Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 24-30
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41005 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Series of Almost Monotonicity and Alternating Series Rearrangement

Shiyou Lin, Tao Chen

School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou
Email: linsy1111@aliyun.com, 510943143@qq.com

Received: Dec. 16th, 2013; revised: Dec. 26th, 2013; accepted: Dec. 30th, 2013

Abstract: Alternating series is a focal and difficult point in the mathematical analysis. It mainly includes the convergence theorems and the certification process. This paper focuses on discussing the relationships between the rearrangement and the alternating series. Through the definition of almost monotonicity of series, the study explores in what conditions that a convergent alternating series still be convergent when it is rearranged, and gives relevant proof.

Keywords: Series; Almost Monotonic; Alternating Series; Leibniz Criterion

数列的几乎单调性和交错级数的重排

林诗游，陈　韬

海南师范大学数学与统计学院，海口
Email: linsy1111@aliyun.com, 510943143@qq.com

收稿日期：2013 年 12 月 16 日；修回日期：2013 年 12 月 26 日；录用日期：2013 年 12 月 30 日

摘　要：交错级数是数学分析的重点和难点，主要内容包括交错级数的收敛定理和证明过程。本文主要讨论交错级数的重排和数列之间的关系，通过给出数列的几乎单调性的定义来探究一个已收敛的交错级数在何种条件下重排之后依然收敛，并且给出相关证明。

关键词：数列；几乎单调性；交错级数；莱布尼茨判别法

1. 引言

什么是极限的两大基本问题？一个是极限存在的判定，另外一个是极限的求值。通常来说，只要知道了极限存在，总有办法求出极限，哪怕是很复杂。因此极限存在的判定就尤为重要。在数学分析中，我们学习了莱布尼茨的判别法，莱布尼茨判别法是一个非常重要的判别交错级数是否收敛的主要办法。但是，莱布尼茨判别法也有自己的局限性，不是对任何交错级数都有效。莱布尼茨判别法是交错级数收敛的充分条件，而不是充分必要条件。在参考了大量的相关文献之后[1-6]，我们发现数列的几乎单调性和交错级数重排有着密不可分的关系。本文主要研究数列的几乎单调性和交错级数重排之间的关系，探究在何种情况下交错级数重排之后依然收敛，以及把数列的几乎单调性推广到 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法，并证明 Dirichlet 判别法的扩充定理和 Abel 判别法的扩充定理。

2. 数列几乎单调性

定义 1[7]：若数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件：存在正整数 N_0，对任意正整数 m，当 $n>m+N_0$ 时，都有 $a_n \ge a_m\left(a_n \le a_m\right)$，则数列 $\{a_n\}$ 几乎单调增加(减小)。

例如： $3,2,5,4,\cdots,2n+1,2n$，是几乎单调递增数列，但不是单调递增数列。

注意： 定义中的 N_0 如果存在，则不是唯一，因为任何比 N_0 大的正整数都可以定义为 N_0。

定理 2[7]：几乎单调有界数列极限必定存在。

证： 这里将文献[7]中的证明补充完整，即给出几乎单调递减有下界数列必有极限的证明。设 $\{b_n\}$ 是几乎单调递减有下界的数集。由数列的性质可知一定会存在一个单调递减有下界的子列 $\{b_{n_k}\}$，又由单调有界原理得知，该子列必有极限，不妨记其为 b。下面证明数列 $\{b_n\}$

也以 b 为极限。由假设得知 $b_n \ge b$，否则必定会存在 m_0，使得 $b_{m_0}<b$，则当 $m_k>M_0+m_0$，有

$$b_{m_k} \le b_{m_0} < b$$

与 b_{n_k} 以 b 为极限矛盾。再次，对于任意 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k}=b$ 知，存在正整数 k_0，使得当 $k \ge k_0$ 时，有

$$b-\varepsilon<b_{n_k}<b+\varepsilon$$

取 $M=m_{k_0}+M_0$，则当 $m>M$ 时

$$b-\varepsilon \le b_m < b_{k_0} < b+\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$。证明完毕。

3. Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的扩充

引理 1[8]：设 $\{a_n\}$ 是单调数列，并且存在常数 $M>0$，使数列 $\{b_n\}$ 满足对于任意 n 是正整数，都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \le M$，则对任意 n 有不等式：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le M\left(\left|a_1\right|+2\left|a_n\right|\right)$

定理 3 (Dirichlet 判别法的扩充)： 如果数列 $\{S_k\}$ 几乎单调趋于 0，而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k$ 的部分和数列有界，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k T_k$ 收敛。

证： 由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k$ 的部分和数列有界，因此存在 $P>0$，对所有的 k 属于正整数都有

$$\left|\sum_{k=1}^{k} T_k\right| \le P$$

对任意的正整数 k 和 m，$\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+m} T_n\right| \le 2P$ 由前面的引理便有 $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+m} S_n T_n\right| \le 2P\left(\left|S_{k+1}\right|+2\left|S_{k+m}\right|\right)$

由于数列 $\{S_k\}$ 几乎单调趋于 0，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，$k>N$ 时就有 $\left|S_k\right|<\dfrac{\varepsilon}{6P}$。所以，对 $k>N$ 和任意 m 属于正整数都有 $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+m} S_n T_n\right| \le \varepsilon$

根据柯西收敛准则得出级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k T_k$ 收敛。证明完毕。

定理 4 (Abel 判别法的扩充)： 如果数列 $\{S_k\}$ 几乎单调有界，且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k T_k$ 收敛。

证： 由于数列 $\{S_k\}$ 几乎单调有界，由前面的定理得知数列 $\{S_k\}$ 收敛，不妨设其极限为 S，则有 $\lim_{k\to\infty} S_k = S$，则数列 $\{S_k - S\}$ 几乎单调趋于 0。又知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 收敛，所以部分和数列有界。根据上面 Dirichlet 判别法的扩充而知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(S_k - S)T_k$ 收敛，因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k T_k = \sum_{k=1}^{\infty}(S_k - S)T_k + S\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 收敛。证明完毕。

4. 交错级数的重排

定理 5： 若一个满足牛顿莱布尼茨定理的交错级数以 k 项为一个单位，并且保持首尾不变，其中各项任意排列，则重排之后的交错级数依然收敛。

证： 由已知

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$$

且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，设 b_n 表示重排之后的级数的第 n 位数。

若 k 是奇数，把重排之后的级数拆分为：

$$(A_1'):\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_{nk+1}$$

$$(A_2'):\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} b_{nk+2}$$

$$\cdots$$

$$(A_k'):\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} b_{nk+k}$$

共有 k 项。那么重排之后的交错级数可表示为：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n = A_1' + A_2' + A_3' + \cdots + A_k'$

设上述右边各项的每个交错级数的部分和为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_k$，容易知道上述每个交错级数都收敛，设极限为 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$。

任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $kn > n > N$ 时，有

$$|\sigma_m - A_m| < \frac{\varepsilon}{k}, m = 1, 2, \cdots, k$$

再证重排之后的级数以 $\sum_{n=1}^{k} A_n$ 为极限。设

$$S_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma_k$$

对于上述的 ε 和 n，都有 $|S_k - (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_k)| \le |\sigma_1 - A_1| + \cdots + |\sigma_k - A_k| < \varepsilon$

因此重排之后的级数依然收敛。

若 k 是偶数，则把重排之后的级数拆分为：

$$(A_1'):\sum_{n=0}^{\infty}\left(b_{2nk+1} - b_{(2nk+1)k+2}\right)$$

$$(A_2'):\sum_{n=0}^{\infty}\left(-b_{2nk+2} + b_{(2n+1)k+1}\right)$$

$$\cdots$$

证明方法如上。证明完毕。

定理 6： 若以 $k,k^2,k^3,\cdots,k^n$ 为一个单位，即第一部分以 k 项为一个单位，第二部分以 k^2 项为一个单位，以此类推，k^n 可以为任意大，但不能为无穷大且之后以 k^n 项为单位进行重排，则重排之后的级数依然收敛。

