Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 188-194
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33028 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Generalized $\frac{\varphi'}{\varphi}$-Expansion Method and the Traveling Wave Solutions of the STO Equation

Yuanyuan Han, Desheng Li, Ting Huang

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: yuanyuan010529@163.com

Received: Feb. 21st, 2013; revised: Mar. 7th, 2013; accepted: Mar. 19th, 2013

Abstract: This paper is about to discuss the method which is based on the generalized $\frac{\varphi'}{\varphi}$-expansion method, and explain how to determine φ by the equation itself without considering the auxiliary equation to make sure the solutions of the equation. This paper discusses the Sharma-Tasso-Olver (STO) equation and obtains the traveling wave solutions and trigonometric function solutions of the STO equation.

Keywords: Generalized $\frac{\varphi'}{\varphi}$-Expansion Method; Traveling Wave Solution; Trigonometric Functions Solution

扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法及 Sharma-Tasso-Olver 方程的行波解

韩园媛，李德生，黄　婷

沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
Email: yuanyuan010529@163.com

收稿日期：2013 年 2 月 21 日；修回日期：2013 年 3 月 7 日；录用日期：2013 年 3 月 19 日

摘　要：本文在原有扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法基础之上，不考虑φ满足的辅助方程，只利用方程本身来确定φ，进而确定方程的解。文章讨论求解了 Sharma-Tasso-Olver(STO)方程，获得了 STO 方程的行波解和三角函数解。

关键词：扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法；行波解；三角函数解

1. 引言

由于非线性偏微分方程的解对于解释物理学、生物学等领域出现的各种现象具有积极的意义，因此非线性偏微分方程的求解受到了大家的广泛关注，求解方法也层出不穷，如 Darboux 变换[1]、Bäcklund 变换法[2-4]、辅助方程法[5]、Hirota 双线性方法[6]、对称法[7]等。

王明亮等人于 2008 年在文献[8]中提出了$\frac{G'}{G}$(即本文所说的$\frac{\varphi'}{\varphi}$)-展开法，大量的文章利用这一方法求解非线性偏微分方程，并对其进行了推广[9-15]。最近，文献[16]的作者对这一方法进行了另一种推广，但是仍然借助了辅助方程，本文在此基础上，去掉辅助方程这一条件，只利用方程本身进行求解，并利用该方法讨论研究了 STO 方程，获得了该方程的精确解。

本文分为四个部分，第一部分为引言；第二部分详细描述了扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法的步骤；第三部利用这一方法讨论研究了 STO 方程，获得了该方程的行波解和三角函数解；第四部分阐述文章的结论。

2. 扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法

利用扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法求解非线性偏微分方程分为以下几个步骤：

1) 通过平衡方程的最高阶非线性项和最高阶导数项，确定正整数n；

2) 假设方程具有如下形式的解

$$u = A_0 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i+j=k} A_{ij}\left(\frac{\varphi_1'(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)}\right)^i\left(\frac{\varphi_2'(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)}\right)^j, \sum_{i+j=k} A_{ij}\left(\frac{\varphi_1'(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)}\right)^i\left(\frac{\varphi_2'(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)}\right)^j \neq 0, \tag{1}$$

其中

$$\xi_1 = k_1x + c_1t + l_1,\quad \xi_2 = k_2x + c_2t + l_2,\quad \frac{\varphi_1'(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)} = \frac{\mathrm{d}\varphi_1(\xi_1)}{\mathrm{d}\xi_1},\quad \frac{\varphi_2'(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)} = \frac{\mathrm{d}\varphi_2(\xi_2)}{\mathrm{d}\xi_2},$$

$A_0, A_{ij}, k_1, k_2, c_1, c_2, l_1, l_2$为任意常数。将(1)式代入方程中，由于$\varphi_1^{-i}\varphi_2^{-j}\ (i = 0,1,2,\cdots; j = 0,1,2,\cdots)$是线性无关的，因此令$\varphi_1^{-i}\varphi_2^{-j}$的系数等于零，得到关于$A_0, A_{ij}, \varphi_1(\xi_1), \varphi_2(\xi_2)$的常微分方程组；

3) 求解前一步获得的常微分方程组，确定$A_0, A_{ij}, \varphi_1(\xi_1), \varphi_2(\xi_2)$；

4) 利用前一步的结果以及(1)式，即可得到方程的精确解。

3. 扩展的$\frac{\varphi'}{\varphi}$-展开法对 STO 方程的应用

考虑 Sharma-Tasso-Olver(STO)方程

$$u_t + 3\alpha u^2 u_x + \frac{3}{2}\alpha\left(u^2\right)_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

