Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 207-214
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33031 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Weighted L^p Estimates for the Poisson Equation and Heat Equation*

Qian Miao

Department of Mathematics, College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: 464492636@qq.com

Received: Feb. 27th, 2013; revised: Mar. 21st, 2013; accepted: Apr. 2nd, 2013

Copyright © 2013 Qian Miao. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: L^p estimates for the Poisson equation and heat equation are the most basic regularity estimates. In this paper, we mainly study a new class of regularity estimates, weighted L^p estimates, for the Poisson equation and heat equation.

Keywords: Regularity Estimates; Weighted; L^p Estimates; Sobolev; Poisson Equation; Heat Equation

Poisson 方程与热传导方程的加权 L^p 估计*

苗 钱

上海大学理学院数学系，上海
Email: 464492636@qq.com

收稿日期：2013 年 2 月 27 日；修回日期：2013 年 3 月 21 日；录用日期：2013 年 4 月 2 日

摘 要： Poisson 方程与热传导方程的 L^p 估计是最基本的正则性估计。本文我们主要研究 Poisson 方程与热传导方程的一类新的正则性估计－加权 L^p 估计。

关键词： 正则性估计；加权；L^p 估计；Sobolev；Poisson 方程；热传导方程

1. 引言

二阶椭圆与抛物型方程的 L^p 估计对于偏微分方程理论的发展具有非常重要的作用，已经被很多学者广泛的研究。2003 年，王[1]在 Caffarelli 和 Peral[2]基础上利用极大函数、紧方法、Vitali 覆盖引理等技巧给出了 Poisson 方程和热方程的 L^p 内估计的几何化证明方法。进一步，用类似的技巧 Byun 和王[3-7]在不同的区域中(Reifenberg、Lipschitz 区域等)中得到了各类二阶散度型线性椭圆与抛物型方程的全局 L^p 估计。最近，Mengesha 和 Phuc[8,9]应用类似的技术方法研究了散度型拟线性椭圆问题的加权 L^p 估计。

本文主要研究下述最简单的二阶非散度型椭圆与抛物方程(Poisson 与热传导方程)的加权 L^p 估计

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in B_2 \subset R^n \tag{1.1}$$

和

$$u_t - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_2 \subset R^n \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

*资助信息：国家自然科学基金(11001165)。

这里 $B_r=\{y\in R^n:|y|<r\}$ 是 R^n 中半径为 $r>0$，球心为原点的球，而 $B_r(x)=B_r+x$。此外，$Q_R=B_R\times(-R^2,R^2)$。另外，我们记

$$|D^2u|=\left(\sum_{i,j=1,\cdots,n}|D_{x_ix_j}u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

且

$$\|D^2u\|_{L^p(R^n)}=\sum_{i,j=1,\cdots,n}\|D_{x_ix_j}u\|_{L^p(R^n)}$$

这里 $p>1$ 且

$$\|D_{x_ix_j}u\|_{L^p(R^n)}=\left(\int_{R^n}|D_{x_ix_j}u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}。$$

本文主要目的是得到问题(1.1)与(1.2)解 u 的如下估计

$$\int_{B_1}|D^2u|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\le C\left(\int_{B_2}|D^2u|^2\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}+C\int_{B_2}|f|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x，对任意的\ p>2 \tag{1.3}$$

和

$$\int_{Q_1}|D^2u|^p\,\omega(z)\mathrm{d}z\le C\left(\int_{Q_2}|D^2u|^2\,\omega(z)\mathrm{d}z\right)^{\frac{p}{2}}+C\int_{Q_2}|f|^p\,\omega(z)\mathrm{d}z，对任意的\ p>2 \tag{1.4}$$

这里常数 C 不依赖于 u 和 f。事实上，如果 $\omega\equiv1$，那么上述估计可简化为经典的 L^p 内估计。

现在我们首先介绍一下加权空间的一些概念与性质(见[8-11])。

定义 1.1 假设 $q>1$。我们称权函数 $\omega\in A_q$，如果 $\omega\in L^1_{loc}(R^n)$，$\omega>0$ 几乎处处，且满足下述反 Hölder 不等式

