 时, $M_1(t'_0) = 0$, $\left. \frac{\partial M_1}{\partial t_0} \right|_{t=t'_0} \neq 0$, 并且有如下定理:

定理1 如果

$$\bar{\beta} = R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2), \quad \text{或} \quad R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2), \quad (5)$$

系统(3)发生同宿轨分支。这意味着如果 $\epsilon > 0$ 充分小, $\bar{\beta}$ 位于曲面 R_1 , R_2 之间, 横截同宿轨道可能存在, 系统(3)可能是混沌的。

分支曲面(5)的数值模拟结果在 § 5 中给出。

4. 拟周期扰动下的混沌

本节考虑 Josephson 方程(1)在拟周期扰动下的混沌行为。假设 ω_1 和 ω_2 之比是无理数。这种情形下, 不能定义 Poincaré 映射, 因此不能应用 Melnikov 方法, 但可以应用二阶平均方法把原系统简化到具周期扰动的 Hamiltonian 系统, 再应用 Melnikov 方法来研究平均系统混沌的存在性。

4.1. 平均系统

为了应用平均方法, 令 $\alpha = \epsilon^{\frac{3}{2}} \bar{\alpha}$, $\beta = \epsilon^{\frac{3}{2}} \bar{\beta}$, $f_1 = \epsilon^{\frac{3}{2}} \bar{f}_1$, $f_2 = \epsilon^2 \bar{f}_2$, 为了方便, 用 α , β , f_1 , f_2 替换 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, \bar{f}_1 , \bar{f}_2 , 系统(1)可写为

$$\ddot{x} = -\sin x + \gamma + \epsilon^{\frac{3}{2}} f_1 \sin \omega_1 t + \epsilon^2 f_2 \sin \omega_2 t - \epsilon^{\frac{3}{2}} (\beta + \alpha \cos x) \dot{x} \quad (6)$$

令 $x = x_0 + \sqrt{\epsilon} z$, 有

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} + \omega^2 z &= \sqrt{\epsilon} a_2 z^2 + \epsilon a_3 z^3 + \epsilon f_1 \sin \omega_1 t + \epsilon^{\frac{3}{2}} a_4 z^4 + \epsilon^{\frac{3}{2}} f_2 \sin \omega_2 t \\
 &\quad - \epsilon^{\frac{3}{2}} (\beta + \alpha \omega^2) \dot{z} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 &= \sqrt{\epsilon} \left[a_2 z^2 + \sqrt{\epsilon} (a_3 z^3 + f_1 \sin \omega_1 t) \right] \\
 &\quad + \epsilon \left[\sqrt{\epsilon} (a_4 z^4 + f_2 \sin \omega_2 t - (\beta + \alpha \omega^2) \dot{z}) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

这里 $\omega^2 = \cos x_0$, $a_2 = \frac{\sin x_0}{2}$, $a_3 = \frac{\cos x_0}{6}$, $a_4 = -\frac{\sin x_0}{24}$, x_0 是未扰动系统(2)的中心。

考虑如下两种情形:

1) $\omega_1 \approx \omega$, $\omega_2 \approx \omega$;

2) $\omega_1 \approx \omega$, $\omega_2 \approx n\omega$, 这里 $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ 。

令 $\epsilon\Omega = \omega_1^2 - \omega^2 \omega_2 = n\omega_1 + \epsilon\nu$, ν 与 ω_1 不是有理相关, $n \in \mathbb{N}$ 。

应用可逆 Van der pol 变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\omega_1^{-1} \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & -\omega_1^{-1} \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

到系统(6), 对变换后的系统平均化到二次, 再做时间变换 $t \rightarrow \frac{\epsilon t}{8\omega_1}$ 可得到如下的平均系统。

情形(1)

$$\begin{cases} \dot{u} = \left[\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u^2 v + v^3) + 4\Omega v - 4f_1 \right] - \sqrt{\epsilon} \left[4(\beta + \alpha \omega^2) \omega_1 u + 4f_2 \cos(\tau) \right] \\ \dot{v} = \left[-4\Omega u - \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u^3 + uv^2) \right] - \sqrt{\epsilon} \left[4(\beta + \alpha \omega^2) \omega_1 v + 4f_2 \sin(\tau) \right] \end{cases} \tag{8}$$

情形(2)

$$\begin{cases} \dot{u} = \left[3a_3 (u^2 v + v^3) + 4\Omega v - 4f_1 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 (v^3 + u^2 v) \right] - 4\sqrt{\epsilon} \alpha \omega^2 \omega_1 u \\ \dot{v} = \left[-4\Omega u - 3a_3 (u^3 + uv^2) - \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 (u^3 + uv^2) \right] - 4\sqrt{\epsilon} \alpha \omega^2 \omega_1 v \end{cases} \tag{9}$$

这里 $\nu_0 = 8\omega_1 \nu$ 。

在系统(8)和(9)中令 $\epsilon = 0$, 得到同样的未扰动系统

$$\begin{cases} \dot{u} = \left[\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u^2 v + v^3) + 4\Omega v - 4f_1 \right] \\ \dot{v} = \left[-4\Omega u - \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u^3 + uv^2) \right] \end{cases} \tag{10}$$

这里 Hamiltonian 能量函数为 $H(u, v) = \frac{1}{4} \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u^2 + v^2)^2 + 2\Omega (u^2 + v^2) - 4f_1 v$ 。

不妨假设 $\Omega < 0$, $a_3 > 0$, 系统(10)有三个不动点

$$\left(0 < f_1^2 < -\frac{16\Omega^3 \omega_1^2}{9(9a_3 \omega_1^2 + 10a_2^2)} \right), \text{ 两个不动点 } \left(f_1^2 = -\frac{16\Omega^3 \omega_1^2}{9(9a_3 \omega_1^2 + 10a_2^2)} \right), \text{ 一个不动点 } f_1^2 > -\frac{16\Omega^3 \omega_1^2}{9(9a_3 \omega_1^2 + 10a_2^2)}.$$

图2(a)是系统(10)不动点的分支图, 显示了随着 f_1 变动时系统不动点的产生和消失情况($\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, ($\gamma = 0.816496580927726$)). 由图2(a)知, 当 $f_1 = 0.5433961039625743$ 时, 系统(10)发生鞍-结点分支. 图2(b)给出了不动点处能量随 f_1 变化时的变换情况. 当 $\Omega = -1$, $f_1 = 0.2$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, ($\gamma = 0.816496580927726$), 系统(10)的相图在图2(c)中给出.

系统(10)存在三个不动点: $J_2(0, v_2)$, $J_1(0, v_1)$ 中心, $J_3(0, v_3)$ 鞍点, 并且鞍点 $(0, J_1)$ 通过两条同宿轨道 Γ^\pm 连接到自身, 这里 $v_3 < v_2 < v_1$, v_i ($i=1,2,3$) 是如下三次方程的根:

$$\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2\right) v^3 + 4Tv - 4f_1 = 0.$$

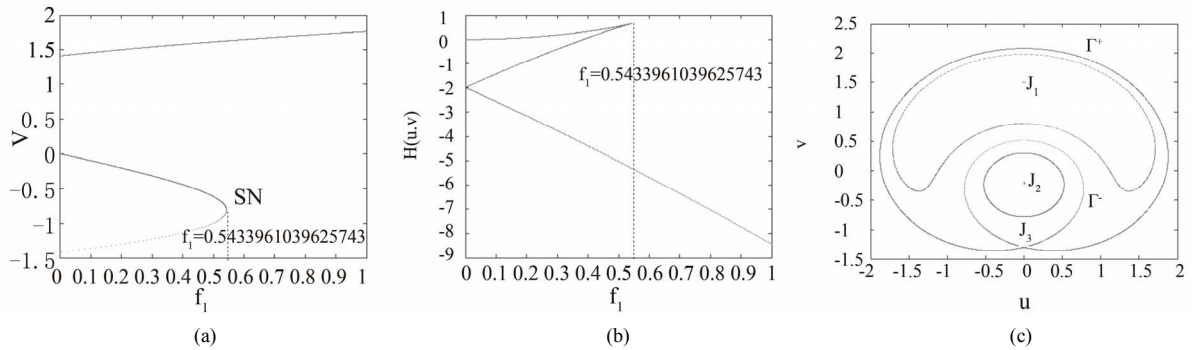


Figure 2. (a) Bifurcation diagram of system (10) in (f_1, u) plane; (b) Energy value of the fixed point as parameter f_1 changes; (c) Phase portrait of system (10) at $(f_1 = 0.2)$ with $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$ ($\gamma = 0.816496580927726$)

图2. (a) 系统(10)在 (f_1, u) 平面中分支图; (b) 随着参数 f_1 变化时不动点的能量值; (c) 系统(10)的相图 ($f_1 = 0.2$), 这里 $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$ ($\gamma = 0.816496580927726$)

4.2. 平均系统的混沌

由前述分析可知系统(9)是自治的, 因此不能应用Melnikov方法证明混沌的存在性, 而系统(8)是非自治的, 能应用Melnikov方法证明平均系统(8)混沌的存在性.

