Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 84-94
Published Online May 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.43013

Quantitative Estimations on Zeros and Growths of Meromorphic Solutions of Linear Differential Equations

Hui Huang, Zongxuan Chen

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: huanghui201209@126.com, chzx@vip.sina.com

Received: Feb. 25th, 2014; revised: Mar. 30th, 2014; accepted: Apr. 10th, 2014

Abstract

In this paper, we investigate the growth of linear order meromorphic solution of higher order homogeneous and no-homogeneous linear differential equation, and we obtain some precise estimates for their zeros and hyper-orders.

Keywords

Linear Differential Equation, Meromorphic Functions, Hyper-Order, Hyper-Exponent of Convergence

线性微分方程亚纯解的零点和增长级的定量估计

黄　惠，陈宗煊

华南师范大学数学科学学院，广州
Email: huanghui201209@126.com, chzx@vip.sina.com

收稿日期：2014年2月25日；修回日期：2014年3月30日；录用日期：2014年4月10日

摘　要

本文研究了高阶齐次和非齐次线性微分方程无穷极亚纯解的增长性问题，使方程的零点和增长性得到了精确估计。

关键词

线性微分方程，亚纯函数，超级，二级收敛指数

1. 引言和结果

本文使用值分布的标准记号(见[1] [2])，对于亚纯函数 $f(z)$，用 $\sigma(f),\lambda(f),\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级，零点收敛指数和极点收敛指数，并引入以下定义：

定义 1：(见[2])亚纯函数 $f(z)$ 的超级 $\sigma_2(f)$ 定义为 $\sigma_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log T(r,f)}{\log r}$。

定义 2：(见[3])亚纯函数 $f(z)$ 的二级零点收敛指数 $\lambda_2(f)$ 定义为 $\lambda_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$，二级不同零点收敛指数 $\overline{\lambda}_2(f)$ 定义为 $\overline{\lambda}_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$。

陈宗煊和杨重骏在文献[4]中证明了：

定理 A：设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，满足 $\max\left\{\sigma(A_j);j=1,\cdots,k-1\right\}<\sigma(A_0)<\infty$。

则微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0 \tag{1.1}$$

每一个不恒为零的解 f 满足 $\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$。

定理 B：设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 满足定理 A 的假设，$F\not\equiv 0$ 是整函数，且 $\sigma(F)<\infty$。则微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F \tag{1.2}$$

所有解 f 满足 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\sigma(A_0)$，至多有一个例外解。

廖莉和陈宗煊在文献[5]中证明了：

定理C：设 $A_0,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv 0$ 是亚纯函数，满足存在某个 $A_s\,(1\le s\le k-1)$ 是超越的，并满足 $N(r,A_s)=O\{m(r,A_s)\},\sigma(F)\le\sigma(A_s)$ 和 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log m(r,A_s)}{\log r}=\sigma(A_s)\le\infty$。

而对于其它 $A_j\,(j\ne s)$ 满足

$$T(r,A_j)=O\{m(r,A_s)\}.$$

如果(1.2)中的亚纯解极点重数一致有界，那么至少有一个亚纯解满足

$$\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma(A_s).$$

本文将定理 A，B 中方程的系数推广到了亚纯系数，将定理 C 的条件减弱，得到如下定理

定理1： 假设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是亚纯函数，$\delta(\infty,A_0)>0$，满足 $\max\{\sigma(A_i);i=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)<\infty$。若 $f\not\equiv 0$ 是(1.1)的任一亚纯解，且 f 极点阶数有界，则 $\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$。

定理2： 假设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 满足定理1的假设，$F\not\equiv 0$ 是亚纯函数，且 $\sigma_2(F)<\sigma(A_0)$。若 f 是(1.2)的任一亚纯解，且 f 极点阶数有界，则 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\sigma(A_0)$，至多除去一个例外解。

定理3： 假设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$，$F\not\equiv 0$ 是亚纯函数，存在某个 $A_s\,(1\le s\le k)$ 满足 $\delta(\infty,A_s)>0$ 及

$$b=\max\{\sigma(F),\sigma(A_i)(i\ne s)\}<\sigma(A_s)<\infty$$

如果(1.2)中的亚纯解极点重数一致有界，那么至少有一个亚纯解 f 满足 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\sigma(A_s)$。

2. 引理

引理1： (见[6])假设 $d(z)$ 是超越亚纯函数，$\sigma(d)=\beta<\infty$。设 $\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots(k_m,j_m)\}$ 表示一个整数对的有限集合，满足 $k_i>j_i\ge 0\,(i=1,\cdots,m)$。假定 $\varepsilon>0$ 是任给常数，那么存在子集 $E_1\subset(1,+\infty)$ 具有有穷对数测度，对满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的所有 z 和 $(k,j)\in\Gamma$，有

$$\left|\frac{d^{(k)}(z)}{d^{(j)}(z)}\right|\le r^{(k-j)(\beta-1+\varepsilon)}.$$

引理 2： (见[6])假设 $g(z)$ 是一个无穷级整函数，超级 $\sigma_2(g)=\sigma,v(r)$。为 $g(z)$ 的中心指标，则有

$$\sigma=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log v_g(r)}{\log r}.$$

