Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 368-373
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36056 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Uniqueness of Differential Polynomials Sharing Two Values

Caiping Zhuo[1], Zanchun Wang[2], Qiuying Li[1]

[1]College of Science, China University of Petroleum, Qingdao
[2]Dongying Vocational College, Dongying
Email: 13310678675@163.com

Received: Sep. 25th, 2013; revised: Oct. 7th, 2013; accepted: Oct. 10th, 2013

Abstract: This paper is devoted to studying the uniqueness problem on meromorphic functions whose differential polynomials share two values. By using the notion of multiplicity, we obtain two theorems which improve the previous results.

Keywords: Meromorphic Functions; Uniqueness; Common Value

具有公共值微分多项式的唯一性

禚彩萍[1]，王赞春[2]，李秋颖[1]

[1]中国石油大学理学院，青岛
[2]东营职业学院，东营
Email: 13310678675@163.com

收稿日期：2013 年 9 月 25 日；修回日期：2013 年 10 月 7 日；录用日期：2013 年 10 月 10 日

摘　要：本文研究了亚纯函数的微分多项式分担两个值的唯一性问题。利用重数的概念，得到了两个定理，其结果推广了前人的有关定理。

关键词：亚纯函数；唯一性；公共值

1. 引言

本文中的亚纯函数均指整个复平面上的亚纯函数，采用 Nevanlinna 理论的标准记号，其中

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta$$

是$\left|f(z)\right|$的正对数在$|z|=r$上的平均值；

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{d}t+n(0,f)\log r,$$

这里$n(t,f)$表示$f(z)$在$|z|\le t$上的极点个数，且重级极点按重数计算，$n(0,f)$表示$f(z)$在原点处极点的重数，$\bar{n}(t,f)$表示重级极点只计一次时$f(z)$在$|z|\le t$上的极点个数，分别记$N(r,f)$和$\bar{N}(r,f)$为$f(z)$极点的计数函数和精简计数函数，$N_k(r,f)$表示 f 的极点重数为 k 的计数函数(k 为正整数)；且$S(r,f)$表示任何满足$S(r,f)=o\{T(r,f)\}$(当$r\to\infty$时)的函数(见[1,2])。设 a 是复数，若 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同(计重数)，则称 a

为 f 和 g 的 CM 公共值；若 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同(不计重数)，则称 a 为 f 和 g 的 IM 公共值[2]。设 z_0 是 f 和 $f^{(k)}$ 的公共 1 值点，重数分别为 p,q。$\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$ 表示当 $p>q$ 时 f 的 1 值点的计数函数(不计重数)，$N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$ 表示当 $p=q=1$ 时，$f-1$ 的零点的计数函数；$N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$ 表示当 $p=q\geq 2$ 时，$f-1$ 的零点的计数函数；类似地，定义 $\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)$ 和 $N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)$，$N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)$。

1996 年，Fang 和 Hua[3]讨论了 f^nf' 和 g^ng' CM 分担 1 时的唯一性问题，其中 f 和 g 为非常数整函数。Yang 和 Hua 考虑了亚纯函数的情形，并证明了[4]：

定理 A 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，$n\geq 11$ 为整数。如果 f^nf' 和 g^ng' 分担非零数 a CM，则 $f\equiv dg$，其中 $d^{n+1}=1$ 或者 $g=c_1\mathrm{e}^{cz}, f=c_2\mathrm{e}^{-cz}$ 这里常数 c,c_1,c_2 满足 $\left(c_1c_2\right)^{n+1}c^2=-a^2$。

最近，Dyavanal 引入了重数的概念，得到了[5]：

定理 B 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点和极点的重级至少为 s，$n\geq 2$ 为整数，且 $(n+1)s\geq 12$。如果 f^nf' 和 g^ng' 分担 1CM，则 $f\equiv dg$，其中 $d^{n+1}=1$ 或者 $g=c_1\mathrm{e}^{cz}, f=c_2\mathrm{e}^{-cz}$ 这里常数 c,c_1,c_2 满足 $\left(c_1c_2\right)^{n+1}c^2=-1$。

2012 年，Cao 和 Zhang[6]推广了以上定理，证明了：

定理 C 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点的重级至少为 k，整数 n 满足 $n>\max\left\{2k-1,k+\frac{4}{k}+4\right\}$。如果 $f^nf^{(k)}$和$g^ng^{(k)}$ 分担 1 CM，f和g 分担 ∞ IM，则 $f^nf^{(k)}\equiv g^ng^{(k)}$ 或者 $g=c_1\mathrm{e}^{dz}, f=c_2\mathrm{e}^{-dz}$ 这里常数 d,c_1,c_2 满足 $(-1)^k\left(c_1c_2\right)^{n+1}d^{2k}=-1$。