对系统(8), Melnikov函数为

$$\begin{aligned} M_2(t_0) &= -\frac{1}{8\omega_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^2 v_1 + v_1^3) + 4\Omega v_1 - 4f_1 \right] \cdot \left[(\beta + \alpha\omega^2) \omega_1 v_1 + f_2 \sin v_0(t+t_0) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[-4\Omega u_1 - \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^3 + u_1 v_1^2) \right] \cdot \left[(\beta + \alpha\omega^2) \omega_1 u_1 + f_2 \cos v_0(t+t_0) \right] \right\} dt \\ &= -\frac{1}{8\omega_1^2} \left[(\beta + \alpha\omega^2) \omega_1 \bar{A} + f_2 V_1(v_0) \sin v_0 t_0 + f_2 V_2(v_0) \cos v_0 t_0 \right] \\ &= -\frac{1}{8\omega_1^2} \left[(\beta + \alpha\omega^2) \omega_1 \bar{A} + f_2 \sqrt{V_1(v_0)^2 + V_2(v_0)^2} \sin(v_0 t_0 + \theta) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

这里 $(u_1(t), v_1(t))$ 未扰动的同宿轨道 Γ^+ 或 Γ^- ,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-v_1 \left(\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^2 v_1 + v_1^3) + 4\Omega v_1 - 4f_1 \right) + u_1 \left(4\Omega u_1 + \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^3 + u_1 v_1^2) \right) \right] dt \\ V_1(v_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^2 v_1 + v_1^3) + 4\Omega v_1 - 4f_1 \right) \cos v_0 t dt \\ V_2(v_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-4\Omega u_1 - \left(3a_3 + \frac{10}{3\omega_1^2} a_2^2 \right) (u_1^3 + u_1 v_1^2) \right) \sin v_0 t dt, \quad \theta = \arctan \frac{V_2(v_0)}{V_1(v_0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 如果

$$\beta + \alpha \omega^2 \omega_1 < \frac{f_2 \sqrt{V_1^2(v_0) + V_2^2(v_0)}}{|\bar{A}|} \equiv \bar{R}(f_2, \omega_1, v_0). \quad (13)$$

则得到拟周期扰动系统(8)在 $\omega_2 = \omega_1 + \epsilon \nu$, $\omega_1 \approx \omega$ 附近混沌的存在准则:

定理2 如果

$$\beta + \alpha \omega^2 \omega_1 = \bar{R}(f_2, \omega_1, v_0) \quad (14)$$

那么系统(8)发生同宿分支。当 $\beta + \alpha \omega^2 \omega_1 < \bar{R}(f_2, \omega_1, v_0)$ 时, 系统(8)可能发生混沌行为。

分支曲面(14)的数值模拟结果在 § 5 中给出。

5. 数值模拟

本节数值模拟的目的是验证已获的理论结果, 进一步发现其它复杂的动态。通过MATLAB7.1与Visual C++6.0混合编程^[17]来进行数值模拟。

首先给出系统(2)在周期扰动情形下的数值模拟结果。当 $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.28$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$ 时, 系统(3)在 $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{\beta})$ 空间关于同宿轨道 Γ_{hom} 的同宿分支曲面 $\bar{\beta} = R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$, 和 $R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$ 在图3中给出。为了显示参数位于上述曲面之间时系统的解和吸引子的变化, 我们取参数值使得 $R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2) < \bar{\beta} < R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$, 那么系统(3)可能是混沌的。例如: 对同宿轨 Γ_{hom} 取 $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.28$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$, $\bar{f}_1 = 0.5$, $\bar{f}_2 = 0.75$, 有 $R_2 < \bar{\beta} < R_1$ 。当 $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.24472$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$, $\bar{f}_1 = 0.437$, $\bar{f}_2 = 0.655$ 时, 图4(a)是系统(1)在 $(\bar{\beta}, y)$ 平面中的分支图, 我们看到在 $\beta \approx 0.249$ 附近混沌的突然开始。相应于图5(a)的最大Lyapunov指数在图4(b)中给出。为了进一步了解系统的动态, 当 $\bar{\beta} = 0.2864$ 时, 系统(1)非吸引混沌集的相图和Poincar'e映射分别在图5(a)和(b)中给出。

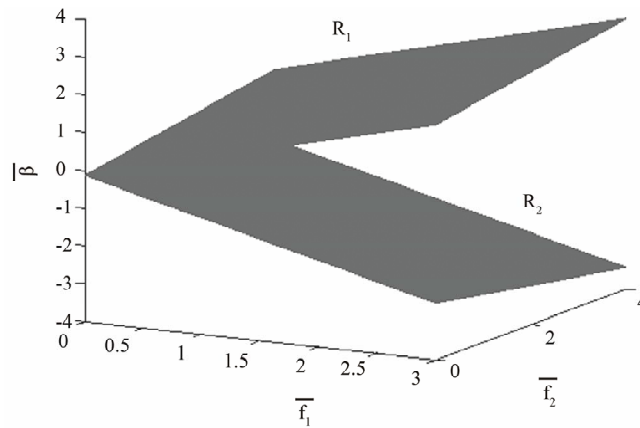


Figure 3. Homoclinic bifurcation surface (5) $\bar{\beta} = R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$ and $\bar{\beta} = R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$ with $\gamma = 0.725077502168037$

$$\bar{\alpha} = 0.28, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1.5$$

图3. 同宿分支曲面(5) $\bar{\beta} = R_1(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$ 和 $\bar{\beta} = R_2(\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \omega_1, \omega_2)$ 。这里 $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.28$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$

其次, 我们给出系统(2)在拟周期扰动下的数值模拟结果。当 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$ 时, 系统(8)关于同宿轨道 Γ^+ 的同宿分支曲面(14)分别在图6(a)和(b)中给出, 从图6看到, 当参数 $\beta + \alpha\omega^2\omega_1$ 位于曲面下时, 系统(8)可能是混沌的。因此, 固定参数: $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.04$ 时, 有

$$\beta + \alpha\omega^2\omega_1 < \frac{f_2\sqrt{V_1(\nu_0)^2 + V_2(\nu_0)^2}}{|\bar{A}|}。$$

系统(8)在 (u, v) 平面中的混沌轨道和混沌吸引子分别在图7(a)和图7(b)中给出。

当 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$,

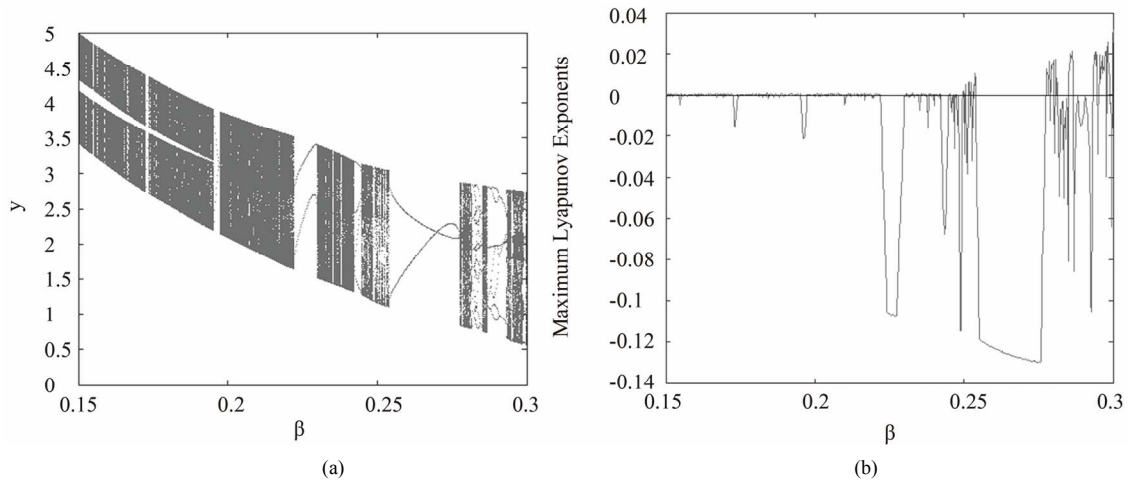


Figure 4. (a) Bifurcation diagram of system (1) in $(\bar{\beta}, y)$ plane with $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.24472$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$, $\bar{f}_1 = 0.437$, $\bar{f}_2 = 0.6555$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图4. (a) 系统(1)在 $(\bar{\beta}, y)$ 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\gamma = 0.725077502168037$, $\bar{\alpha} = 0.24472$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.5$, $\bar{f}_1 = 0.437$, $\bar{f}_2 = 0.6555$