其中α是任意实常数。

平衡方程(2)的最高阶非线性项与最高阶导数项可得$n = 1$，因此设方程(2)具有如下形式的解

$$u = A_0 + A_1\frac{\varphi_1'(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)} + A_2\frac{\varphi_2'(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)}, \tag{3}$$

其中$\xi_1 = k_1x + c_1t + l_1$，$\xi_2 = k_2x + c_2t + l_2$，$A_0, A_1, A_2, k_1, k_2, c_1, c_2, l_1, l_2$为任意常数，将(3)式代入方程(2)中，令$\varphi_1^{-i}\varphi_2^{-j}$的系数等于零，可以得到关于$A_0, A_1, A_2$以及 $\varphi_1(\xi_1), \varphi_2(\xi_2)$的常微分方程组，求解一部分方程并整理其余的方程可得到下面的结果和方程

$$A_0 = a,\quad A_1 = k_1,\quad A_2 = k_2,$$

$$c_1\varphi_1' + 3\alpha a^2 k_1\varphi_1' + 3\alpha a k_1^2\varphi_1'' + \alpha k_1^3\varphi_1''' = 0, \tag{4}$$

$$c_2\varphi_2' + 3\alpha a^2 k_2\varphi_2' + 3\alpha a k_2^2\varphi_2'' + \alpha k_2^3\varphi_2''' = 0\,, \tag{5}$$

$$k_1\varphi_1''\varphi_2' + 2a\varphi_1'\varphi_2' + k_2\varphi_1'\varphi_2'' = 0\,, \tag{6}$$

其中a为任意常数。

方程(4)的特征方程为

$$\lambda\left[\left(c_1 + 3\alpha a^2 k_1\right) + 3\alpha a k_1^2\lambda + \alpha k_1^3\lambda^2\right] = 0\,,$$

记方程

$$\left(c_1 + 3\alpha a^2 k_1\right) + 3\alpha a k_1^2\lambda + \alpha k_1^3\lambda^2 = 0$$

的判别式和根分别为

$$\Delta_1 = -3\alpha^2 a^2 k_1^4 - 4\alpha c_1 k_1^3\,,\quad \lambda_{11} = \frac{-3\alpha a k_1^2 + \sqrt{\Delta_1}}{2\alpha k_1^3}\,,\quad \lambda_{12} = \frac{-3\alpha a k_1^2 - \sqrt{\Delta_1}}{2\alpha k_1^3}\,,$$

同理，对于方程(5)的特征方程中的判别式和特征根记为

$$\Delta_2 = -3\alpha^2 a^2 k_2^4 - 4\alpha c_2 k_2^3\,,\quad \lambda_{21} = \frac{-3\alpha a k_2^2 + \sqrt{\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\,,\quad \lambda_{22} = \frac{-3\alpha a k_2^2 - \sqrt{\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\,。$$

Δ_1,Δ_2的符号决定了方程(4)和方程(5)的解的形式，进而决定了方程(2)的解的形式，按解的形式不同，可以分为以下三种情况：

情况一 $\begin{cases}\Delta_1 > 0,\\ \Delta_2 > 0,\end{cases}$

1) 显然

$$\varphi_1\left(\xi_1\right) = M\mathrm{e}^{\lambda_{11}\xi_1} + b_1\left(t\right), \tag{7}$$

$$\varphi_2\left(\xi_2\right) = N\mathrm{e}^{\lambda_{21}\xi_2} + b_2\left(t\right), \tag{8}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，其中M,N是任意常数，$b_1\left(t\right),b_2\left(t\right)$是$t$的任意函数。将其代入方程(6)

$$2a + k_1\lambda_{11} + k_2\lambda_{21} = 0\,, \tag{9}$$

事实上，(9)式为k_1,k_2,c_1,c_2,a,α满足的方程，为了书写方便，我们用(9)式表示。将(7)、(8)式代入(3)式，并利用(9)式，可得方程(2)的行波解

$$u_{11} = \frac{k_1\lambda_{11}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{11}}{2}\xi_1 + \xi_{10}\right) + \frac{k_2\lambda_{21}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{21}}{2}\xi_2 + \xi_{20}\right), \tag{10}$$

其中

$$\xi_{10} = \frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1\left(t\right)}\,,\quad \xi_{20} = \frac{1}{2}\ln\frac{N}{b_2\left(t\right)}\,,\quad \xi_1 = k_1x + c_1t + l_1\,,\quad \xi_2 = k_2x + c_2t + l_2\,,\quad k_1,k_2,c_1,c_2,a,\alpha$$