设 f 和 g 是非常数亚纯函数，为方便起见，令 $F=f^{l_0}\left(f'\right)^{l_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{l_k}$，$G=g^{l_0}\left(g'\right)^{l_1}\cdots\left(g^{(k)}\right)^{l_k}$，$l_0$，$k$ 为正整数，$l_1,\cdots,l_k$ 为自然数，且至少有一个不为零。本文讨论了单项式[7]的唯一性问题，证明了如下结论：

定理 1 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点和极点的重级分别至少为 S_1，S_2。如果 F 和 G 分担 1 CM，f 和 g 分担 ∞ IM，且 $l_0,\cdots,l_k$ 满足

$$l_0>4/s_1+\left[3+\sum_{i=2}^{k}(i-1)l_i\right]\Big/s_2+2\sum_{i=1}^{k}l_i,$$

则 $F\equiv G$ 或者 $f=c_1\mathrm{e}^{-cz}, g=c_2\mathrm{e}^{cz}$，其中常数 c_1,c_2,c 满足 $\left(-c^2\right)^{\sum_{i=1}^{k}l_i}\left(c_1c_2\right)^{\sum_{j=0}^{k}l_j}=1$。

由定理 1，可得到

推论 1 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点的重级至少为 s_1。如果 F 和 G 分担 1CM，整数 $l_0,\cdots,l_k$ 满足 $l_0>\frac{4}{s_1}+2\sum_{i=1}^{k}l_i$，则 $F\equiv G$ 或者 $f=c_1\mathrm{e}^{-cz}, g=c_2\mathrm{e}^{cz}$，其中常数 c_1,c_2,c 满足

$$\left(-c^2\right)^{\sum_{i=1}^{k}l_i}\left(c_1c_2\right)^{\sum_{j=0}^{k}l_j}=1.$$

定理 2 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点和极点的重级分别至少为 s_1,s_2。如果 F 和 G 分担 1 CM，f 和 g 分担 ∞ IM，且 $l_0,\cdots,l_k$ 满足

$$\left\{l_0-4/s_1-2\sum_{j=1}^{k}l_j-3k-3-\left[6+3\sum_{i=1}^{k}l_i\right]\Big/s_2\right\}>0,$$

则定理 1 的结论成立。

由定理 2，可得到

推论 2 设 f 和 g 是非常数亚纯函数，其零点的重级至少为 s_1，如果 F 和 G 分担 1 IM，且 $l_0,\cdots,l_k$ 满足 $\left\{l_0-4/s_1-2\sum_{j=1}^{k}l_j-3k-3\right\}>0$，则定理 1 的结论成立。

2. 主要引理

引理 1[2] 设 f 是一非常数亚纯函数，对于正整数 k，则下面的不等式成立：

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)$$

利用[2, p.365-368]中的定理 7.2 或者[8]中的方法可以证明：

引理 2 设 f，g 是非常数亚纯函数，若 f，g 分担 1 CM，∞ IM，则下列三种情形之一成立：

1) $T(r,f)\le N_2(r,1/f)+N_2(r,1/g)+3\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)$；

2) $f\equiv g$；

3) $fg\equiv 1$。

引理 3[9] 设 f 是一非常数亚纯函数，则对于正整数 k，p 有

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f) \tag{2.1}$$

引理 4 设 f，g 是非常数亚纯函数，若 f，g 分担 1 CM，∞ IM，则下列三种情形之一成立：

1) $T(r,f)\le N_2(r,1/f)+N_2(r,1/g)+2\bar{N}(r,1/f)+\bar{N}(r,1/g)+6\bar{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)$；

2) $f\equiv g$；

3) $fg\equiv 1$。

证明：令

$$H(z)=\left(\frac{f''}{f}-2\frac{f'}{f-1}\right)-\left(\frac{g''}{g}-2\frac{g'}{g-1}\right) \tag{2.2}$$

假设 $H(z)\not\equiv 0$，由对数导数引理知道 $m(r,H)=S(r,f)+S(r,g):=S(r)$。若 z_0 是 $f-1$和$g-1$ 公共单零点，则 $H(z_0)=0$。于是

$$N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{H}\right)\le N(r,H)+S(r,f)+S(r,g) \tag{2.3}$$

而由(2.2)得

$$N(r,H)\le \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar{N}(r,f)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 表示 f' 的零点，但不是 $f(f-1)$ 的零点的计数函数，$\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 表示 $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 的精简形式。类似地，定义 $N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$ 和 $\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$。显然

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)=N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)$$

再根据(2.3)和(2.4)得

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le{}& \bar{N}(r,f)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\\&+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\bar{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+S(r)\end{aligned} \tag{2.5}$$