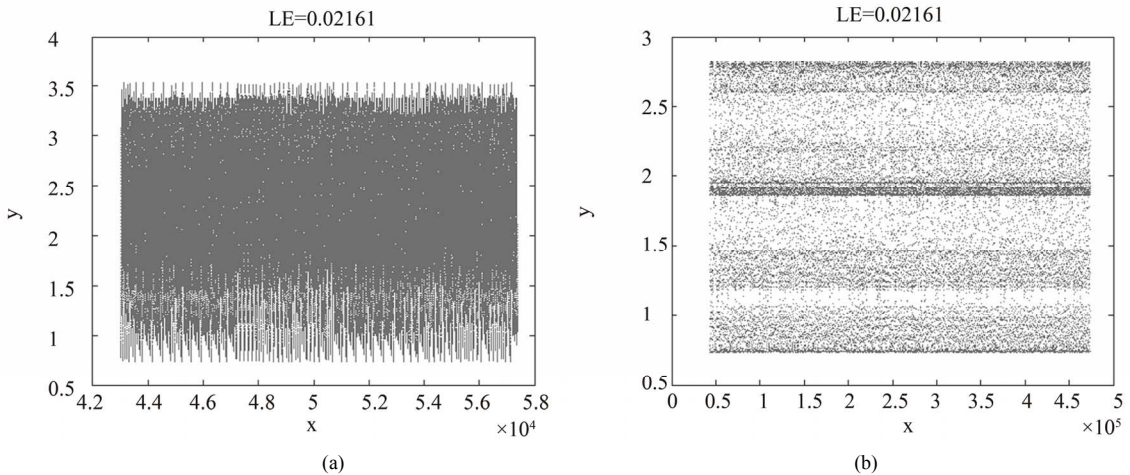


Figure 5. (a) Phase portrait of system (1) at $\bar{\beta} = 0.2864$; (b) Poincar'e map corresponding to (a)

图5. (a) $\bar{\beta} = 0.2864$ 时系统(1)相应图4(a)的相图; (b) 相应于(a)的Poincar'e映射。这里最大Lyapunov指数为0.02161

$a_3 = 0.09622504486493762$ 时, 系统(8)关于同宿轨道 Γ 的同宿分支曲面(14)分别在图8(a)和(b)中给出, 从图8看到, 当参数 $\beta + \alpha\omega^2\omega_1$ 位于曲面下时, 系统(8)可能是混沌的。因此, 固定参数: $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$ 时, 有

$$\beta + \alpha\omega^2\omega_1 < \frac{f_2 \sqrt{V_1(\nu_0)^2 + V_2(\nu_0)^2}}{|\bar{A}|}。$$

系统(8)在 (u, v) 平面中的混沌轨道和混沌吸引子分别在图9(a)和图9(b)中给出。

本节以下部分, 用数值模拟方法发现系统(1)其它新的分支结构和动力学行为。下面分别考虑如下七种情形:

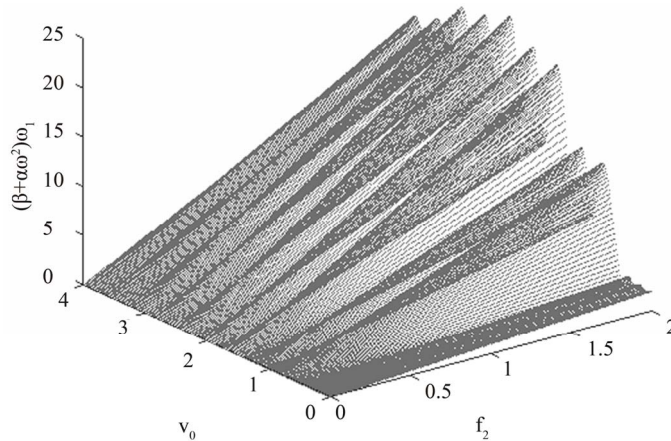


Figure 6. Homoclinic bifurcation surface of system (8) with $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$

图6. 系统(8)关于同宿轨道 Γ 的分支曲面(14)。这里 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$ 、 $\omega_1 = 0.5686240703077327$ 、 $a_2 = 0.408248290463863$ 、 $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$

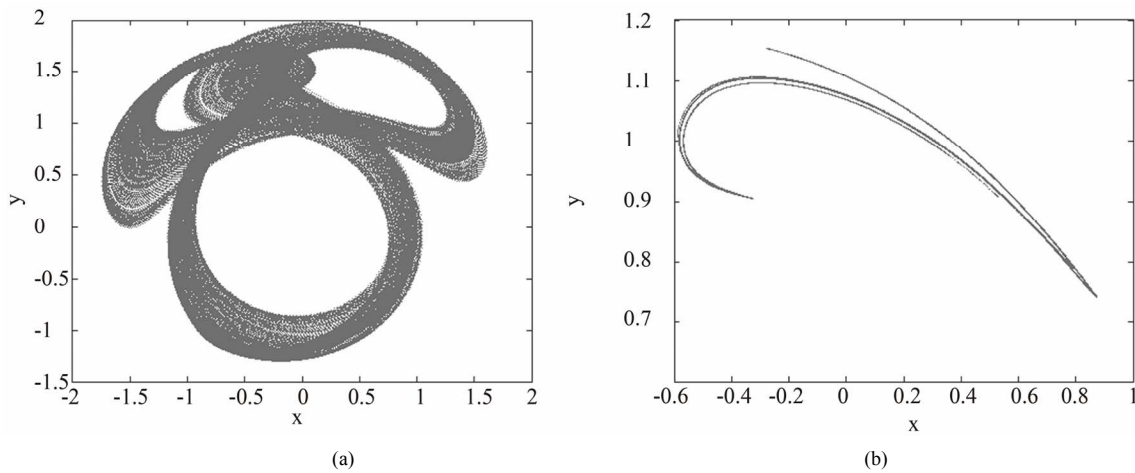


Figure 7. (a) Chaotic orbit of the averaged system (8); (b) Poincaré map corresponding to (a). $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.04$

图7. (a) 平均系统(8)的混沌轨道; (b) 相应于(a)的Poincaré映射。这里 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.04$

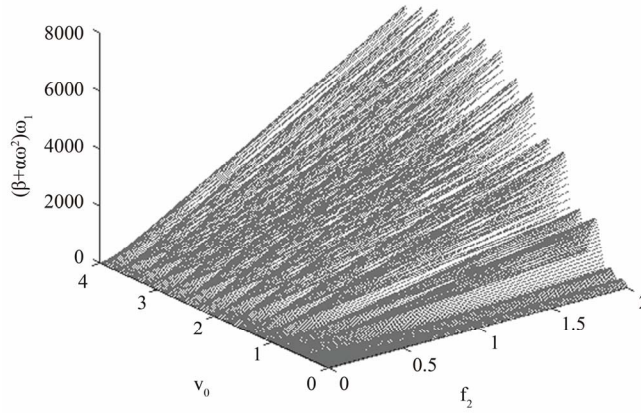


Figure 8. Homoclinic bifurcation surface of the averaged system (8) with $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$

图8. 系统(8)关于同宿轨道 Γ 的分支曲面(14)。这里 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$

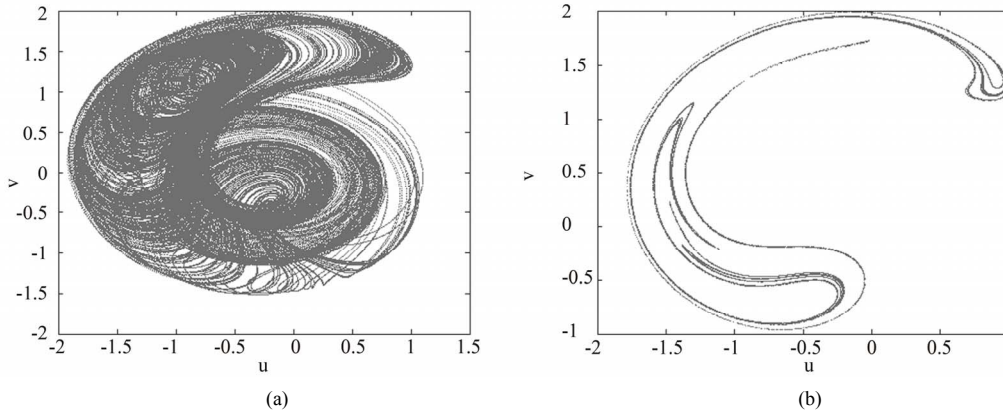


Figure 9. (a) Chaotic orbit of the averaged system (8) with $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$; (b) Poincaré map corresponding to (a)

图9. (a) 平均系统(8)的混沌轨道; (b) 相应于(a)的Poincaré映射。这里 $f_1 = 0.2$, $\Omega = -1$, $\omega = 0.5773502691896257$, $\omega_1 = 0.5686240703077327$, $a_2 = 0.408248290463863$, $a_3 = 0.09622504486493762$, $\epsilon = 0.1$, $f_2 = 2.6$, $\nu_0 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$

1) I) 固定 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\alpha \in (0, 0.5)$ 为参数; II) 固定 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$, 以 $\alpha \in (0, 0.5)$ 为参数;

2) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数; II) 固定 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1.4142$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数; III) 固定 $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 3$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数;

3) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_1 \in (0, 2)$ 为参数; II) 固定 $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.5$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_1 \in (1.2, 1.8)$ 为参数; III) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.7250$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.7321$, 以 $f_1 \in (0, 2)$ 为参数;

4) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数; II) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.7321$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数;

- 为参数; III) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.414$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数; IV) 固定 $\alpha = 0.38$, $\beta = 0.59$, $\gamma = 0.8$, $f_1 = 1.863$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数;
- 5) 固定 $\alpha = 0.48$, $\beta = 0.59$, $f_1 = 1.863$, $\omega_1 = 0.2$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.4$, 以 $\gamma \in (0, 4)$ 为参数;
- 6) 固定 $\alpha = 0.28$, $\beta = 0.29$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\omega_1 \in (0, 4)$ 为参数;
- 7) 固定 $\alpha = 1$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.8$, $f_1 = 0.9$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5$, 以 $\omega_2 \in (0, 4)$ 为参数。

1) I) 固定 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\alpha \in (0, 0.5)$ 为参数。系统(1)在平面 (α, y) 中的分支见图10(a), 图10(b)是图10(a)对应的Lyapunov指数图。从图中可以看到: $\alpha \sim 0$ 附近混沌开始发生。 $\alpha \in (0, 0.03)$ 为不带周期窗口的混沌区域。 $\alpha \sim 0.03$ 处动态由混沌转变为周期轨, $\alpha \in (0.03, 0.04)$ 为周期4轨区域, $\alpha \sim 0.04$ 处动态又发生改变, 混沌突然发生, $\alpha \in (0.04, 0.18)$ 为较大的一个带周期窗口的混沌区域, $\alpha \sim 0.18$ 处开始出现逆倍周期分支, 最终趋向于周期1轨。图11(a)是 $\alpha = 0.05$ 时的相图, 图11(b)是其对应的Poincar'e映射, 系统动态表现为拟周期轨。图12(a)是 $\alpha = 0.1$ 时的相图, 图12(b)是其对应的Poincar'e映射, 它是非吸引的混沌集。图12(a)是 $\alpha = 0.17$ 时的相图, 图12(b)是其对应的Poincar'e映射, 它是一个混沌吸引子。

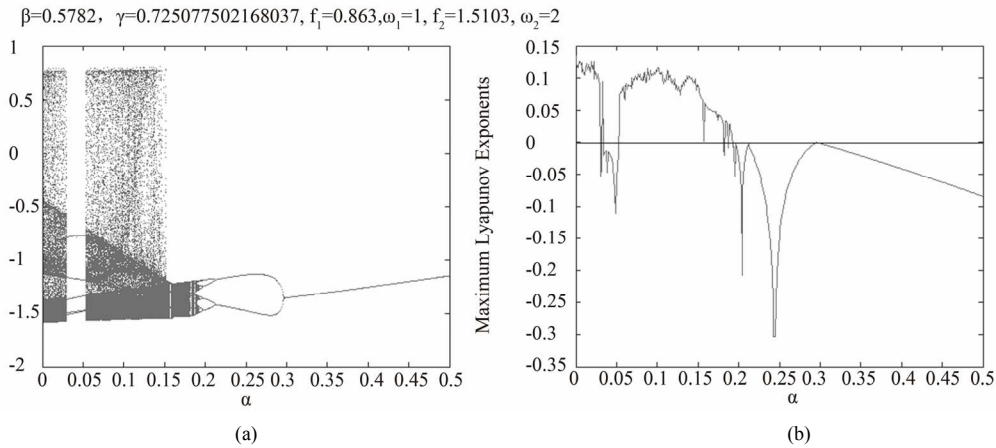


Figure 10. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (α, y) plane with $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图10. (a) 系统(1)在 (α, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

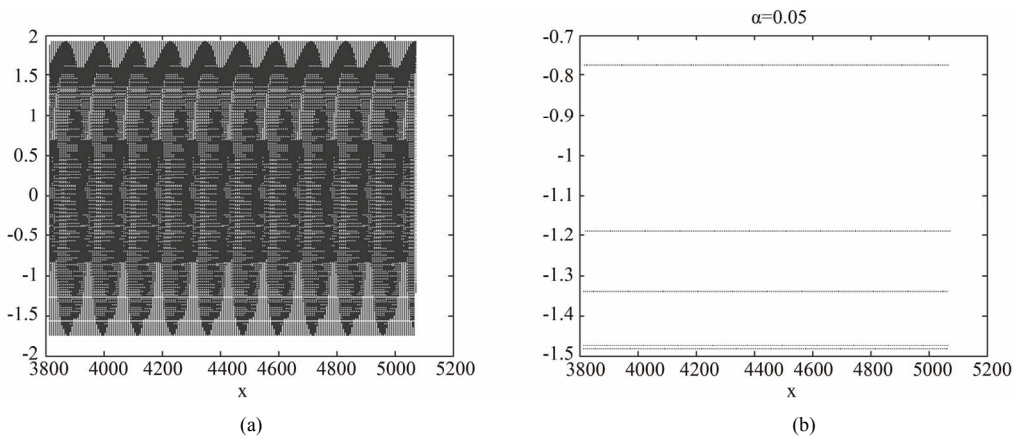


Figure 11. (a) Phase portrait of system (1) at $\alpha = 0.05$; (b) Poincar'e map of (a)

图11. (a) 图10中 $\alpha = 0.05$ 时的相图; (b) 相应于(a)的Poincar'e映射

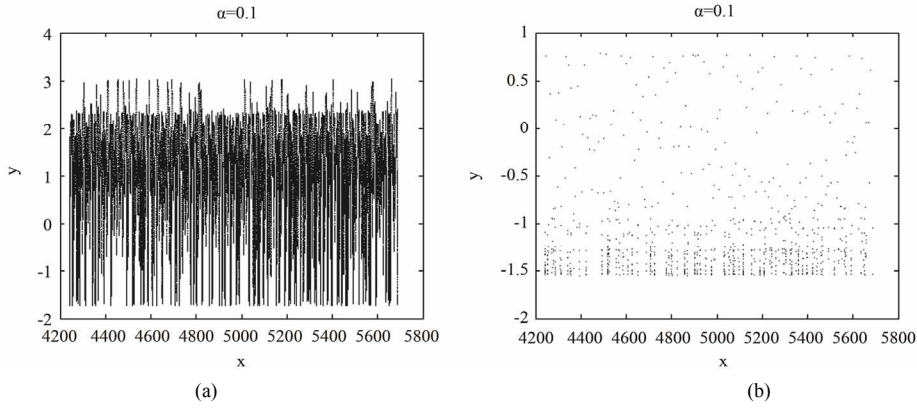


Figure 12. (a) Phase portrait of system (1) at $\alpha = 0.1$; (b) (b) Poincar'e map of (a)
图12. (a) 图10中 $\alpha = 0.1$ 时的相图; (b) 相应于(a)的Poincar'e映射

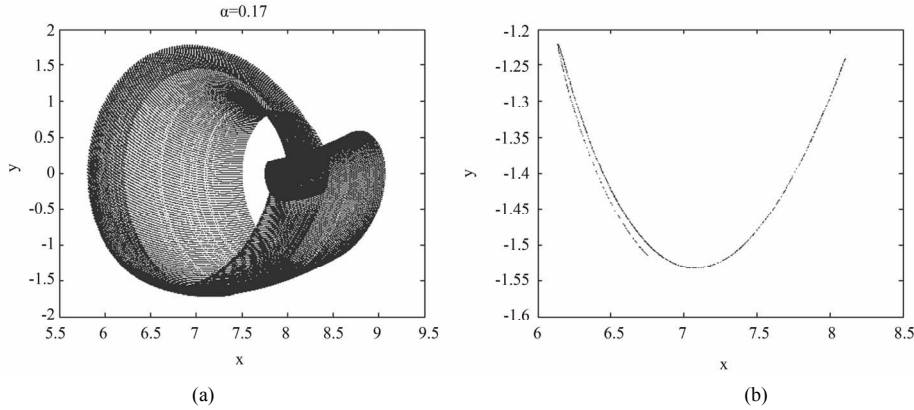


Figure 13. (a) Phase portrait of system (1) at $\alpha = 0.17$; (b) (b) Poincar'e map of (a)
图13. (a) 图10中 $\alpha = 0.17$ 时的相图; (b) 相应于(a)的Poincar'e映射

II) 固定 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$, 以 $\alpha \in (0, 0.5)$ 为参数。系统(1)在平面 (α, y) 中的分支图见图14(a), 图14(b)是图14(a)对应的Lyapunov指数图。从图中看到, 当 α 在 $(0, 0.5)$ 内变化时, 最大Lyapunov指数均为正, 系统展示出全混沌行为。