引理 3： 设 $f(z)=\dfrac{g(z)}{d(z)}$ 为无穷级亚纯函数，其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 为整函数，且 $\sigma(d)=\beta<\infty$，$\sigma_2(g)=\sigma_2(f)>0$，若 E 是线测度和对数测度均有穷的集合，则存在一列 $\{r_k\}(r_k\to\infty)$，且 $r_k\notin E$，当 z 满足 $|z|=r_k$ 且 $|g(z)|=M(r_k,g)$ 时，有

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right|=\left[\frac{v_g(r_k)}{z}\right]^n(1+o(1))(n\ge 1),\sigma_2(f)=\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k)}{\log r_k}.$$

证明：由归纳法，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{g^{(n)}}{d}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{d}\sum_{(j_1\cdots j_n)}c_{jj_1\cdots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}. \tag{2.1}$$

其中 $c_{jj_1\cdots j_n}$ 是常数，$j+j_1+2j_2+\cdots nj_n=n$。因此

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\frac{g^{(n)}}{g}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{g}\sum_{(j_1\cdots j_n)}c_{jj_1\cdots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}. \tag{2.2}$$

由 Wiman-Valiron 定理(见[7]-[9])，存在一个对数测度有穷的集合 H_1，当 z 满足 $|z|=r\notin H_1$ 及 $|g(z)|=M(r,g)$ 时，

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)}=\left[\frac{v_g(r)}{z}\right]^j(1+o(1))(j=1,\cdots,n). \tag{2.3}$$

将(2.3)代入(2.2)有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left[\frac{v_g(r)}{z}\right]^n(1+o(1))\left\{1+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{v_g(r)}{z}\right]^{j-n}(1+o(1))\sum_{(j_1\cdots j_n)}c_{jj_1\cdots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right\} \tag{2.4}$$

由引理 1，对任给的$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，存在一个对数测度有穷的集合$H_2$，当$z$满足$|z|=r\notin[0,1]\cup H_2$时，有

$$\left|\frac{d^{(m)}(z)}{d(z)}\right|\le r^{m(\beta-1+\varepsilon)}(m=1,\cdots,n). \tag{2.5}$$

由 $j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n-j$ 和(2.5)得

$$|z|^{n-j}\left|\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right|\le|z|^{(n-j)(\beta+\varepsilon)}. \tag{2.6}$$

由引理 2 可知，存在一序列$\{r_k'\}(r_k'\to\infty)$，满足$\sigma_2(g)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k')}{\log r_k'}$。令$E\cup H_1\cup H_2$的对数测度为$a=lm(E\cup H_1\cup H_2)$，取$r_k\in[r_k',(a+1)r_k']-(E\cup H_1\cup H_2)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k)}{\log r_k}\ge\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k')}{\log(a+1)r_k'}=\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k')}{\log r_k'+\log(a+1)}=\sigma_2(g)>0. \tag{2.7}$$

又

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k)}{\log r_k}\le\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log\log v_g(r_k)}{\log r_k}=\sigma_2(g) \tag{2.8}$$

由(2.7)知，当k充分大时，有

$$v_g(r_k)>r_k^{\beta+1}. \tag{2.9}$$

由(2.7)，(2.8)知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log v_g(r_k)}{\log r_k}=\sigma_2(g)=\sigma_2(f). \tag{2.10}$$

由(2.6)，(2.9)有

$$\left|\left[\frac{v_g(r)}{z}\right]^{j-n}(1+o(1))\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right|\le r_k^{(n-j)(\varepsilon-1)}\to0,(r_k\to\infty). \tag{2.11}$$

结合(2.4)，(2.10)，(2.11)知本定理得证。

引理4：(见[10])假设$g(z)$为亚纯函数，$\sigma(g)=\beta<\infty$，那么对任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个线测度和对数测度都为有穷的集合$E\subset(1,\infty)$，当$|z|=r\notin[0,1]\cup E,r\to\infty$，时

$$|g(z)|\le\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.$$

引理5：(见[11])假设微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0.$$

被k个线性无关的亚纯解$f_1,\cdots f_k$所满足，那么$a_0,\cdots a_{k-1}$是亚纯函数，且对于$j=0,\cdots,k-1$有

$$m(r,a_j)=O\{\log[\max T(r,f_n):1\le n\le k]\}.$$

3. 定理 1 的证明

把(1.1)改写成

$$-A_0=\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_1\frac{f'}{f}. \tag{3.1}$$

由(3.1)和对数导数引理可知 $\sigma(f)=\infty$，从而有 $m\left(r,\frac{f^{(i)}}{f}\right)=O\{\log rT(r,f)\}(i=1,\cdots,k)$，结合(3.1)可得

$$T(r,A_0)=N(r,A_0)+m(r,A_0)\le N(r,A_0)+\sum_{i=1}^{k-1}m(r,A_i)+O\{\log rT(r,f)\}. \tag{3.2}$$