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\omega(x)^{\frac{-1}{q-1}}\right)^{q-1}\le C，$$

对任意 R^n 中的球 B_r。我们记

$$A_\infty=\bigcup_{1<q<\infty}A_q$$

且

$$\omega(\Omega)=\int_\Omega\omega(x)\mathrm{d}x。$$

另外，相应的加权空间 $L^q_\omega(\Omega)$ 是由满足下述条件的全体函数 h 组成

$$\|h\|_{L^q_\omega(\Omega)}=:\left(\int_\Omega|h|^q\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}<\infty。$$

注 1.2

1) 事实上，我们可得 $A_{q_1}\subset A_{q_2}$，这里 $1<q_1\le q_2<\infty$。

2) 如果 $\omega(x)\in A_p$，那么，

$$\omega\left(\{x\in R^n:Mg(x)>\mu\}\right)\le\frac{C}{\mu^p}\int_{R^n}|g(x)|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x。$$

3) 如果 $g(x)\in L^q_\omega$，那么，对任意的 $q>q_2$，有

Copyright © 2013 Hanspub

$$\int_{R^n}|g|^q\,\omega(x)\,\mathrm{d}x = q\int_0^\infty \mu^{q-1}\omega\left(\left\{x\in R^n:|g|>\mu\right\}\right)\mathrm{d}\mu = (q-q_2)\int_0^\infty \mu^{q-q_2-1}\left\{\int_{\left\{x\in R^n:|g|>\mu\right\}}|g|^{q_2}\,\omega(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\mu\text{。}$$

4) 如果 $q>q_1>1$，那么 $L_\omega^q(\Omega)\subset L^{q_1}(\Omega)$。

我们进一步给出一些 A_q 权的性质。

引理 1.3 如果 $\omega\in A_q\ (q>1)$ 且 $B_r\subset B_R\subset R^n$，那么我们有

$$\frac{\omega(B_R)}{\omega(B_r)}\le C\left(\frac{R}{r}\right)^{nq}\text{。}$$

另外，我们也有下列重要的反 Hölder 不等式。

引理 1.4 如果 $\omega\in A_q\ (q>1)$，那么我们有

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\omega(x)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\le C\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\omega(x)\,\mathrm{d}x\text{。}$$

对任意的 R^n 中的球 B_r。

引理 1.5 如果 $\omega\in A_q\ (q>1)$ 且 $B_r\subset B_R\subset R^n$，那么存在一个常数 $\sigma>0$ 使得

$$\frac{\omega(B_r)}{\omega(B_R)}\le C\left(\frac{r}{R}\right)^{n\sigma}\text{。}$$

现在我们来阐述本文的主要结论。

定理 1.6 假设 $\omega\in A_p$ 且 $f\in L_\omega^p(B_2)$。如果 u 满足 Poisson 方程，那么我们可得加权 L^p 估计(1.3)。

定理 1.7 假设 $\omega\in A_p$ 且 $f\in L_\omega^p(Q_2)$。如果 u 满足热传导方程，那么我们可得加权 L^p 估计(1.4)。

注 1.8 本文我们主要用迭代-覆盖技术来证明定理 1.6。实际上，应用完全类似的方法我们可得热传导方程情形的证明。

注 1.9 对于估计式(1.3)中的右端第一项，利用 Hölder 不等式和引理 1.4 我们可得

$$\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^{\frac{2(1+\epsilon)}{\epsilon}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}\left(\int_{B_2}\omega(x)^{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}\le C\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^{\frac{2(1+\epsilon)}{\epsilon}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}\int_{B_2}\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

不失一般性，我们可假设 $2(1+\varepsilon)/\varepsilon<p$。那么，由注 1.2(4)和基本的 L^p 估计，我们可得 $\left|D^2u\right|\in L_\omega^2$。

2. 主要结论的证明

本节我们将完成主要结论：定理 1.6 的证明。通过基本的逼近理论(参见[12-14])，我们不妨假设 $\left|D^2u\right|\in L_{\omega,loc}^p(B_2)$。我们将采用迭代-覆盖技术来证明主要结论。