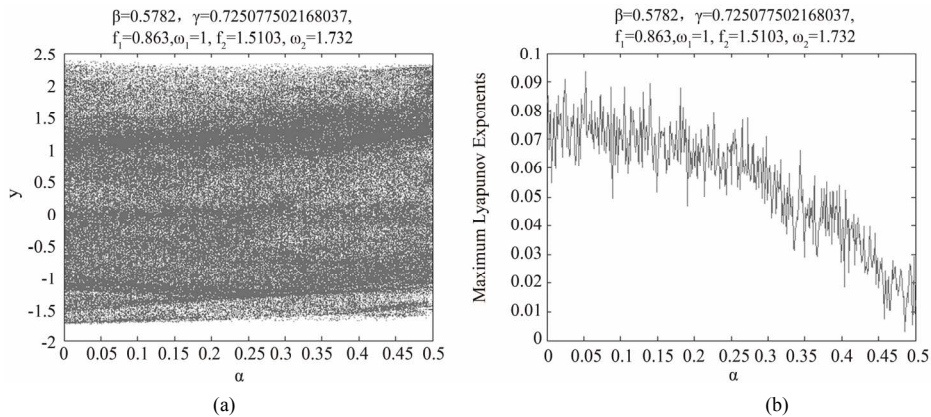


Figure 14. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (α, y) plane with $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$,
 $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图14. (a) 系统(1)在 (α, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$,
 $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$

2) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数。系统(1)在平面 (β, y) 中的分支图见图15(a), 图15(b)是图15(a)对应的Lyapunov指数图。 $\beta \in (0.4, 0.43)$ 为周期1轨区域, $\beta \sim 0.43$ 处混沌突然发生, 当 $\beta \in (0.43, 0.57)$ 时, 混沌与周期轨交替出现, $\beta \sim 0.57$ 处出现逆倍周期分支, 最终趋向于周期1轨。

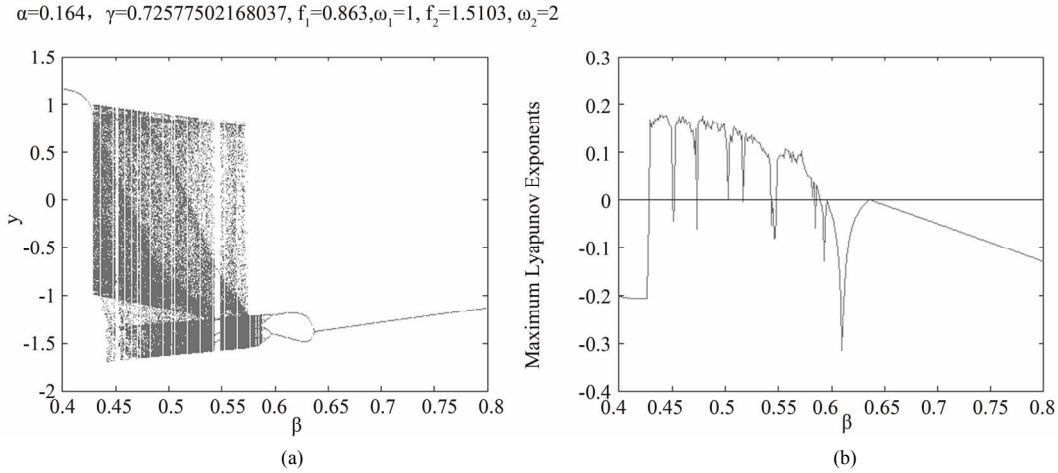


Figure 15. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (β, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图15. (a) 系统(1)在 (β, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

II) 固定 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1.4142$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数; 系统(1)在平面 (β, y) 中的分支图见图16(a), 图16(b)是图16(a)对应的Lyapunov指数图。 $\beta \sim 0.41$ 处混沌突然发生, $\beta \in (0.41, 0.43)$ 是一个较小的不带周期窗口的混沌区域, 当 $\beta \in (0.43, 0.45)$ 时, 不变环与混沌交替出现, $\beta \in (0.45, 0.8)$ 为一个较大的不变环区域。图17(a)是 $\beta = 0.05$ 时的相图, 图17(b)是其对应的Poincar'e映射, 它是一个不变环。

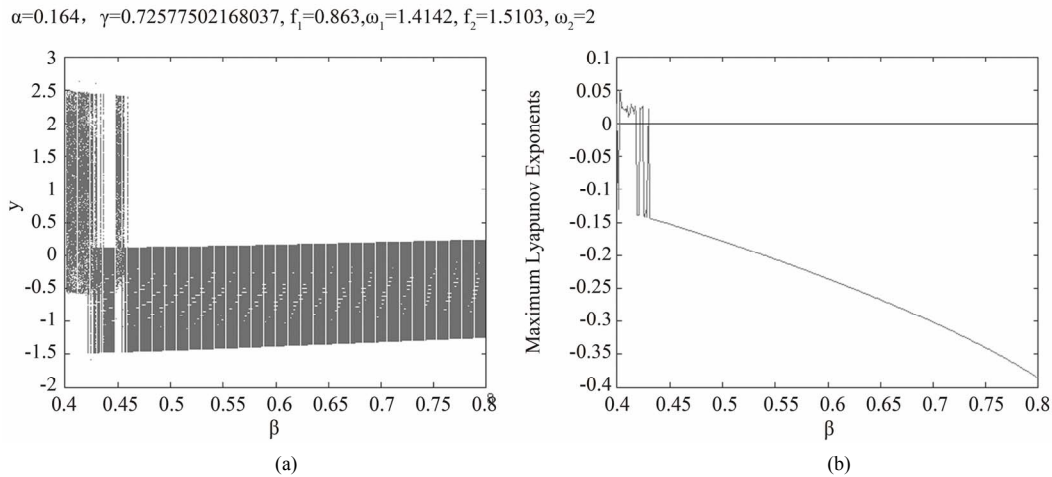


Figure 16. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (β, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1.4142$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图16. (a) 系统(1)在 (β, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1.4142$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

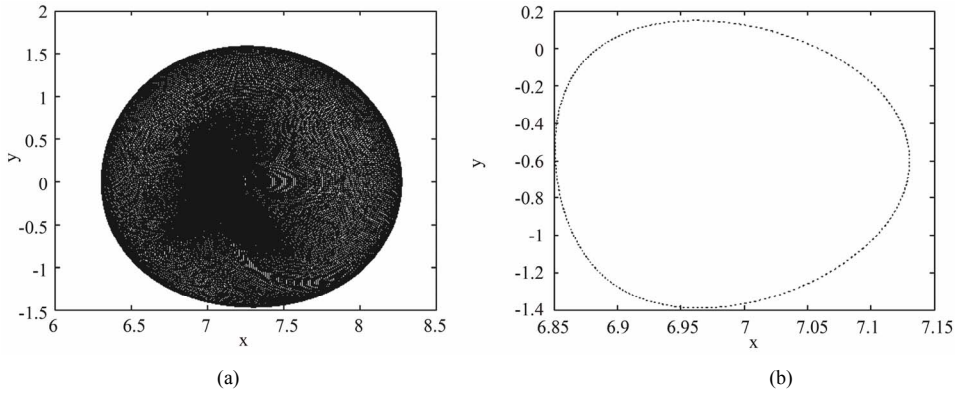


Figure 17. (a) Phase portrait of system at $\beta = 0.58$; (b) Poincaré map of (a)
图17. (a) 图16中 $\beta = 0.58$ 时的相图; (b) 相应于(a)的Poincaré映射

III) 固定 $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 3$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\beta \in (0.4, 0.8)$ 为参数; 系统(1)在平面 (β, y) 中的分支图见图18(a), 图18(b)是图18(a)对应的Lyapunov指数图。系统只展示出混沌与周期轨两种动态。 $\beta \sim 0.4$ 处混沌开始发生, $\beta \in (0.4, 0.43)$ 为几乎全混沌区域, 除了在 $\beta \sim 0.516$ 附近有很小的一段混沌区域外, $\beta \in (0.43, 0.8)$ 几乎全为周期轨区域。图19(a)~(c)是图18在 $\beta = 0.41$, $\beta = 0.516$, $\beta = 0.6$ 时的相图, 图20(a)~(c)是其对应的Poincaré映射, (a)(b)为非吸引的混沌集, (c)为周期轨。

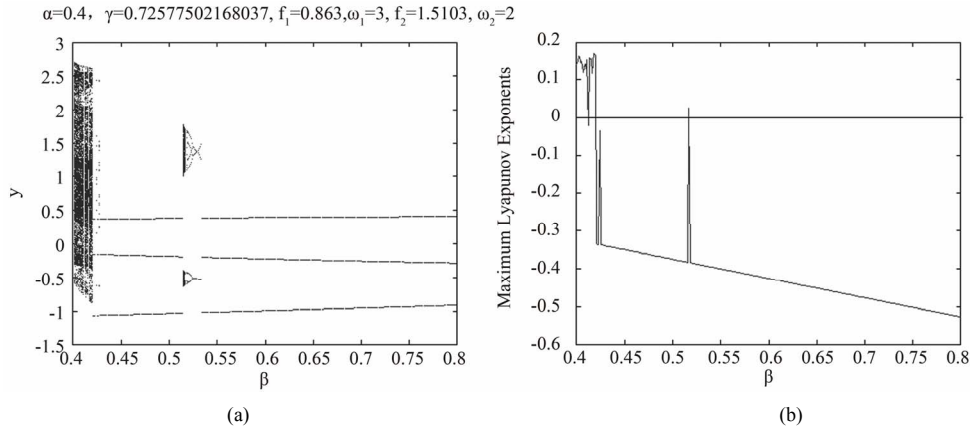


Figure 18. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (β, y) with $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 3$,
 $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图18. (a) 系统(1)在 (β, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$,
 $\omega_1 = 3$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

