Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 169-175
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33025 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Central BMO Estimates for Commutators of Weighted Hardy Operators on Herz Type Spaces

Shuli Gong[1], Xianming Hou[2,3], Zunwei Fu[2]

[1]College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha
[2]Department of Mathematics, Linyi University, Linyi
[3]School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan
Email: gongshuli123@163.com, houxianming37@163.com, zwfu@mail.bnu.edu.cn

Received: Feb. 25th, 2013; revised: Mar. 12th, 2013; accepted: Mar. 21st, 2013

Abstract: In this paper, we present sufficient conditions on weighted function which ensures the boundedness of commutators generated by weighted Hardy operators and central BMO functions on Herz spaces and Morrey-Herz spaces, respectively. Moreover, the corresponding results are extended to the case of *k*-th order.

Keywords: Weighted Hardy Operator; Commutator; Central BMO Space; Herz Type Space

加权 Hardy 算子交换子在 Herz 型空间中的中心 BMO 估计

龚淑丽 [1]，侯宪明 [2,3]，傅尊伟 [2]

[1]湖南大学数学与计量经济学院，长沙
[2]临沂大学数学系，临沂
[3]山东师范大学数学科学学院，济南
Email: gongshuli123@163.com, houxianming37@163.com, zwfu@mail.bnu.edu.cn

收稿日期：2013 年 2 月 25 日；修回日期：2013 年 3 月 12 日；录用日期：2013 年 3 月 21 日

摘　要：给出了一个关于权函数满足的充分条件，该条件使得加权 Hardy 算子与中心 BMO 函数生成的交换子在 Herz 型空间中有界。进一步地，将所得结论推广到了 k 阶的情形。

关键词：加权 Hardy 算子；交换子；中心 BMO 空间；Herz 型空间

1. 引言

对于 $\mathbb{R}^n$ 上复值可测的函数 f，Carton-Lebrun 和 Mosset[1]在 1984 年给出了加权 Hardy 算子 U_φ 的定义：$\left(U_\varphi f\right)(x)=\int_0^1 f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t$，$x\in\mathbb{R}^n$。其中 $\varphi:[0,1]\to[0,\infty)$ 为权函数。显然，如果 $\varphi=1, n=1$，且 f 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上，则 U_φ 将退化为经典的 Hardy 算子 U：$U(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。在文献[1]中，Carton-Lebrun 和 Mosset 还证明了加权 Hardy 算子 U_φ 在 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ $(1<p<\infty)$ 上的有界性。在一定意义下，得到了当 $n=1$ 时，U_φ 与 Hilbert 变换可交换，当 $n\ge 2$ 时，U_φ 与奇异积分算子可交换的结论。注意到 U_φ 的定义中 $x\in\mathbb{R}^n$，因此 U_φ 可视为 U 的一类高维情形，关于高维 Hardy 算子的最新结果，见[2]。值得一提的是当权函数 φ 取特殊情形时，U_φ 还可以退化为经典的 n 维 Hardy 算子，见[3]。

算子 U_φ 的伴随算子为 Cesàro 平均，记为 V_φ，其定义为 $\left(V_\varphi f\right)(x)=\int_0^1 f(x/t)t^{-n}\varphi(t)\mathrm{d}t$。由该定义式易知当

$\varphi=1$ 且 $n=1$ 时，V_{φ} 将退化为如下经典的 Cesàro 算子(也称为伴随 Hardy 算子) V ：

$$V(f)(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y, & x>0\\ -\int_{-\infty}^{x}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y, & x<0\end{cases}。$$

容易验证当 $f\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$， $g\in L^q\left(\mathbb{R}^n\right)$， $1<p<\infty$， $1/p+1/q=1$ 时，U_{φ} 和 V_{φ} 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(U_{\varphi}f\right)(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\left(V_{\varphi}g\right)(x)\mathrm{d}x，$$

因此，U_{φ} 和 V_{φ} 满足交换法则：$U_{\varphi}V_{\varphi}=V_{\varphi}U_{\varphi}$。

在文[4]中，肖推广了 Carton-Lebrun 和 Mosset 的结论，指出加权 Hardy 算子 U_{φ} 在 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ $(1<p<\infty)$ 上有界当且仅当

$$\int_0^1 t^{-n/p}\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty， \tag{1.1}$$