现在我们记

$$\lambda_0^2=\frac{1}{\omega(B_2)}\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta\omega(B_2)}\int_{B_2}|f|^2\,\omega(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

这里 $\delta\in(0,1)$ 是一个充分小的待定正常数。令

$$f_\lambda=f/(\lambda_0\lambda) \tag{2.2}$$

且

$$J_\lambda[B]=\frac{1}{\omega(B)}\int_B\left|D^2u_\lambda\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta\omega(B)}\int_B\left|f_\lambda\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

对任意的 $\lambda>0$ 和任意的 R^n 中的区域 B。另外，我们把水平集 $E_\lambda(1)$ 定义为

$$E_\lambda(1)=\omega\left(\left\{x\in B_1:\left|D^2u_\lambda\right|>1\right\}\right)。$$

下一步，我们将分解水平集 $E_\lambda(1)$。

引理 2.1 任意给定 $\lambda>\left(C_1 20^{np}\right)^{1/2}\lambda_0$。如果 $\omega(x)\in A_p$，那么存在一族互不相交的球 $\left\{B_{\rho_i}(x_i)\right\}_{i\ge1}$，这里 $x_i\in E_\lambda(1)$ 且 $\rho_i=\rho(x_i)\in\left(0,\dfrac{1}{10}\right)$，使得

$$J_\lambda\left[B_{\rho_i}(x_i)\right]=1,\quad J_\lambda\left[B_\rho(x_i)\right]<1\quad 对任意的\rho>\rho_i，\tag{2.4}$$

且

$$E_\lambda(1)\subset\bigcup_{i\ge1}B_{5\rho_i}(x_i)\cup零测集。\tag{2.5}$$

证明：固定 $x\in B_1$。那么，由于(2.1)，(2.2)和引理 1.3，对任意的 $\rho\in\left[\dfrac{1}{10},1\right]$ 我们可得

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]\le\frac{\omega(B_2)}{\omega(B_\rho(x))}\cdot\left[\frac{1}{\omega(B_2)}\int_{B_2}\left|D^2u_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta\omega(B_2)}\int_{B_2}\left|f_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right]\le C\left(\frac{|B_2|}{\left|B_\rho(x)\right|}\right)^p\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\le C_1 20^{np}\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$$

由于 $\lambda>\left(C_1 20^{np}\right)^{1/2}\lambda_0$，故进一步可得

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]\le1。$$

所以，我们有

$$\sup_{x\in R^n}\sup_{\rho\in\left[\frac{1}{10},1\right]}J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]\le1。\tag{2.6}$$

另外，对几乎处处的 $x\in E_\lambda(1)$，由基本的测度理论我们可得

$$\lim_{\rho\to0}J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]>1。$$

从而存在某个 $\rho>0$ 满足

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]>1。$$

因此，由(2.6)我们可选取 $\rho_x\in\left(0,\dfrac{1}{10}\right]$ 使得

$$J_\lambda\left[B_{\rho_x}(x)\right]=1，\quad J_\lambda\left[B_\rho(x)\right]<1 对任意的 \rho>\rho_x。$$

综上所述，对几乎处处的 $x\in E_\lambda(1)$ 可得存在如上构造的一个球 $B_{\rho_x}(x)$。最后，利用 Vitali 覆盖引理，我们可找到一族互不相交的球 $\left\{B_{\rho_i}(x_i)\right\}_{i\ge1}$ 且满足(2.4)和(2.5)。故，结论得证！

引理 2.2 假设满足跟引理 2.1 同样的条件，那么我们进一步有

$$\omega\left(B_{\rho_i}(x_i)\right)\le2\int_{\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i):\left|D^2u_\lambda\right|^2>1/4\right\}}\left|D^2u_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x+\frac{2}{\delta}\int_{\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i):\left|f_\lambda\right|^2>\delta/4\right\}}\left|f_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x\tag{2.7}$$