满足(9)式。

2) 显然

$$\varphi_1\left(\xi_1\right) = M\mathrm{e}^{\lambda_{11}\xi_1} + b_1\left(t\right), \tag{11}$$

$$\varphi_2\left(\xi_2\right) = N\mathrm{e}^{\lambda_{22}\xi_2} + b_2\left(t\right), \tag{12}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，由(11)、(12)式可以得到方程(2)的行波解为

$$u_{12}=\frac{k_1\lambda_{11}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{11}}{2}\xi_1+\xi_{10}\right)+\frac{k_2\lambda_{22}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{22}}{2}\xi_2+\xi_{20}\right),\tag{13}$$

其中

$$\xi_{10}=\frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1(t)},\quad \xi_{20}=\frac{1}{2}\ln\frac{N}{b_2(t)},\quad \xi_1=k_1x+c_1t+l_1,\quad \xi_2=k_2x+c_2t+l_2,\quad k_1,k_2,c_1,c_2,a,\alpha$$

满足如下方程

$$2a+k_1\lambda_{11}+k_2\lambda_{22}=0\tag{14}$$

3) 显然

$$\varphi_1(\xi_1)=Me^{\lambda_{12}\xi_1}+b_1(t),\tag{15}$$

$$\varphi_2(\xi_2)=Ne^{\lambda_{22}\xi_1}+b_2(t),\tag{16}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，由(15)、(16)式可以得到方程(2)的行波解为

$$u_{13}=\frac{k_1\lambda_{12}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{12}}{2}\xi_1+\xi_{10}\right)+\frac{k_2\lambda_{22}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{22}}{2}\xi_2+\xi_{20}\right)\tag{17}$$

其中

$$\xi_{10}=\frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1(t)},\quad \xi_{20}=\frac{1}{2}\ln\frac{N}{b_2(t)},\quad \xi_1=k_1x+c_1t+l_1,\quad \xi_2=k_2x+c_2t+l_2,\quad k_1,k_2,c_1,c_2,a,\alpha$$

满足如下方程

$$2a+k_1\lambda_{12}+k_2\lambda_{22}=0\text{。}\tag{18}$$

情况二 $\begin{cases}\Delta_1>0,\\ \Delta_2<0,\end{cases}$

1) 显然

$$\varphi_1(\xi_1)=Me^{\lambda_{11}\xi_1}+b_1(t),\tag{19}$$

$$\varphi_2(\xi_2)=N_1e^{-\frac{3a}{2k_2}}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right)+N_2e^{-\frac{3a}{2k_2}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right)+b_2(t),\tag{20}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，其中M,N_1,N_2为任意常数，$b_1(t),b_2(t)$是t的任意函数，将其代入(6)式，并考虑$\Delta_2=-3\alpha^2a^2k_2^4-4\alpha c_2k_2^3$可得

$$c_2=-3\alpha a^2k_2,\tag{21}$$

将(19)~(21)式代入(3)式可得方程(2)的精确解

$$u_{21}=a+\frac{k_1\lambda_{11}}{2}+\frac{k_1\lambda_{11}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{11}}{2}\xi_1+\xi_{10}\right)+k_2\cdot\frac{\varphi_2'}{\varphi_2},\tag{22}$$

其中

$$\xi_{10}=\frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1(t)},\quad \xi_1=k_1x+c_1t+l_1,\quad \xi_2=k_2x-3\alpha a^2k_2t+l_2\text{。}$$

2) 显然

$$\varphi_1(\xi_1) = M\mathrm{e}^{\lambda_{12}\xi_1} + b_1(t), \tag{23}$$

$$\varphi_2(\xi_2) = N_1\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_2}}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right) + N_2\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_2}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right) + b_2(t), \tag{24}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，由(23)、(24)式可以得到方程(2)的解为

$$u_{22} = a + \frac{k_1\lambda_{12}}{2} + \frac{k_1\lambda_{12}}{2}\tanh\left(\frac{\lambda_{12}}{2}\xi_1 + \xi_{10}\right) + k_2\cdot\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}, \tag{25}$$

其中

$$\xi_{10} = \frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1(t)},\quad \xi_1 = k_1x + c_1t + l_1,\quad \xi_2 = k_2x - 3\alpha a^2k_2t + l_2。$$

情况三 $\begin{cases}\Delta_1 < 0,\\ \Delta_2 < 0,\end{cases}$

显然

$$\varphi_1 = M_1\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_1}\xi_1}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2\alpha k_1^3}\xi_1\right) + M_2\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_1}\xi_1}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2\alpha k_1^3}\xi_1\right) + b_1(t), \tag{26}$$

$$\varphi_2 = N_1\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_2}\xi_2}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right) + N_2\mathrm{e}^{-\frac{3a}{2k_2}\xi_2}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_2}}{2\alpha k_2^3}\xi_2\right) + b_2(t), \tag{27}$$