证：由已知

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，设 b_n 表示重排之后的级数的第 n 位数。

若 k 是奇数，把重排之后的级数拆分为：

$$(A_1'): \sum_{n=0}^{n}(-1)^n b_{\sum\limits_{m=0}^{n} k^m} + \cdots$$

$$(A_2'): \sum_{n=0}^{n}(-1)^{n+1} b_{\left(\sum\limits_{m=0}^{n} k^m\right)+1} + \cdots$$

$$(A_3'): \sum_{n=0}^{n}(-1)^n b_{\left(\sum\limits_{m=0}^{n} k^m\right)+2} + \cdots$$

$$\cdots$$

$$\left(A_{k^2+k}'\right): -b_{k^2+k} + \sum_{n=1}^{n}(-1)^{n+1} b_{\left(\sum\limits_{m=1}^{n} k^{m+1}\right)+k^2+k} + \cdots$$

共有 k^n 项。那么问题就转化成定理 5 的问题，而且确保前 $1+k+k^2+\cdots+k^n=\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1}$ 个数都可以取尽，那么重排之后的交错级数可表示为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = A_1'+A_2'+A_3'+\cdots+A_{k^n}'$ 设上述每个交错级数的部分为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_{k^n}$。容易得知上述每个交错级数都收敛，设极限为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{k^n}$。任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $k^n>n>N$ 时，有

$$\left|\sigma_m - A_m\right| < \frac{\varepsilon}{k^n}, m=1,2,\cdots,k^n$$

再证重排之后的级数以 $A_1+A_2+\cdots+A_{k^n}$ 为极限。设 $S_{k^n}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_{k^n}$

对于上述的 ε 和 n，都有

$$\left|S_{k^n}-\left(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{k^n}\right)\right| \le \left|\sigma_1-A_1\right|+\cdots+\left|\sigma_{k^n}-A_{k^n}\right| < \varepsilon$$

因此重排之后的级数依然收敛。

若 k 是偶数，拆分方法和证明方法相似，不再累述。

5. 研究意义

1) 关于绝对收敛：

我们知道若一个数项级数是绝对收敛的，例如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1^n\right)\dfrac{1}{n^2}$ 那么根据柯西收敛准则，其中任意项重排不影响收敛性，也就是说一个交错级数若是绝对收敛，那么无论怎么重排，仍然保持绝对收敛性，不会因为重排而改变绝对收敛的性质。

2) 关于条件收敛：

若一个交错级数条件收敛，那么重排之后所得到新级数就算收敛也不一定收敛于原来的和数，而且经过适当重排后，可以得到发散级数，或收敛于任何事先指定的数，

例如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=A$

乘以常数 $\frac{1}{2}$ 后，有 $\frac{1}{2}\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{A}{2}$

把上面两个级数相加，就得到 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3A}{2}$

3) 莱布尼茨判别法的扩充：

课文中的莱布尼茨判别法为：若交错级数满足下面两个条件：

a) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减

b) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

那么该交错收敛。不难发现，莱布尼茨判别法的适用范围太窄，我们可以把该判别法稍微做个修改，使其具有更宽广的范围。

莱布尼茨判别法的扩充：

一个交错级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$，这里 $a_k>0$，如果这个交错级数满足下面几个条件：

1) 数列 $\{a_k\}$ 是几乎单调递减，并且趋于 0；

2) 按照定理 5 和定理 6 规律重排；

3) 通项表达式可变为：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n=A_1'+A_2'+A_3'+\cdots+A_k'$ 或者

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n=A_1'+A_2'+A_3'+\cdots+A_{k^n}'$

则必定收敛。

6. 推广和应用

例 1： $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{1}\frac{1}{01}-\frac{1}{1}\cdots$