证明由(2.3)和(2.4)，我们可知

$$\omega\left(B_{\rho_i}(x_i)\right)=\int_{B_{\rho_i}(x_i)}\left|D^2u_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta}\int_{B_{\rho_i}(x_i)}\left|f_\lambda\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x。$$

 Copyright © 2013 Hanspub

那么，通过如下拆分上面的二个积分，我们可得

$$\omega\left(B_{\rho_i}\left(x_i\right)\right) \le \int_{\left\{x\in B_{\rho_i}\left(x_i\right):\left|D^2u_\lambda\right|^2>1/4\right\}}\left|D^2u_\lambda\right|^2\omega\left(x\right)\mathrm{d}x+\omega\left(B_{\rho_i}\left(x_i\right)\right)\Big/4$$
$$+\frac{1}{\delta}\int_{\left\{x\in B_{\rho_i}\left(x_i\right):\left|f_\lambda\right|^2>\delta/4\right\}}\left|f_\lambda\right|^2\omega\left(x\right)\mathrm{d}x+\omega\left(B_{\rho_i}\left(x_i\right)\right)\Big/4$$

因此，我们可最后得结论(2.7)。

进一步，由上面的引理我们可得下述的结论。

引理 2.3 假设 $1<p_1<2$ 且 $\lambda>\left(C_1 20^{np}\right)^{1/2}\lambda_0$。那么我们可得

$$\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x<C\delta^{\frac{p_1}{2}} \text{ 对任意的 } \rho>\rho_i$$

且

$$\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|D^2u_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x<C \text{ 对任意的 } \rho>\rho_i \text{。}$$

证明：我们这里只证明第一式，第二式同理可证。由引理 2.1，我们得到

$$\frac{1}{\omega\left(B_\rho\left(x_i\right)\right)}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^2\omega\left(x\right)\mathrm{d}x\le\delta \text{ 对任意的 } \rho>\rho_i \tag{2.8}$$

另外，由 Hölder 不等式我们可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\cdot\omega\left(x\right)^{\frac{p_1}{2}}\cdot\omega\left(x\right)^{-\frac{p_1}{2}}\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^2\cdot\omega\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_1}{2}}\left(\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\omega\left(x\right)^{-1\Big/\left(\frac{2}{p_1}-1\right)}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{p_1}{2}}\\
&=\left(\frac{1}{\omega\left(B_\rho\left(x_i\right)\right)}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^2\omega\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_1}{2}}\cdot\left(\frac{\omega\left(B_\rho\left(x_i\right)\right)}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\right)^{\frac{p_1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\omega\left(x\right)^{-1\Big/\left(\frac{2}{p_1}-1\right)}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{p_1}{2}}
\end{aligned}$$

。

因此，应用(2.8)和定义(1.1)可知

$$\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x\le C\delta^{\frac{p_1}{2}}\left[\left(\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\omega\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\frac{1}{\left|B_\rho\left(x_i\right)\right|}\int_{B_\rho\left(x_i\right)}\omega\left(x\right)^{-1\Big/\left(\frac{2}{p_1}-1\right)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p_1}-1}\right]^{\frac{p_1}{2}}\le C\delta^{\frac{p_1}{2}},$$

对任意的 $\rho>\rho_i$，因为 $A_{2/p_1}\subset A_2\subset A_p$。故，我们完成证明。

最后，我们将完成主要结论：定理 1.6 的证明。

证明：固定 $i\ge1$，现在我们引入 v 为下述参照方程的解

$$\begin{cases}-\Delta v=0, & x\in B_{10\rho_i}\left(x_i\right),\\ v=u_\lambda, & x\in\partial B_{10\rho_i}\left(x_i\right)\text{。}\end{cases}$$

令 $\omega = u_\lambda - v$。那么，ω 满足 $-\Delta\omega = f_\lambda$，$x \in B_{10\rho_i}(x_i)$ 和边界条件 $\omega = 0$，$x \in \partial B_{10\rho_i}(x_i)$。那么，利用基本的 L^p 估计与引理 2.3 我们得

$$\frac{1}{\left|B_{10\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{10\rho_i}(x_i)}\left|D^2\omega\right|^{p_1}\mathrm{d}x \le C\frac{1}{\left|B_{10\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{10\rho_i}(x_i)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x \le C\delta^{\frac{p_1}{2}} \le C。\tag{2.9}$$