分别为方程(4)和方程(5)的解，其中M_1, M_2, N_1, N_2为任意常数，$b_1(t), b_2(t)$为t的任意函数，将其代入(6)式有

$$-AM_1N_1 + BM_1N_2 + CM_2N_1 - DM_2N_2 = 0, \tag{28}$$

$$-BM_1N_1 - AM_1N_2 + DM_2N_1 + CM_2N_2 = 0, \tag{29}$$

$$-CM_1N_1 + DM_1N_2 - AM_2N_1 + BM_2N_2 = 0, \tag{30}$$

$$DM_1N_1 + CM_1N_2 + BM_2N_1 + AM_2N_2 = 0, \tag{31}$$

其中

$$A = \frac{3a}{8k_1k_2}\left(6a^2 + \frac{\Delta_1}{\alpha^2k_1^4} + \frac{\Delta_2}{\alpha^2k_2^4}\right),\quad B = \frac{\sqrt{-\Delta_2}}{8\alpha k_1k_2^3}\left(15a^2 + \frac{\Delta_1}{\alpha^2k_1^4}\right),$$

$$C = \frac{\sqrt{-\Delta_1}}{8\alpha k_1^3k_2}\left(15a^2 + \frac{\Delta_2}{\alpha^2k_2^4}\right),\quad D = \frac{a\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}{\alpha^2k_1^3k_2^3}。$$

因此方程(2)的精确解为

$$u_3 = a + k_1\cdot\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + k_2\cdot\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}, \tag{32}$$

其中φ_1, φ_2分别为(26)、(27)式，$k_1, k_2, c_1, c_2, a, \alpha$，$M_1, M_2, N_1, N_2$满足(28)~(31)式。

事实上，根据Δ_1, Δ_2的符号不同进行组合，一共有 9 种情况，但是$\begin{cases}\Delta_1 > 0,\\ \Delta_2 = 0,\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_1 > 0,\\ \Delta_2 = 0,\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_1 = 0,\\ \Delta_2 > 0,\end{cases}$ 以及$\begin{cases}\Delta_1 = 0,\\ \Delta_2 = 0,\end{cases}$获得的解的形式与情况一中解的形式相同，$\begin{cases}\Delta_1 < 0,\\ \Delta_2 > 0,\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta_1 = 0,\\ \Delta_2 < 0,\end{cases}$以及$\begin{cases}\Delta_1 < 0,\\ \Delta_2 = 0,\end{cases}$获得的解的形式与情况二中解的形式相

同，这里不再赘述。

4. 结论

实际上，解 u_{11},u_{12},u_{13} 是方程(2)的双孤子解，由于 $\lambda_{11},\lambda_{12}$ 异号，$\lambda_{21},\lambda_{22}$ 异号，使得表达式中 t 的系数不同，即波速不同，所以 u_{11},u_{12},u_{13} 是三个不同的双孤子解；同理，u_{21},u_{22} 是两个不同的复合形式解，这种复合形式的解由双曲正切函数和三角函数组成；u_3 是包含多个任意参数的三角函数解。本文获得的解中都包含多个任意参数，若将参数选为某特殊值，将会得到文献[16]中的部分解。

在解 u_{11} 中，选取

$$a=0，\quad k_1=F_1，\quad k_2=F_2，\quad l_1=F_3，\quad l_2=F_4，$$

$$c_1=-\alpha F_1^3\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)，\quad c_2=-\alpha F_2^3\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)，$$

$$\xi_{10}=\frac{1}{2}\ln\frac{M}{b_1(t)}=\arctan\frac{M_1}{M_2}，\quad \xi_{20}=\frac{1}{2}\ln\frac{N}{b_2(t)}=\arctan\frac{N_1}{N_2}，\tag{33}$$

并利用(9)式，则(10)式变为

$$u_{11}=\frac{F_1\sqrt{\lambda_1^2-4\mu_1}}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-4\mu_1}}{2}\xi_1+\xi_{10}\right)+\frac{F_2\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}\xi_2+\xi_{20}\right),$$

$$\xi_1=F_1x-\frac{\alpha F_1\left[F_1^2\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)+3F_2^2\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)\right]t}{4}+F_3，\quad \xi_{10}=\arctan\frac{M_1}{M_2}，$$

$$\xi_2=F_2x-\frac{\alpha F_2\left[F_2^2\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)+3F_1^2\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)\right]t}{4}+F_4，\quad \xi_{20}=\arctan\frac{N_1}{N_2}，\tag{34}$$