且 $\left\|U_{\varphi}\right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\to L^p\left(\mathbb{R}^n\right)}=\int_0^1 t^{-n/p}\varphi(t)\mathrm{d}t$。进一步，鉴于 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的对偶空间为 $L^q\left(\mathbb{R}^n\right)$，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，文[4]还得到了以下结论：

$$\left\|U_{\varphi}\right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\to L^p\left(\mathbb{R}^n\right)}=\left\|V_{\varphi}\right\|_{L^q\left(\mathbb{R}^n\right)\to L^q\left(\mathbb{R}^n\right)}。$$

此外，文[4]还指出加权 Hardy-Littlewood 平均算子 U_{φ} 在 $BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上有界当且仅当 $\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty$，且

$$\left\|U_{\varphi}\right\|_{BMO\left(\mathbb{R}^n\right)\to BMO\left(\mathbb{R}^n\right)}=\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t。$$

并考虑到 $H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的对偶空间为 $BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ (见 Fefferman[5])，进一步得到

$$\left\|U_{\varphi}\right\|_{BMO\left(\mathbb{R}^n\right)\to BMO\left(\mathbb{R}^n\right)}=\left\|V_{\varphi}\right\|_{H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\to H^1\left(\mathbb{R}^n\right)}=\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t，$$

反之亦然。

除了讨论算子 U_{φ} 的有界性以外，学者们近年来还对 U_{φ} 的交换子的有界性进行了研究。在文[6]中，傅等人给出了 U_{φ} 的交换子 U_{φ}^b 的如下定义：

$$U_{\varphi}^b(f):=bU_{\varphi}(f)-U_{\varphi}(bf)， \tag{1.2}$$

其中 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数，$\varphi:[0,1]\to[0,\infty)$ 为权函数。显然，当 $b\in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 且 φ 满足条件(1.1)时，交换子 U_{φ}^b 在 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ $(1<p<\infty)$ 上是有界的。然而当 $b\in BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ 时，条件(1.1)就不能保证 U_{φ}^b 在 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的有界性。文[6]通过利用 Hardy-Littlewood 极大算子代替 Sharp 极大算子的方法，建立了 U_{φ}^b 在 $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上有界时权函数 φ 满足的充分必要条件。此后，文[7]将这一结论推广到了 $b\in C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$ 且底空间位中心 Morrey 空间的情形，这里 $C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$ 为中心 BMO 空间，其定义最初由 Lu 和 Yang 在文[8]中给出：

定义 1.1 对于 $1<q<\infty$，及 $L_{Loc}^q\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中的函数 f，如果 f 满足

$$\|f\|_{C\dot{M}O^q}=\sup_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)}\left|f(x)-f_{B(0,r)}\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}<\infty，$$

则称 f 属于中心 BMO 空间 $C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$，其中

$$f_{B(0,r)}=\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)}f(y)\mathrm{d}y。$$

在以上结果的启发下，本文研究当 $b \in C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$ 时，加权 Hardy 算子的交换子 U_φ^b 在 Herz 空间以及 Morrey-Herz 空间中的有界性，并进一步将所得结论推广到 k 阶的情形。作为必要的铺垫。在引出主要结果之前先来回顾一下相关空间的定义。为叙述方便，在下文中用 χ_k 来表示集合 C_k 的特征函数，即 $\chi_k = \chi_{C_k}$，这里 $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$，$B_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\right\}$ 且 $k \in \mathbb{Z}$。

首先来介绍一下 Herz 空间的定义。

定义 1.2[9] 设 $\alpha \in \mathbb{R}$，$1 < p \le \infty$，$1 < q \le \infty$。

1) 齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f \in L_{Loc}^q\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q\left(\mathbb{R}^n\right)}^p \right\}^{1/p}。$$

2) 非齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为

$$K_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f \in L_{Loc}^q\left(\mathbb{R}^n\right) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q\left(\mathbb{R}^n\right)}^p \right\}^{1/p}。$$