考虑到 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le T\left(r,g\right)+S\left(r,g\right)$，把上式代入(2.5)，得

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le \bar{N}\left(r,f\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)$$
$$+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+T\left(r,g\right)+S\left(r,f\right)+S\left(r,g\right),$$

再由第二基本定理，有

$$T\left(r,f\right)\le N_2\left(r,f\right)+N_2\left(r,g\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+S\left(r,f\right)+S\left(r,g\right)。$$

由上述不等式，得

$$T\left(r,f\right)\le 3\bar{N}\left(r,f\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+S\left(r\right) \tag{2.6}$$

由引理 3，得

$$\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)\le N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)$$

由此

$$\begin{aligned}2\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)&\le 2N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)\\&\le N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

类似地，有

$$\bar{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar{N}_2\left(r,\frac{1}{g}\right)\le N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,g\right)+S\left(r,g\right) \tag{2.8}$$

把(2.7)和(2.8)代人(2.6)，得关系式(1)。

若 $H\left(z\right)\equiv 0$.积分得

$$\frac{1}{f-1}=A\frac{1}{g-1}+B, \tag{2.9}$$

其中 $A\ne 0,B$ 为常数。由(2.9)，得 f 和 g 分担 $1\mathrm{CM}$，再由引理 2，引理 4 成立。

3. 定理的证明

3.1. 定理 1 的证明

设 $F=f^{l_0}\left(f'\right)^{l_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{l_k}$， $G=g^{l_0}\left(g'\right)^{l_1}\cdots\left(g^{(k)}\right)^{l_k}$，则 F 和 G 分担 $1\mathrm{CM}$， $\infty\mathrm{IM}$。为方便，令 $S\left(r\right)=S\left(r,f\right)+S\left(r,g\right)$。于是 F 和 G 满足引理 2 中的三种关系之一。

情形 1。假设

$$T\left(r,F\right)\le N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+3\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r\right) \tag{3.1}$$

显然，有

$$N(r,F)=\left(\sum_{j=0}^{k}l_j\right)N(r,f)+\left(\sum_{j=1}^{k}jl_j\right)\bar{N}(r,f) \tag{3.2}$$

根据 F ， G 的表达式和引理 1，得

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\le\left(\sum_{j=0}^{k}n_j\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(\sum_{j=1}^{k}jn_j\right)\bar{N}(r,f)+S(r,f) \tag{3.3}$$

其中 $n_j=\min(2,l_j), j=0,1,\cdots,k$ 。再注意到

$$\begin{aligned}l_0m(r,f)&=m\left(r,\frac{F}{(f')^{l_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{l_k}}\right)\le m(r,F)+\sum_{j=1}^{k}l_jm\left(r,\frac{1}{f^{(j)}}\right)\\&\le T(r,F)-N(r,F)+\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\right)T(r,f)+\left(\sum_{j=1}^{k}jl_j\right)\bar{N}(r,f)-\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{f^{(j)}}\right)+S(r,f)\end{aligned} \tag{3.4}$$

再根据(3.1)~(3.4)和引理 1，得

$$\left\{l_0-\sum_{j=1}^{k}l_j\right\}T(r,f)\le T(r,F)-N(r,F)+l_0N(r,f)+\left(\sum_{j=1}^{k}jl_j\right)\bar{N}(r,f)-\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{f^{(j)}}\right)+S(r,f)$$

于是，得到

$$\begin{aligned}&\left\{l_0-\sum_{j=1}^{k}l_j\right\}T(r,f)\\&\le N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+3\bar{N}(r,F)-\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\right)N(r,f)-\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{f^{(j)}}\right)+S(r,f)\\&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{g}\right)+\sum_{j=1}^{k}jl_j\bar{N}(r,g)+3\bar{N}(r,f)-\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\right)N(r,f)+S(r)\end{aligned} \tag{3.5}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\left\{l_0-\sum_{j=1}^{k}l_j\right\}T(r,g)\\&\le N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+3\bar{N}(r,G)-\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\right)N(r,g)-\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{g^{(j)}}\right)+S(r,g)\\&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\sum_{j=1}^{k}l_jN\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k}jl_j\bar{N}(r,f)+3\bar{N}(r,g)-\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\right)N(r,g)+S(r)\end{aligned} \tag{3.6}$$

因为 f 和 g 零点和极点的重级至少为 s_1,s_2 ，利用(3.5)和(3.6)得

$$\left\{l_0-2\sum_{j=1}^{k}l_j\right\}\left[T(r,f)+T(r,g)\right]\le\left\{\frac{4}{s_1}+\frac{1}{s_2}\left[3+\sum_{i=2}^{k}(i-1)l_i\right]\right\}\left[T(r,f)+T(r,g)\right]+S(r) \tag{3.7}$$