进一步，由(2.9)可得

$$\frac{1}{\left|B_{10\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{10\rho_i}(x_i)}\left|D^2v\right|^{p_1}\mathrm{d}x \le 2^{p-1}\left\{\frac{1}{\left|B_{10\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{10\rho_i}(x_i)}\left|D^2\omega\right|^{p_1}\mathrm{d}x + \frac{1}{\left|B_{10\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{10\rho_i}(x_i)}\left|D^2u_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x\right\} \le C。$$

故，由基本的 $W_{loc}^{2,\infty}$ 正则性理论可得

$$\sup_{B_{5\rho_i}(x_i)}\left|D^2v\right| \le N_1,\tag{2.10}$$

这里 $N_1 > 1$。取 $\mu = \lambda\lambda_0$，那么，利用(2.2)，(2.9)和(2.10)，我们可得

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2u_\lambda\right|>2N_1\right\}\right| \\
&\le \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2\omega\right|>N_1\right\}\right| + \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2v\right|>N_1\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2\omega\right|>N_1\right\}\right| \le \frac{1}{N_1^{p_1}}\int_{B_{5\rho_i}(x_i)}\left|D^2\omega\right|^{p_1}\mathrm{d}x \\
&\le \int_{B_{5\rho_i}(x_i)}\left|f_\lambda\right|^{p_1}\mathrm{d}x \le C\delta^{\frac{p_1}{2}}\left|B_{\rho_i}(x_i)\right|
\end{aligned}$$

故，考虑到引理 1.5，可得

$$\omega\left(\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right) \le C\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}\omega\left(B_{\rho_i}(x_i)\right)。$$

进一步，利用引理 2.2 和(2.2)，可得

$$\omega\left(\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right) \le \frac{C\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}}{\mu^2}\left(\int_{\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i):\left|D^2u\right|^2>\mu^2/4\right\}}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\int_{\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i):|f|^2>\mu^2\delta/4\right\}}|f|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)。$$

考虑到球族 $\left\{B_{\rho_i}(x_i)\right\}$ 互不相交性与

$$\bigcup_{i\ge1}B_{5\rho_i}(x_i)\cup\text{零测集}\supset E_\lambda(1)=\left\{x\in B_1:\left|D^2u_\lambda\right|>1\right\},$$

故对任意的 $\lambda > \left(C_1 20^{np}\right)^{1/2}\lambda_0$，我们可得

$$\begin{aligned}
\omega\left(\left\{x\in B_1:\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right) &\le \sum_{i=1}^{\infty}\omega\left(\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right) \\
&\le \frac{C\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}}{\mu^2}\left(\int_{\left\{x\in B_2:\left|D^2u\right|^2>\mu^2/4\right\}}\left|D^2u\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\delta}\int_{\left\{x\in B_2:|f|^2>\mu^2\delta/4\right\}}|f|^2\mathrm{d}x\right)
\end{aligned},\tag{2.11}$$

那么，利用注 1.2 我们计算得

 Copyright © 2013 Hanspub

$$\begin{aligned}\int_{B_1}\left|D^2u\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x&=p\int_0^\infty\mu^{p-1}\omega\left(\left\{x\in B_1:\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right)\mathrm{d}\left[2N_1\mu\right]\\&=p\left\{\int_0^{\lambda_0}+\int_{\lambda_0}^\infty\right\}\mu^{p-1}\omega\left(\left\{x\in B_1:\left|D^2u\right|>2N_1\mu\right\}\right)\mathrm{d}\left[2N_1\mu\right]\\&=:J_1+J_2\end{aligned}$$

J_1 的估计。由 J_0 的定义，我们可得

$$J_1\le C\omega(B_1)\lambda_0^p\le C\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x+\int_{B_2}|f|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}\le C\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}+C\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