当 $p = \infty$ 或 $q = \infty$ 时，定义作适当修改。

注记 1.1 由上述定义易于得到，对所有的 $1 < p \le \infty$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}$ 均有 $\dot{K}_q^{0,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = K_q^{0,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$，且 $\dot{K}_q^{\alpha/p,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = K_q^{\alpha/p,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = L^p\left(|x|^\alpha dx\right)$。

下面，再来介绍一下 Morrey-Herz 空间的定义。

定义 1.3[10] 设 $\alpha \in \mathbb{R}$，$1 < p \le \infty$，$1 < q \le \infty$，且 $\lambda \ge 0$。

1) 齐次 Morrey-Herz 空间 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为

$$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f \in L_{Loc}^q\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right) : \|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{M\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} := \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q\left(\mathbb{R}^n\right)}^p \right\}^{1/p}。$$

2) 非齐次 Morrey-Herz 空间 $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为

$$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f \in L_{Loc}^q\left(\mathbb{R}^n\right) : \|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{MK_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)} := \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q\left(\mathbb{R}^n\right)}^p \right\}^{1/p},$$

当 $p = \infty$ 或 $q = \infty$ 时，定义作适当修改。

2. 主要结论

首先给出一个引理。

引理 2.1[11] 设 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 且 $1<p,q<\infty$，则 U_φ 为 $\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的有界算子当且仅当函数 φ 满足

$$\int_0^1 t^{-(\alpha+n/q)}\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty\,, \tag{2.1}$$

而且当(2.1)成立时，U_φ 的 $\dot{K}_q^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 范数满足

$$\left\|U_\varphi\right\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}\to\dot{K}_q^{\alpha,p}}\cong\int_0^1 t^{-(\alpha+n/q)}\varphi(t)\mathrm{d}t\text{ 。}$$

下面给出本文的第一个主要结论，即交换子 U_φ^b 在 Herz 空间中的有界性。

定理 2.1 对于 $1<q_1,q_2<\infty$，$1/q_2=1/q_1+1/q$，$\alpha_1=\alpha_2+n/q$ 及 $b\in C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$，如果

$$\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t<\infty\,,$$

则 U_φ^b 从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p}$ 是有界的。

在上述定理的基础上，我们还可以得到如下的定理。

定理 2.2 对于 $1<q_1,q_2<\infty$，$1/q_2=1/q_1+1/q$，$\alpha_1=\alpha_2+n/q$ 及 $b\in C\dot{M}O^q\left(\mathbb{R}^n\right)$，如果

$$\int_0^1 t^{\alpha_1-n(1-1/q_1)}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t<\infty\,,$$

则 V_φ^b 从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p}$ 有界，这里 V_φ^b 为 Cesàro 平均 V_φ 的交换子，其定义为

$$V_\varphi^b(f):=bV_\varphi(f)-V_\varphi(bf)\,,$$

且函数 f 与 φ 的定义与(1.2)中的一致。

由于定理 2.1 与定理 2.2 的证明类似。不失一般性，本文只给出定理 2.1 的证明。

证明：由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\left\|\left(U_\varphi^b f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_2}}&=\left(\int_{C_k}\left|\int_0^1\left(b(x)-b(tx)\right)f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\le\left(\int_{C_k}\left|\int_0^1\left(b(x)-b_{B_k}\right)f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\\&\quad+\left(\int_{C_k}\left|\int_0^1\left(b_{tB_k}-b(tx)\right)f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}+\left(\int_{C_k}\left|\int_0^1\left(b_{B_k}-b_{tB_k}\right)f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\text{ 。}\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

因为 $1/q_2=1/q_1+1/q$，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}I_1&\le\left(\int_{C_k}\left|b(x)-b_{B_k}\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_{C_k}\left|\int_0^1 f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{1/q_1}\\&\le\left(\frac{1}{\left|B_k\right|}\int_{B_k}\left|b(x)-b_{B_k}\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}2^{kn/q}\left\|\left(U_\varphi f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_1}}\le C2^{kn/q}\left\|b\right\|_{C\dot{M}O^q}\left\|\left(U_\varphi f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_1}}\end{aligned},$$