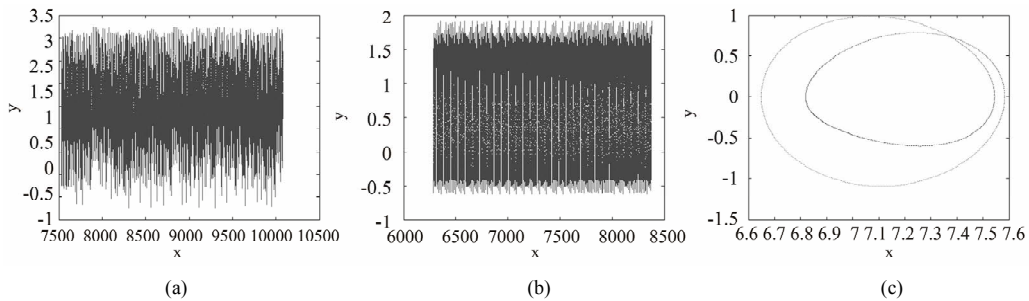


Figure 19. Phase portraits: (a) $\beta = 0.41$; (b) $\beta = 0.516$; (c) $\beta = 0.516$

图19. 图16中 β 取不同值时的相图: (a) $\beta = 0.41$; (b) $\beta = 0.516$; (c) $\beta = 0.516$

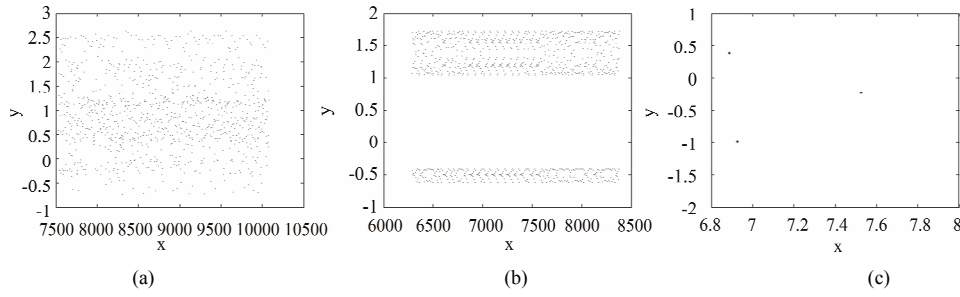


Figure 20. Poincaré corresponding to Fig.16: (a) $\beta = 0.41$; (b) $\beta = 0.516$; (c) $\beta = 0.516$
 图20. 图16中 β 取不同值时的Poincaré映射: (a) $\beta = 0.41$; (b) $\beta = 0.516$; (c) $\beta = 0.516$

3) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_1 \in (0, 2)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_1, y) 中的分支图见图21(a), 图21(b)是图21(a)对应的Lyapunov指数图。由图可见, 随参数变化, 系统经过正向和逆向的倍周期分支道路到混沌, 混沌集的突然增大。

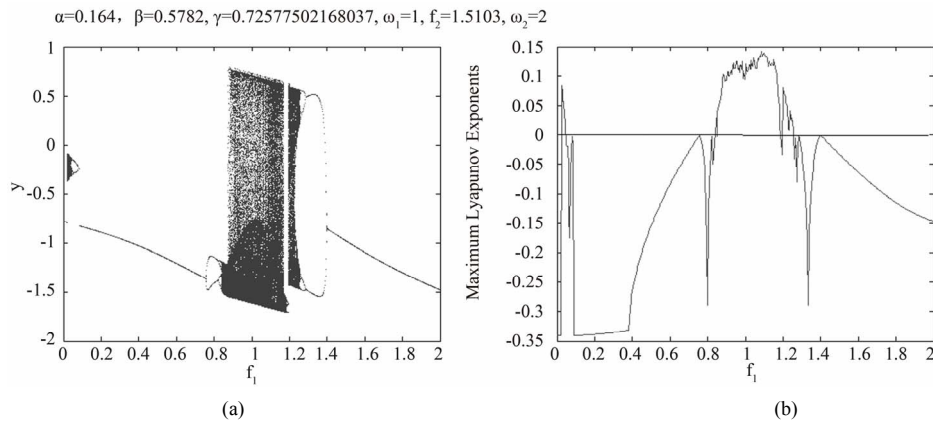


Figure 21. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_1, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图21. (a) 系统(1)在 (f_1, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

II) 固定 $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.5$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_1 \in (1.2, 1.8)$ 为参数。系统(1)在

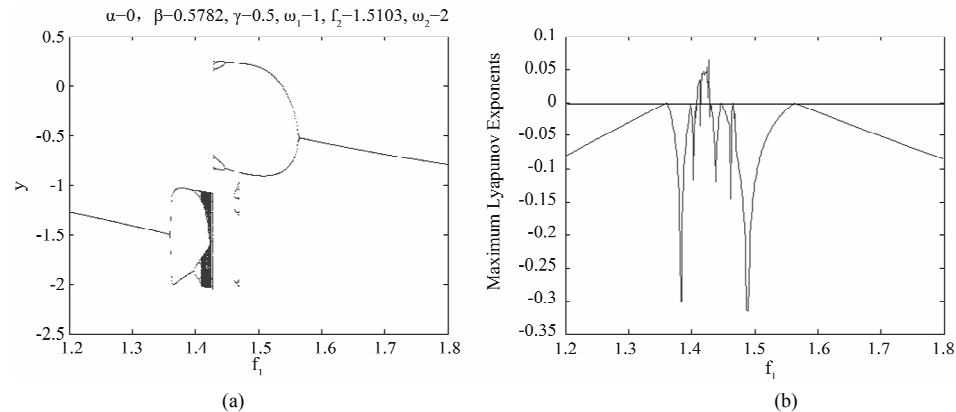


Figure 22. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_1, y) plane with $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.5$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图22. (a) 系统(1)在 (f_1, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.5$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

平面 (f_1, y) 中的分支图见图22(a), 图22(b)是图22(a)对应的Lyapunov指数图。由图可见, 周期-5轨突然转变为混沌。

III) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.7250$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.7321$, 以 $f_1 \in (0, 2)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_1, y) 中的分支图见图23(a), 图23(b)是图23(a)对应的Lyapunov指数图。系统展示出从拟周期轨到不带周期窗口的混沌到拟周期轨的动态变化过程, $f_1 \sim 0.7$ 处混沌突然发生, $f_1 \sim 1.3$ 处混沌突然消失。

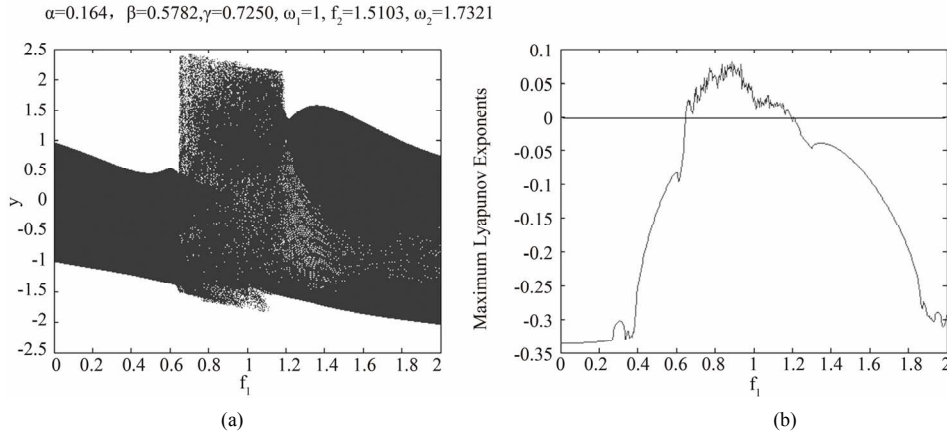


Figure 23. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_1, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.7250$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.7321$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图23. (a) 系统(1)在 (f_1, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.7250$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.7321$

4) I) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.863$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_2, y) 中的分支图见图24(a), 图24(b)是图24(a)对应的Lyapunov指数图。由图中可以看到, 随参数 f_2 的增大, 系统动态的变化情况: 经由倍周期分支道路转变为混沌, 混沌区域的突然放大, 混沌行为转化为周期轨, 周期轨重又转变为混沌动态。