证： 观察得知，此交错级数以 5 项为一个单位，其中各项任意排列进行重排，并且各项都满足几乎单调递减，并且趋于 0。我们可以把该交错级数拆分为 5 个交错级数：

$$(A_1):1-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdots$$

$$(A_2):-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdots$$

$$\cdots$$

$$(A_5):\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdots$$

共有 5 项。设上述每个交错级数的部分和为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_5$，容易知道上述每个交错级数都收敛，设极限为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_5$。任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $5n>n>N$ 时，有

$$\left|\sigma_m-A_m\right|<\frac{\varepsilon}{5},m=1,2,\cdots,5$$

再证重排之后的级数以 $\sum_{n=1}^{5}A_n$ 为极限。设

$$S_5=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_5$$

对于上述的 ε 和 n，都有 $\left|S_5-\left(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_5\right)\right| \le \left|\sigma_1-A_1\right|+\cdots+\left|\sigma_5-A_5\right|<\varepsilon$

因此该交错级数收敛。证明完毕。

例 2： $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{1}\frac{}{1}\cdots$

证： 观察得知，此交错级数以 4 项为一个单位，其中各项任意排列进行重排，并且各项都满足几乎单调递减，并且趋于 0。我们可以把该交错级数拆分为 4 个交错级数：

$$\left(A_1\right):1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots$$

$$\left(A_2\right):-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots$$

$$\cdots$$

$$\left(A_4\right):-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdots$$

共有 4 项。设上述每个交错级数的部分和为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_4$，容易知道上述每个交错级数都收敛，设极限为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_4$。

任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $4n>n>N$ 时，有

$$\left|\sigma_m-A_m\right|<\frac{\varepsilon}{4},m=1,2,\cdots,4$$

再证重排之后的级数以 $\sum_{n=1}^{4}A_n$ 为极限。设

$$S_4=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4$$

对于上述的 ε 和 n，都有

$$\left|S_4-\left(A_1+A_2+A_3+A_4\right)\right| \le \left|\sigma_1-A_1\right|+\cdots+\left|\sigma_4-A_4\right|<\varepsilon$$

因此该交错级数收敛。证明完毕。

例 3： $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\cdots$

证： 观察得知，此交错级数以 $2^n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 项为一个单位，其中各项任意排列进行重排，并且各项都满足几乎单调递减，并且趋于 0。我们可以把该交错级数拆分为 2^n 个交错级数：

$$\left(A_1\right):1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\cdots$$

$$\left(A_2\right):-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$$

$$\cdots$$

$$\left(A_4\right):-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\cdots$$

共有 2^n 项。设上述每个交错级数的部分和为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_{2^n}$，容易知道上述每个交错级数都收敛，设极限为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2^n}$。任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $2^n>n>N$ 时，有

$$\left|\sigma_m-A_m\right|<\frac{\varepsilon}{2^n},m=1,2,\cdots,2^n$$

再证重排之后的级数以 $\sum_{n=1}^{2^n}A_n$ 为极限。设

$$S_{2^n}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_{2^n}$$

对于上述的 ε 和 n，都有 $\left|S_{2^n}-\left(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_{2^n}\right)\right|\le\left|\sigma_1-A_1\right|+\cdots+\left|\sigma_{2^n}-A_{2^n}\right|<\varepsilon$

因此该交错级数收敛。证明完毕。

项目基金

国家自然科学基金项目(11226167, 11361020)；海南省自然科学基金项目(111005)。

参考文献 (References)

[1] 白水周 (1999) 关于交错级数莱布尼茨判别法的一点注释. *开封大学学报*, **2**, 43-45.

[2] 陈纪修, 等 (2000) 数学分析下. 高等教育出版社, 北京.

[3] 华东师范大学数学系 (2001) 数学分析下. 高等教育出版社, 北京.

[4] Pedrick, G. (1994) A first course in analysis. Springer, New York.

[5] 程为麟 (1994) 关于交错级数莱布尼茨定理的推广. *甘肃教育学院学报*, **1**, 14-15.

[6] 吴辰余 (2008) 条件收敛级数的性质趣谈. *巢湖学院学报*, **6**, 145-147.

[7] 高德智, 等 (2008) 数列的几乎单调性. *高等数学研究*, **3**, 17-19.

[8] 刘名生, 等 (2009) 数学分析(二). 科学出版社, 北京.