Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 21-23
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41004 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A New Inequality Derivates from a Classical Triangle Inequality

Xiaowei Xu

Ningbo Binhai School, Ningbo
Email: lampminket@263.net

Received: Dec. 20th, 2013; revised: Jan. 4th, 2014; accepted: Jan. 9th, 2014

Abstract: In present paper, we derived two new inequalities from a classical triangle fractional inequality "if $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, then $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$", by use of the fundamental inequality and mathematical analysis techniques.

Keywords: Fractional Inequality; Triangle Inequality

一个三角不等式的衍生不等式

徐小伟

宁波滨海学校，宁波
Email: lampminket@263.net

收稿日期：2013 年 12 月 20 日；修回日期：2014 年 1 月 4 日；录用日期：2014 年 1 月 9 日

摘　要：本文通过对经典三角分式不等式“若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则有$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$”的代数推广，得到了两组较新的不等式，在证明的过程中充分用到了基本不等式和数学分析的技巧。

关键词：分式不等式；三角不等式

1. 引言

文[1-3]给出了一个三角不等式，若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则有

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} \tag{1}$$

的几种证明，并对它进行了适当的派生。本文试图从(1)的另一个角度得到两个衍生不等式，当作不等式(1)的“姊妹”不等式。

命题 1：若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则有

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}>\frac{\beta^2}{\alpha^2} \tag{2}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}>\frac{2\beta}{\alpha} \tag{3}$$

说明：上面的不等式(3)可由不等式(2)直接得到，这里只要注意到

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\ge 2\sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}>\frac{2\beta}{\alpha}$$ 即可。

下面主要证明不等式(2)。

不等式(2)的证明：

构造函数 $g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2\cos x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，下面证明 $g(x)$ 为增函数。

事实上由 $g(x)=\tan x\cdot\frac{\sin x}{x^2}$，则

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{x^2}+\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)'\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x}{x^2\cos^2 x}+\left(\frac{\cos x}{x^2}-\frac{2\sin x}{x^3}\right)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\
&=\frac{\sin x}{x^3\cos^2 x}\left(x+x\cos^2 x-2\sin x\cos x\right)>\frac{\sin x}{x^3\cos^2 x}\left(\sin x+\sin x\cos^2 x-2\sin x\cos x\right)\\
&=\frac{\sin^2 x}{x^3\cos^2 x}\left(1+\cos^2 x-2\cos x\right)=\frac{\sin^2 x\left(1-\cos x\right)^2}{x^3\cos^2 x}\ge 0,
\end{aligned}$$

上面第一个不等式用到

Jordan 不等式 $x>\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，从而证得 $y=g(x)$ 为增函数。

于是由命题的条件 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 有 $g(\alpha)<g(\beta)$ 整理得命题 1。

自然地，我们有下面的命题 2 是成立。

命题 2：对于 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，对 $a\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$，都有

$$\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^a\cdot\left(\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right)^{1-a}>\frac{\beta}{\alpha} \tag{4}$$

$$a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+(1-a)\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}>\frac{\beta}{\alpha} \tag{5}$$

说明：若令 $a=\frac{1}{2}$，则上面的不等式就成为命题 1 的不等式，从而可看作命题 1 的推广。

对于 $a\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 时，则上面的不等式一般不成立。

证明：构造函数 $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x\cos^{1-a}x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则易得

$$\varphi'(x)=\frac{\cos^{-a}x}{\left(x\cos^{1-a}x\right)^2}\left(x\cos^2 x-\sin x\cos x+(1-a)x\sin^2 x\right)$$，不妨令

$\varphi'(x)\ge 0$ 恒成立，则有 $1-a\ge\frac{\sin x\cos x-x\cos^2 x}{x\sin^2 x}=\phi(x)$ 恒成立，

这里说明 $\phi(x)$ 是 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的减函数，从而 $1-a\ge\lim_{x\to0}\phi(x)$，两次运用洛必达法则易得 $\lim_{x\to0}\phi(x)=\frac{1}{3}$，从而 $1-a\ge\frac{1}{3}$ 即 $0<a\le\frac{2}{3}$。从而 $y=\varphi(x)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 当 $a\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 时为增函数。因此 $\varphi(\beta)>\varphi(\alpha)$ 整理即得不等式(4)。不等式(5)可由加权平均值不等式

"若 $x,y>0,a\in(0,1)$，则 $ax+(1-a)y\ge x^a y^{1-a}$" 结合不等式(4)直接得到。

下面证明 $\phi(x)$ 是减函数。

这里需要用到两个引理。

引理 1： 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\tan x\sin^2 x>x^3$

证明： 构造函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos^{-\frac{1}{3}}x-x$，则 $f(0)=0$

由 $f'(x)=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1$，又 $f''(x)=\frac{4}{9}\sin^3 x\cos^{-\frac{7}{3}}x>0$，从而 $f'(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，故 $f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，所以 $f(x)>f(0)=0$ 即 $\sin x\cdot\cos^{-\frac{1}{3}}x-x>0$ 整理即得引理 1。

引理 2： 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}>2$

证明： 由

$$\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}+1-1\ge\frac{\tan x}{x}+2\sqrt{\frac{\sin^2 x}{x^2}\times1}-1=\frac{\tan x}{x}+\frac{2\sin x}{x}-1$$
$$=\frac{\tan x+\sin x+\sin x}{x}-1\ge\frac{3\cdot\sqrt[3]{\tan x\sin^2 x}}{x}-1>\frac{3x}{x}-1=2$$

其中上面倒数第二个不等式用到引理 1。

$y=\phi(x)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 单调性的证明：

由 $\phi(x)=\frac{1}{x}\cdot\cot x-\cot^2 x$，

则 $\phi'(x)=-\frac{1}{x^2}\cot x-\frac{1}{x}\frac{1}{\sin^2 x}-2\cot x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{\cos x}{\sin^3 x}\left(2-\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\tan x}{x}\right)<0$，

最后一个不等式用到引理 2。

参考文献 (References)

[1] 秦庆雄，范花妹 (2010) 一个优美不等式的直观证明. *数学通讯*, **11**, 40.

[2] 张赟 (2011) 谈一个优美不等式的"姊妹"式. *数学通讯*, **5**, 39-40.

[3] 胡佳荣，陈国刚 (2012) 四论一个优美不等式. *数学通讯*, **8**, 41-42.