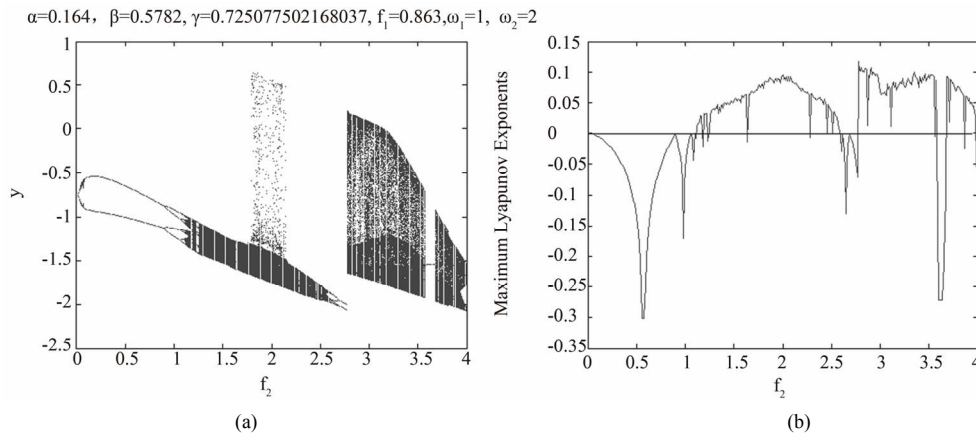


Figure 24. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_2, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.683$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图24. (a) 系统(1)在 (f_2, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.725077502168037$, $f_1 = 0.683$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$

II) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_2, y) 中的分支图见图25(a), 图25(b)是图25(a)对应的Lyapunov指数图。系统展示出从拟周

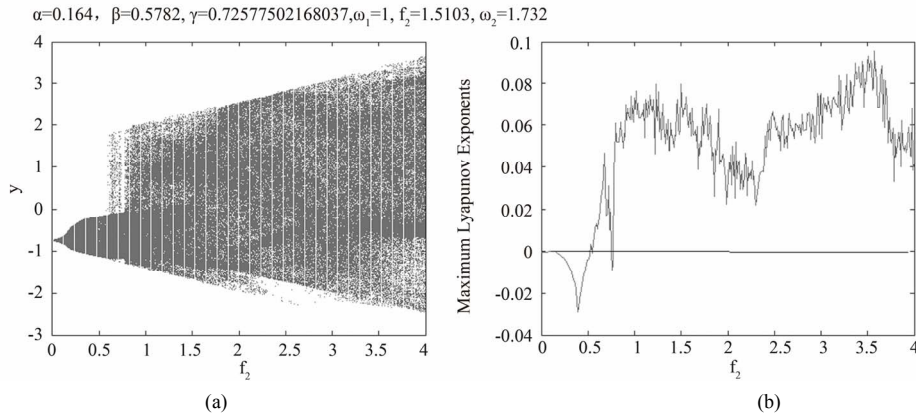


Figure 25. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_2, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图25. (a) 系统(1)在 (f_2, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.732$

期轨到混沌到拟周期轨到混沌的动态变化过程,除了(0,0.55)与(0.65,0.71)两个较小的拟周期轨区域外,其它区域为不带周期窗口的全混沌区域。

III) 固定 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.414$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_2, y) 中的分支图见图26(a), 图26(b)是图26(a)对应的Lyapunov指数图。从图中看到, 最大Lyapunov指数全为负, 系统只展示出拟周期轨动态。

IV) 固定 $\alpha = 0.38$, $\beta = 0.59$, $\gamma = 0.8$, $f_1 = 1.863$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, 以 $f_2 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (f_2, y) 中的分支图见图27(a), 图27(b)是图27(a)对应的Lyapunov指数图。由图中可以看到, 随参数 f_2 的减小, 系统的动态由逆向倍周期分支到达混沌, 并在 $f_2 \sim 1.09$ 处突然转变为周期-2轨。

5) 固定 $\alpha = 0.48$, $\beta = 0.59$, $f_1 = 1.863$, $\omega_1 = 0.2$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.4$, 以 $\gamma \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (γ, y) 中的分支图见图28(a), 图28(b)是图28(a)对应的Lyapunov指数图。由图可见混沌和拟周期动态的交替出现。

6) 固定 $\alpha = 0.28$, $\beta = 0.29$, $\gamma = 0.72577502168037$, $f_1 = 0.863$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$, 以 $\omega_1 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (ω_1, y) 中的分支图见图29(a), 图29(b)是图29(a)对应的Lyapunov指数图。从图中可以发现, 随参数变化, 系统动态拟周期和混沌的交替出现, 最终归于拟周期的变化情况。

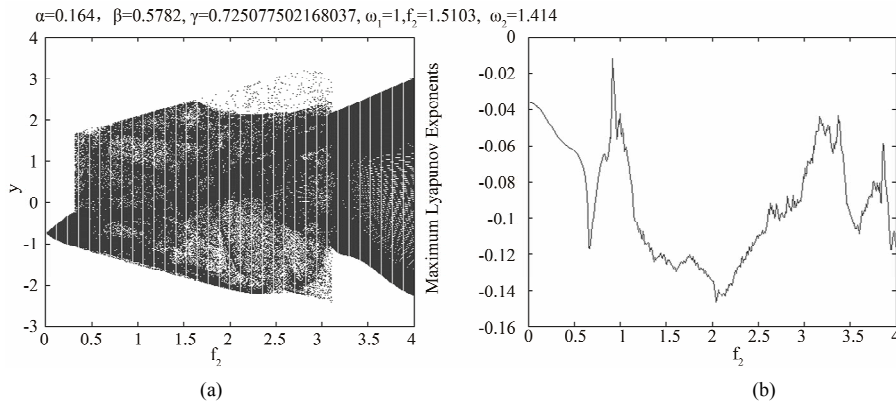


Figure 26. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_2, y) plane with $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.414$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图26. (a) 系统(1)在 (f_2, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.164$, $\beta = 0.5782$, $\gamma = 0.72577502168037$, $\omega_1 = 1$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.414$

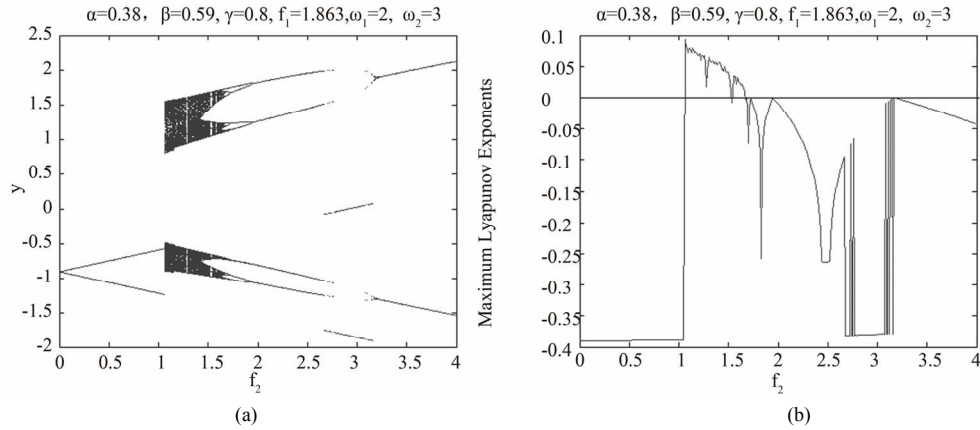


Figure 27. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (f_2, y) plane with $\alpha = 0.38$, $\beta = 0.59$, $\gamma = 0.8$, $f_1 = 1.683$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$;
(b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图27. (a) 系统(1)在 (f_2, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.38$, $\beta = 0.59$, $\gamma = 0.8$, $f_1 = 1.683$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$

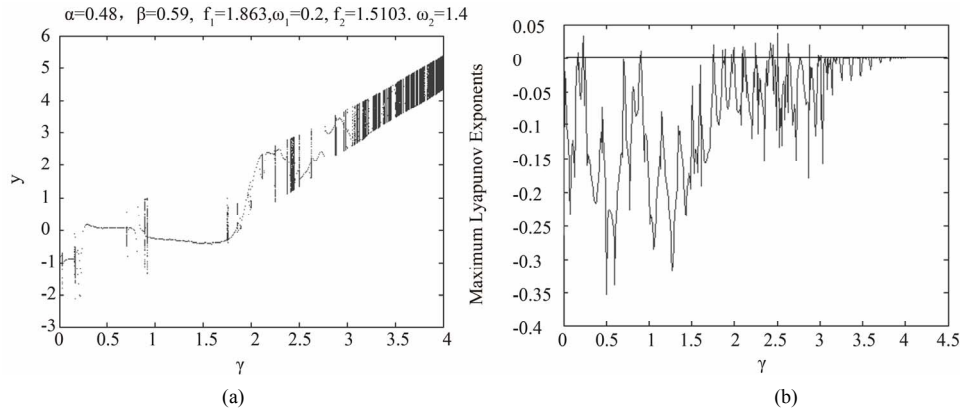


Figure 28. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (γ, y) plane with $\alpha = 0.48$, $\beta = 0.59$, $f_1 = 1.683$, $\omega_1 = 0.2$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.4$;
(b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图28. (a) 系统(1)在 (γ, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.48$, $\beta = 0.59$, $f_1 = 1.683$, $\omega_1 = 0.2$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 1.4$