(34)式即为文献[16]中的(13)式。

在解 u_3 中，选取

$$a=0，\quad k_1=F_1，\quad k_2=F_2，\quad l_1=F_3，\quad l_2=F_4，$$

$$c_1=-\frac{\alpha F_1^3\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}{4}，\quad c_2=-\frac{\alpha F_2^3\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}{4}，$$

交换 M_1,M_2 的位置，N_1,N_2 的位置，并利用(28)~(31)式，则(32)式变为

$$u_3=\frac{F_1\sqrt{-\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}}{2}\cdot\frac{M_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}}{2}\xi_1\right)-M_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}}{2}\xi_1\right)}{M_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}}{2}\xi_1\right)+M_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)}}{2}\xi_1\right)}$$

$$+\frac{F_2\sqrt{-\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}}{2}\cdot\frac{N_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}}{2}\xi_2\right)-N_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}}{2}\xi_2\right)}{N_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}}{2}\xi_2\right)+N_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)}}{2}\xi_2\right)},$$

$$\xi_1 = F_1 x - \frac{\alpha F_1\left[F_1^2\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)+3F_2^2\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)\right]t}{16}+F_3,$$

$$\xi_2 = F_2 x - \frac{\alpha F_2\left[F_2^2\left(\lambda_2^2-4\mu_2\right)+3F_1^2\left(\lambda_1^2-4\mu_1\right)\right]t}{16}+F_4, \quad (35)$$

(35)式即为文献[16]中的(14)式。

利用本文的方法可以获得很多非线性偏微分方程的双孤子解、三角函数解，且都是行波解，能否利用该方法得到非行波解还是一个有待解决的问题，有兴趣的读者可以做进一步的研究。

参考文献 (References)

[1] Y. S. Li, W. X. Ma and J. E. Zhang. Darboux transformation of classical Boussinesq system and its new solutions. Physics Letters A, 2000, 275 (1): 60-66.
[2] 屠规彰. Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换与守恒律[J]. 应用数学学报, 1981, 4(1): 63-68.
[3] E. G. Fan. Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for general variable coefficient KdV equations. Physic Letters A, 2002, 294(1): 26-30.
[4] H. A. Zedan. Exact solutions for the generalized KdV equation by using Bäcklund transformations. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348 (8): 1751-1768.
[5] 套格图桑, 斯仁道尔吉. 辅助方程构造(2 + 1)维 Hybrid-Lattice 系统和离散的 mKdV 方程的精确解[J]. 物理学报, 2002, 56(2): 627-636.
[6] H. W. Tam, W. X. Ma, X. B. Hu, et al. The hirota-satsuma coupled KdV equation and a coupled Ito system revisited. Journal of the Physical Society of Japan, 2000, 69(1): 45-52.
[7] C. Z. Qu. Allowed transformation and symmetry classes of variable coefficient Burgers equation. IMA Journal of Applied Mathematics, 1995, 54(3): 203-225.
[8] M. L. Wang, X. Z. Li and J. L. Zhang. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Physics Letters A, 2008, 372: 417-423.
[9] S. Zhang, J.-L. Tong and W. Wang. A generalized (G'/G) -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. Physics Letters A, 2008, 372: 2254-2257.
[10] J. Zhang, X. L. Wei and Y. J. Lu. A generalized (G'/G) -expansion method and its applications. Physics Letters A, 2008, 372: 3653-3658.
[11] S. Zhang, W. Wang and J.-L. Tong. A generalized (G'/G) -expansion method and its application to the (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup equations. Applied Mathematics and Computation, 2009, 209: 399-404.
[12] K. A. Gepreel. A generalized (G'/G) -expansion method to find the traveling wave solutions of nonlinear evolution equations. Journal of Partial Differential Equations, 2011, 24(1): 55-69.
[13] B. Tang, Y. N. Wei and S. L. Wang. Variable-coefficient discrete (G'/G) -expansion method for nonlinear differential-difference equations. Physics Letters A, 2011, 375: 3355-3361.
[14] A. Bansal, R. K.Gupta. Modified (G'/G) -expansion method for finding exact wave solutions of the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, 35(10): 1175-1187.
[15] X. H. Liu, W. G. Zhang and Z. M. Li. Application of Improved (G'/G) -Expansion Method for the Complex KDV Equation. Advanced Science Letters, 2012, 7: 586-588.
[16] J. C. Chen, B. Li. Multiple (G'/G) -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations in mathematical physics. Pramana-Journal of Physics, 2012, 78(3): 375-388.