因为 $\alpha_1=\alpha_2+n/q$，则对于 I_1 有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_2 p}I_1^p\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_2 p}2^{knp/q}\left\|b\right\|_{C\dot{M}O^q}^p\left\|\left(U_\varphi f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_1}}^p\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_1 p}\left\|\left(U_\varphi f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_1}}^p=C\left\|U_\varphi f\right\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}}^p\,,$$

从而由引理 2.1 知

$$\left\|U_{\varphi} f\right\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}} \le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}} \int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\mathrm{d}t 。$$

对于 I_2，由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式 $(1/q_2 = 1/q_1 + 1/q)$ 得

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \int_0^1\left(\int_{C_k}\left|\left(b(tx)-b_{tB_k}\right) f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{q_2}\varphi(t)\mathrm{d}t \le \int_0^1\left(\int_{C_k}\left|b(tx)-b_{tB_k}\right|^{q}\mathrm{d}x\right)^{q}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le 2^{kn/q}\int_0^1\left(\frac{1}{\left|tB_k\right|}\int_{tB_k}\left|b(x)-b_{tB_k}\right|^{q}\mathrm{d}x\right)^{q}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t \le C2^{kn/q}\|b\|_{C\dot{M}O^q}\int_0^1\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t,\\
&\le C2^{kn/q}\|b\|_{C\dot{M}O^q}\int_0^1\left(\int_{tC_k}\left|f(x)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{q_1}t^{-n/q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

对任意的 $t\in(0,1)$，可以找到 $m\in\mathbb{Z}$，使得 $2^{m-1}<t\le 2^m$，由 Minkowski 不等式知

$$I_2 \le C2^{kn/q}\int_0^1\left(\int_{2^{k+m-2}<|x|\le 2^{k+m}}\left|f(x)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{q_1}t^{-n/q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t \le C2^{kn/q}\int_0^1\left(\left\|f\chi_{k+m-1}\right\|_{L^{q_1}}+\left\|f\chi_{k+m}\right\|_{L^{q_1}}\right)t^{-n/q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t 。$$

从而有

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_2 p}I_2^p\right)^{1/p} &\le C\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_1 p}\left(\int_0^1\left(\left\|f\chi_{k+m-1}\right\|_{L^{q_1}}+\left\|f\chi_{k+m}\right\|_{L^{q_1}}\right)t^{-n/q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)^{p}\right)^{1/p}\\
&\le C\int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_1 p}\left\|f\chi_{k+m-1}\right\|_{L^{q_1}}^{p}t^{-np/q_1}\varphi^p(t)\right)^{1/p}+C\int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha_1 p}\left\|f\chi_{k+m}\right\|_{L^{q_1}}t^{-np/q_1}\varphi^p(t)\right)^{1/p}\mathrm{d}t\\
&= C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}}\int_0^1\left(2^{-(m-1)\alpha_1}+2^{-m\alpha_1}\right)t^{-n/q_1}\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}}\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}。$$

最后估计 I_3，由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned}
I_3 &\le \int_0^1\left(\int_{C_k}\left|\left(b_{B_k}-b_{tB_k}\right)f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le \int_0^1\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\left|b_{B_k}-b_{tB_k}\right|\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\left|b_{B_k}-b_{tB_k}\right|\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\left(\sum_{j=0}^{i}\left|b_{2^{-j}B_k}-b_{2^{-j-1}B_k}\right|+\left|b_{2^{-j-1}B_k}-b_{tB_k}\right|\right)\varphi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned},$$

由于

$$\sum_{j=0}^{i}\left|b_{2^{-j}B_k}-b_{2^{-j-1}B_k}\right| \le C\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{1}{\left|2^{-j}B_k\right|}\int_{2^{-j}B_k}\left|b(y)-b_{2^{-i}B_k}\right|^{q}\mathrm{d}y\right)^{1/q} \le C\|b\|_{C\dot{M}O^q}(i+1),$$