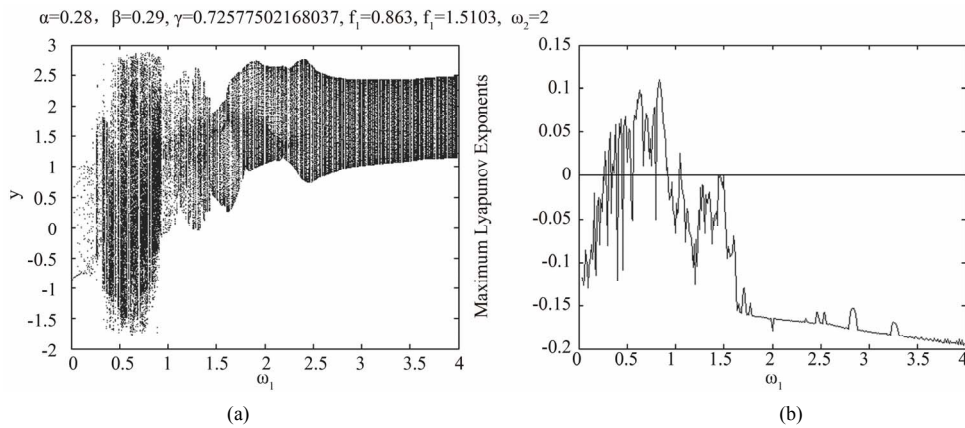


Figure 29. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (ω_1, y) plane with $\alpha = 0.28$, $\beta = 0.29$, $\gamma = 0.72577502168037$,
 $f_1 = 0.683$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图29. (a) 系统(1)在 (ω_1, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha = 0.28$, $\beta = 0.29$, $\gamma = 0.72577502168037$,
 $f_1 = 0.683$, $f_2 = 1.5103$, $\omega_2 = 2$

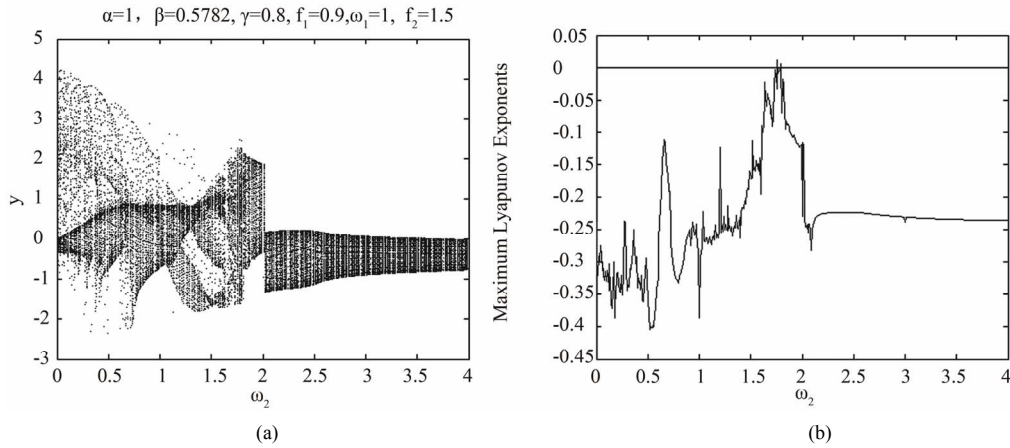


Figure 30. (a) Bifurcation diagram of system (1) in (ω_2, y) plane with $\alpha=1$, $\beta=0.5782$, $\gamma=0.8$, $f_1=0.9$, $\omega_1=1$, $f_2=1.5$; (b) Maximum Lyapunov exponents of (a)

图30. (a) 系统(1)在 (ω_2, y) 平面中的分支图; (b) 相应的最大Lyapunov指数。这里 $\alpha=1$, $\beta=0.5782$, $\gamma=0.8$, $f_1=0.9$, $\omega_1=1$, $f_2=1.5$

7) 固定 $\alpha=1$, $\beta=0.5782$, $\gamma=0.8$, $f_1=0.9$, $\omega_1=1$, $f_2=1.5$, 以 $\omega_2 \in (0, 4)$ 为参数。系统(1)在平面 (ω_2, y) 中的分支图见图30(a), 图30(b)是图30(a)对应的Lyapunov指数图。由图可见, 随参数 ω_2 的变化, 系统动态由拟周期到混沌, 在到拟周期的变化过程。图31(a)是 $\omega=1.76$ 时的相图, 图31(b)是其对应的Poincar'e映射, 它是一个非吸引混沌集。

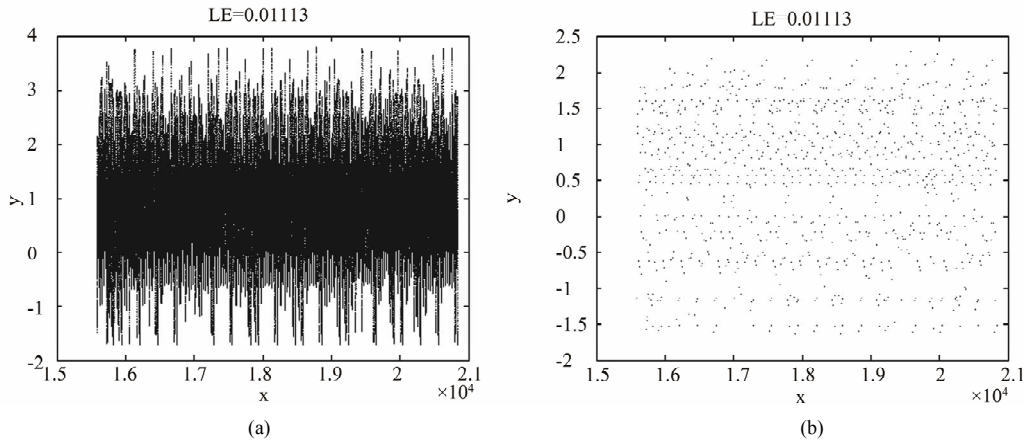


Figure 31. (a) Phase portrait of system at $\omega_2 = 1.76$; (b) Poincar'e map corresponding to (a)

图31. (a) 图16中 $\omega_2 = 1.76$ 时的相图; (b) 相应于(a)的Poincar'e映射(最大Lyapunov指数为0.01113)

6. 结论

本文应用经典的二阶平均方法和Melnikov理论, 得到了带参数和外力激励的Josephson系统在周期扰动和拟周期扰动下产生混沌的准则, 运用数值模拟验证了理论分析结果, 并找到了一些新的动态, 从而证实了在一定条件下参数激励和外力激励将使系统产生混沌, 明确指出了系统的一些动态变化情况, 进一步丰富了Josephson系统的研究, 为系统在其它领域的应用研究提供了更丰富的理论依据。

参考文献 (References)

- [1] S. N. Rasband. Chaotic Dynamics of nonlinear systems. New York: Awiley, 1990.

- [2] Z. J. Jing, K. Y. Chan, D. H. Xu, H. J. Cao. Bifurcations of periodic solutions and chaos in Josephson system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2001, 7(3): 573-592.
- [3] M. Levi, F. Hoppensteadt and W. Miranke. Dynamics of the Josephson junction. *The Quarterly of Applied Mathematics*, 1978, 35: 167-198.
- [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [5] V. N. Belyky, N. F. Pedersen and O. H. Soerensen. Shunted-Josephson model, I. The autonomous, II. The non-autonomous case. *Physical Review B*, 1977, 16: 4853-4871.
- [6] W. A. Schlup. I-V characteristics and stationary dynamics of a Josephson junction including the interference term in the current phase relation. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1974, 7(4): 736-748.
- [7] A. A. Abidi, L. O. Chua. On the dynamics of Josephson junction circuits. *IEE Journal on Electronic Circuits and Systems*, 1979, 3(4): 186-200.
- [8] M. K. Odyniec, L. O. Chua. Josephson-junction circuit analysis via integral manifolds, Part II. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1985, CAS-32(1): 34-45.
- [9] F. M. A. Salam, S. Satry. Dynamics of the forced Josephson junction circuit: The regions of chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1985, 32(8): 784-796.
- [10] M. Bartuccelli, P. L. Christiansen, N. F. Pedersen and M. P. Soerensen. Prediction of chaos in a Josephson junction by the Melnikov-function technique. *Physical Review*, 1986, B33: 4686-4691.
- [11] Z. J. Jing. Application of qualitative methods of differential equations to study phase-locked loops. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1983, 43(6): 1245-1258.
- [12] Z. J. Jing. Local and global bifurcations and applications in a predator-prey system with several parameters. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 1989, 2: 337-352.
- [13] H. J. Cao, Z. J. Jing. Chaotic dynamics of Josephson equation driven by constant dc and ac forcings. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, 12(10): 1887-1895.
- [14] Z. J. Jing, H. J. Cao. Bifurcation of periodic orbits in Josephson equation with a phase shift. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(7): 1515-1530.
- [15] J. P. Yang, W. Feng and Z. J. Jing. Complex dynamics in Josephson system with two external forcing terms. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 30(1): 235-256.
- [16] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [17] 刘维. *精通 Matlab 与 C++混合程序设计(第三版)*[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2012.