注意到 $l_0>4/s_1+\left[3+\sum_{i=2}^{k}(i-1)l_i\right]\Big/s_2+2\sum_{i=1}^{k}l_i$ ，于是(3.7)不成立。

情形 2。若 $F\equiv G$ ，即得定理 1 的结论。

情形 3。若 $FG\equiv 1$ 。可设 $f=\mathrm{e}^{\alpha},g=\mathrm{e}^{\beta}$ ，其中 α,β 为非常数整函数。区分两种情形进行讨论：

情形 3.1。当 $k=1$ 时，由 $f^{l_0}(f')^{l_1}g^{l_0}(g')^{l_1}\equiv 1$ ，得

$$(\alpha'\beta')^{l_0}\,\mathrm{e}^{(l_0+l_1)(\alpha+\beta)}\equiv 1 \tag{3.8}$$

由(3.8)我们知道 $\alpha' = \mathrm{e}^{\gamma}, \beta' = \mathrm{e}^{\delta}$，其中 γ, δ 为整函数.于是

$$\mathrm{e}^{l_1(\gamma+\delta)+(l_0+l_1)(\alpha+\beta)} \equiv 1 \tag{3.9}$$

对(3.9)两边求导数，得

$$l_1(\gamma' + \delta') + (l_0 + l_1)(\mathrm{e}^{\gamma} + \mathrm{e}^{\delta}) = 0 \tag{3.10}$$

根据(3~10)，利用[10, p.2991]中的方法，可以证明 $\gamma' + \delta' \equiv 0$。即 $\gamma + \delta$ 恒为常数，这时 $\alpha'\beta' = \mathrm{e}^{\gamma+\delta}$ 恒为常数。由(3.9)，得 $\alpha + \beta \equiv 0$，再由(3.8)得 $\left(-\alpha'^2\right)^{l_1} \equiv 1$。令 $\alpha' = c$，从而 $f = \mathrm{e}^{cz+d}$，$g = \mathrm{e}^{-cz-d}$，其中 $c(\neq 0), d$ 为常数。

情形 3.2。当 $k \geq 2$ 时，由 $f^{l_0}(f')^{l_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{l_k} g^{l_0}(g')^{l_1}\cdots\left(g^{(k)}\right)^{l_k} \equiv 1$，[1, p.74]中定理 3.10 得 $f = \mathrm{e}^{az+b}$，$g = \mathrm{e}^{cz+d}$，这里 a,b,c,d 为常数。令 $f = c_1\mathrm{e}^{az}, g = c_2\mathrm{e}^{cz}$，则 $f = c_1\mathrm{e}^{-cz}, g = c_2\mathrm{e}^{cz}$，其中 c_1, c_2, c 满足 $\left(-c^2\right)^{\sum_{i=1}^{k} l_i}(c_1c_2)^{\sum_{j=0}^{k} l_j} = 1$，定理 1 证毕。

3.2. 定理 2 的证明

设 $F = f^{l_0}(f')^{l_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{l_k}$，$G = g^{l_0}(g')^{l_1}\cdots\left(g^{(k)}\right)^{l_k}$，则 F 和 G 分担 1CM，分担 ∞IM。为了方便起见，令 $S(r) = S(r,f) + S(r,g)$，于是 F 和 G 满足引理 4 中的三种关系之一。同理，类似于定理 1 的证明，可得定理 2，证毕。

4. 致谢

本文作者感谢张凤荣和吕巍然老师的帮助！“中央高校基本科研业务费专项资金资助(No. 14CX02012A)”。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic function. Clarendon Press, Oxford.
[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness theory of meromorphic functions. Kluwer, Dordrecht.
[3] Fang, M.L. and Hua, X.H. (1996) Entire functions that share one value. *Journal of Nanjing University Mathematics Biquarterely*, **13**, 44-48.
[4] Yang, C.C. and Hua, X.H. (1997) Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, **22**, 395-406.
[5] Dyavanal, R.S. (2011) Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **374**, 335-345.
[6] Cao, Y.H. and Zhang, X.B. (2012) Uniqueness of meromorphic functions sharing two values. *Journal of Inequalities and Applications*, **1**, 100.
[7] 王清河, 常秦, 吕巍然 (2006) 微分单项式的值分布. *中国石油大学学报*, **30**, 135-137.
[8] Yi, H.X. (1995) Meromorphic functions that share one or two values. *Complex Variables*, **28**, 1-11.
[9] Zhang, Q.C. (2005) Meromorphic functions that share one small function with its derivative. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **6**, Art.116.
[10] Zhang, T.D. and Lü, W.R. (2008) Uniqueness theorems on meromorphic functions sharing one value. *Computers and Mathematics with Applications*, **55**, 2981-2992.