上面我们用到了

$$\left(\int_{B_2}|f|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}=\left(\int_{B_2}|f|^2\omega(x)^{\frac{2}{p}}\omega(x)^{1-\frac{2}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}\le C\left(\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B_2}\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{2}}\le C\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

J_2 的估计。利用(2.11)，可得

$$\begin{aligned}J_2&\le C\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}\int_0^\infty\mu^{p-3}\left\{\int_{\left\{x\in B_2:\left|D^2u\right|^2>\mu^2/4\right\}}\left|D^2u\right|^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\left[\phi(2N_1\mu)\right]+C\int_0^\infty\mu^{p-3}\left\{\int_{\left\{x\in B_2:|f|^2>\mu^2\delta/4\right\}}|f|^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\left[\phi(2N_1\mu)\right],\\&\le C_2\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}\int_{B_2}\left|D^2u\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x+C_3\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这里 $C_2=C_2(n)$ 且 $C_3=C_3(n,\delta)$。因此，结合 J_1 和 J_2 的估计，我们可得

$$\int_{B_1}\left|D^2u\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le C\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}+C\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x+C_5\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}\int_{B_2}\left|D^2u\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

最后，选取合适的 $\delta>0$ 满足 $C_2\delta^{\frac{p_1\sigma}{2}}<1/2$，然后利用基本的迭代引理(参见[15]，第 2 节中引理 4.1 或[16]，第 3 节中引理 2.1)，吸收上式右端的第三个积分，从而可得

$$\int_{B_1}\left|D^2u\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le C\left(\int_{B_2}\left|D^2u\right|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}+C\int_{B_2}|f|^p\omega(x)\mathrm{d}x$$

故，可得结论的证明。

参考文献 (References)

[1] L. Wang. A geometric approach to the Calderon-Zygmund estimates. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2003, 19(2): 381-396.

[2] L. A. Caffarelli, I. Peral. On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1998, 51(1): 1-21.

[3] S. Byun, L. Wang. Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(10): 1283-1310.

[4] S. Byun, L. Wang. L^p estimates for parabolic equations in Reifenberg domains. Journal of Functional Analysis, 2005, 223(1): 44-85.

[5] S. Byun, L. Wang. Parabolic equations in Reifenberg domains. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2005, 176: 271-301.

[6] S. Byun, L. Wang. Parabolic equations in time dependent Reifenberg domains. Advances in Mathematics, 2007, 212(2): 797-818.

[7] S. Byun, L.Wang. Quasilinear elliptic equations with BMO coefficients in Lipschitz domains. Transactions of the American Mathematical Society, 2007, 359(12): 5899-5913.

[8] T. Mengesha, N. Phuc. Weighted and regularity estimates for nonlinear equations on Reifenberg flat domains. Journal of Differential Equations, 2011, 250(5): 2485-2507.

[9] T. Mengesha, N. Phuc. Global estimates for quasilinear elliptic equations on Reifenberg flat domains. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2012, 203(1): 189-216.

[10] E. M. Stein. Harmonic analysis. Princeton: Princeton University Press, 1993.

[11] 周民强. 调和分析讲义(实变函数)[M]. 北京：北京大学出版社, 2003.

[12] E. Acerbi, G. Mingione. Gradient estimates for a class of parabolic systems. Duke Mathematical Journal, 2007, 136: 285-320.

[13] S. Byun, F. Yao and S. Zhou. Gradient estimates in Orlicz space for nonlinear elliptic equations. Journal of Functional Analysis, 2008, 255(8): 1581-1873.

[14] L. Wang, F. Yao, S. Zhou and H. Jia. Optimal regularity for the Poisson equation. Proceedings of the American Mathematical Society, 2009,

137(6): 2037-2047.
[15] Y. Chen, L. Wu. Second order elliptic partial differential equations and elliptic systems. Providence: American Mathematical Society, 1998.
[16] M. Giquinta. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton: Princeton University Press, 1983.

 Copyright © 2013 Hanspub