所以有

$$\begin{aligned}
I_3 &\le C\|b\|_{C\dot{M}O^q}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}(i+1)\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&\le C\|b\|_{C\dot{M}O^q}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}\varphi(t)\log\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&\le C\|b\|_{C\dot{M}O^q}\int_0^1 2^{kn/q}\left(\int_{C_k}\left|f(tx)\right|^{q_1}\mathrm{d}x\right)^{1/q_1}\varphi(t)\log\frac{1}{t}\mathrm{d}t
\end{aligned}。$$

注意到 $1/q_2 = 1/q_1 + 1/q$，上面最后一个不等式可由 Hölder 不等式得到。类似于 I_2 的估计，我们有

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_2 p} I_3^p\right)^{1/p} \le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}} \int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t。$$

综上所述，若

$$\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t < \infty,$$

那么 U_φ^b 从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p}$ 是有界的，证毕。

基于傅、陆在[12]中的结果，下面给出本文的第二个主要结论，即交换子 U_φ^b 在 Morrey-Herz 空间中的有界性。

定理 2.3 对于 $1 < q_1, q_2 < \infty$，$1/q_2 = 1/q_1 + 1/q$，$\lambda > 0$，$\alpha_1 = \alpha_2 + n/q$ 及 $b \in C\dot{M}O^q(\mathbb{R}^n)$，如果 $\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)+\lambda}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t < \infty$，那么 U_φ^b 从 $M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 是有界的。

对应于定理 2.1 和定理 2.2 的情形，我们也可得到如下的定理：

定理 2.4 对于 $1 < q_1, q_2 < \infty$，$1/q_2 = 1/q_1 + 1/q$，$\lambda > 0$，$\alpha_1 = \alpha_2 + n/q$ 及 $b \in C\dot{M}O^q(\mathbb{R}^n)$，如果 $\int_0^1 t^{\alpha_1-\lambda-(1-1/q_1)}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t < \infty$，则 V_φ^b 从 $M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 是有界的。

同样不失一般性，这里只给出定理 2.3 的证明。

证明：根据定理 2.1 的证明得到

$$\begin{aligned}\|U_\varphi^b f\|_{M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2,\lambda}} &= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p}\left\|\left(U_\varphi^b f\right)\chi_k\right\|_{L^{q_2}}^p\right\}^{1/p} \\ &\le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p}\left(\int_0^1\left(\|f\chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}} + \|f\chi_{k+m}\|_{L^{q_1}}\right)t^{-n/q_1}\log\frac{2}{t}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)^p\right\}^{1/p},\end{aligned}$$

由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned}\|U_\varphi^b f\|_{M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2,\lambda}} &\le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p}\|f\chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}}^p t^{-pn/q_1}\left(\log\frac{2}{t}\right)^p\varphi^p(t)\right)^{1/p}\mathrm{d}t \\ &\quad + \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p}\|f\chi_{k+m}\|_{L^{q_1}}^p t^{-pn/q_1}\left(\log\frac{2}{t}\right)^p\varphi^p(t)\right)^{1/p}\mathrm{d}t \\ &\le C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1,\lambda}}\int_0^1\left(2^{-(m-1)\alpha_1} + 2^{-m\alpha_1}\right)t^{-n/q_1+\lambda}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t \le C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1,\lambda}}\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)+\lambda}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}。$$

从而得到

$$\|U_\varphi^b\|_{M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1,\lambda}\to M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2,\lambda}} \le C\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)+\lambda}\varphi(t)\log\frac{2}{t}\mathrm{d}t < \infty,$$

定理证毕。

3. 高阶交换子

在上一小节的基础上，本节将所得结论进一步推广到高阶交换子的情形中。首先，定义加权 Hardy 算子的高阶交换子 $U_\varphi^{\boldsymbol{b}}$ 为

$$U_\varphi^{\boldsymbol{b}} f(x) = \int_0^1\left(\prod_{j=1}^{k}\left(b_j(x) - b_j(tx)\right)\right)f(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $k\ge 0$ 为正整数，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ 为一个 k 维向量。不难验证，当 $k=0$ 时，$U_\varphi^{\boldsymbol{b}}=U_\varphi$；当 $k=1$ 时，$U_\varphi^{\boldsymbol{b}}=U_\varphi^{b}$。

类似地，定义加权 Cesàro 平均的高阶交换子 $V_\varphi^{\boldsymbol{b}}$ 为

$$V_\varphi^{\boldsymbol{b}}f(x)=\int_0^1\left(\prod_{j=1}^k\left(b_j(x/t)-b_j(x)\right)\right)f(x/t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}^n。$$

将上一节中的结论推广到 k 阶交换子的情形中，可得到如下两个定理：

定理 3.1 对于 $b_i\in C\dot{M}O^{s_i}(\mathbb{R}^n)$，$1<s_i,q_1,q_2<\infty$，$i=1,2,\cdots,k$，$1/q_2=1/q_1+\sum_{i=1}^k 1/s_i$ 及 $\alpha_1=\alpha_2+n\sum_{i=1}^k 1/s_i$，如果 $\int_0^1 t^{-(\alpha_1+n/q_1)}\varphi(t)\left(\log\frac{2}{t}\right)^k\mathrm{d}t<\infty$，那么 $U_\varphi^{\boldsymbol{b}}$ 从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p}$ 是有界的。

定理 3.2 对于 $b_i\in C\dot{M}O^{s_i}(\mathbb{R}^n)$，$1<s_i,q_1,q_2<\infty$，$i=1,2,\cdots,k$，$1/q_2=1/q_1+\sum_{i=1}^k 1/s_i$ 及 $\alpha_1=\alpha_2+n\sum_{i=1}^k 1/s_i$，如果 $\int_0^1 t^{\alpha_1-n(1-1/q_1)}\varphi(t)\left(\log\frac{2}{t}\right)^k\mathrm{d}t<\infty$，那么 $V_\varphi^{\boldsymbol{b}}$ 从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p}$ 是有界的。

同上，我们可得到定理 2.3 和定理 2.4 的高阶交换子的形式，这里不再给出定理的具体内容。另外，本节中定理的证明可完全遵循上节中相关定理的证明过程得到，在此不再赘述。

4. 致谢

作者对审稿人提出的修改意见表示衷心的感谢！本文受到国家自然科学基金资助项目(10901076，11271175)。

参考文献 (References)

[1] C. Carton-Lebrun, M. Fosset. Moyennes et quotients de Taylor dans BMO. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 1984, 53(2): 85-87.
[2] Z. W. Fu, L. Grafakos, S. Z. Lu and F. Y. Zhao. Sharp bounds for m-linear Hardy operators and Hilbert operators. Houston Journal of Mathematics, 2012, 38(1): 225-244.
[3] F. Y. Zhao, Z. W. Fu and S. Z. Lu. Endpoint estimates for n-dimensional Hardy operators and their commutators. Science China Mathematics, 2012, 55(10): 1977-1990.
[4] J. Xiao. L^p and bounds of weighted Hardy-Littlewood averages. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 262(2): 660-666.
[5] R. Fefferman. Characterization of bounded mean oscillation. Bulletin of the American Mathematical Society, 1971, 77: 587-588.
[6] Z. W. Fu, Z. G. Liu and S. Z. Lu. Commutators of weighted Hardy operators on R^n. Proceedings of the American Mathematical Society, 2009, 137(10): 3319-3328.
[7] Z. W. Fu, S. Z. Lu and W. Yuan. A weighted variant of Riemann-Liouville fractional integral on R^n. Abstract and Applied Analysis, 2012, 2012: 18 p.
[8] S. Z. Lu, D. C. Yang. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators. Approximation Theory and its Applications, 1995, 11(3): 72-94.
[9] S. Z. Lu, D. C. Yang. The decomposition of the weighted Herz spaces on R^n and its application. Science in China Series A: Mathematics, 1995, 38(2): 147-158.
[10] S. Z. Lu, L. F. Xu. Boundedness of rough singular integral operators on the homogenous Morrey-Herz spaces. Hokkaido Mathematical Journal, 2005, 34(2): 299-314.
[11] 刘宗光, 傅尊伟. Herz 空间中的加权 Hardy-Littlewood 平均算子[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1085-1090.
[12] Z. W. Fu, S. Z. Lu. A remark on weighted Hardy-Littlewood averages on Herz spaces. Advances in Mathematics (China), 2008, 37(5): 632-636.