可能除去一个线测度有穷的集合 $E_1\subset(0,\infty)$，使得 $r\notin E_1$。

由于 $\delta(\infty,A_0)=\delta>0$，即 $1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,A_0)}{T(r,A_0)}=\delta>0$，则对任意 $\varepsilon(0<\varepsilon<\delta)$，存在 r_0，对任意的 $r>r_0$ 有

$$N(r,A_0)<(1-\delta+\varepsilon)T(r,A_0) \tag{3.3}$$

由(3.2)，(3.3)得

$$(\delta-\varepsilon)T(r,A_0)<\sum_{i=1}^{k-1}m(r,A_i)+O\{\log rT(r,f)\}. \tag{3.4}$$

由(3.4)及 $\max\{\sigma(A_i);i=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)$ 知

$$\sigma(A_0)\le\sigma_2(f). \tag{3.5}$$

另一方面，由于 $\max\{\sigma(A_i);i=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)<\infty$，由引理 4 知，对任意 $\varepsilon_1(>0)$，存在一个对数测度为有穷的集合 $E_2\subset(1,\infty)$，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2,r\to\infty$ 时，有

$$|A_i(z)|\le\exp\left\{r^{\sigma(A_i)+\varepsilon_1}\right\}\le\exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_1}\right\}(i=0,\cdots,k-1). \tag{3.6}$$

设 z_0 为 f 的 n 阶极点，但 z_0 不是 $A_0,\cdots A_{k-1}$ 的极点，在(1.1)中仅有一项即 $f^{(k)}$ 有最高阶极点，其阶数为 $n+k$，显然矛盾，所以 f 的极点仅发生在 $A_0,\cdots A_{k-1}$ 的极点处，由于 f 的极点阶数是有限的，所以

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\le\sigma(A_0)<\infty.$$

由 Hadamard 定理，f 可表示为

$$f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}.$$

其中 $g(z),d(z)$ 为整函数，$d(z)$ 是 $f(z)$ 极点构成的典型乘积(或多项式)，且满足

$$\sigma(d)=\lambda(d)=\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<\infty,\sigma(g)=\sigma(f)=\infty,\sigma_2(g)=\sigma_2(f)>0.$$

由引理 3 知，存在一列 $\{r_j\}(r_j\to\infty)$，且 $r_j\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$，当 z 满足 $|z|=r_j,|g(z)|=M(r_j,g)$ 时，有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left[\frac{v_g(r_j)}{z}\right]^n(1+o(1))(n\ge1). \tag{3.7}$$

当$|z| = r_j \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2, |g(z)| = M(r_j, g), r_j \to \infty$时，把(3.6)，(3.7)代入(1.1)有

$$\left[\frac{v_g(r_j)}{|z|}\right]^k (1+o(1)) \le k \cdot \left[\frac{v_g(r_j)}{|z|}\right]^{k-1} (1+o(1)) \cdot \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_1}\right\},$$

即

$$v_g(r_j) \le k \cdot |z| (1+o(1)) \cdot \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_1}\right\}. \tag{3.8}$$

由引理 3，(3.8)及ε_1的任意性知

$$\sigma(A_0) \le \sigma_2(f). \tag{3.9}$$

由(3.5)和(3.9)知$\sigma(A_0) = \sigma_2(f)$。

4. 定理 2 的证明

假设$f_1, f_2 (f_1 \not\equiv f_2)$是方程(1.2)的任意两个解，且极点阶数均有界，下面证至少存在一个$f_i(i=1,2)$不妨设为f_1，有$\sigma(A_0) = \sigma_2(f_1)$。

由微分方程的基本定理知$f_1 - f_2$是方程(1.2)对应的齐次方程(1.1)的解，由定理 1 知

$$\sigma_2(f_1 - f_2) \le \max\{\sigma_2(f_1), \sigma_2(f_2)\}.$$

则至少存在一个$f_i(i=1,2)$，不妨设为f_1，满足

$$\sigma(A_0) \le \sigma_2(f_1). \tag{4.1}$$

另一方面，由于$\max\{\sigma_2(F), \sigma_2(A_i)(i=1,\cdots,k-1)\} < \sigma(A_0) < \infty$。则由引理 4 知，对任意$\varepsilon_2(>0)$，存在一个对数测度为有穷的集合$E_3 \subset (1,\infty)$，当$|z| = r \notin [0,1] \cup E_3, r \to \infty$时，有

$$|F(z)| \le \exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2}\right\}, \tag{4.2}$$

$$|A_i(z)| \le \exp\left\{r^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2}\right\} (i=0,\cdots,k-1). \tag{4.3}$$

由(4.1)知$\sigma(f_1) = \infty$，假设z_0为f_1的n阶极点，但z_0不是$A_0,\cdots,A_{k-1},F$的极点，则在(1.2)中仅有一项即$f^{(k)}$有最高阶极点，其阶数为$n+k$，显然是矛盾的。所以f_1的极点仅发生在$A_0,\cdots,A_{k-1},F$的极点处，由于f_1的极点阶数是有限的，所以$\lambda\left(\frac{1}{f_1}\right) \le \sigma(A_0) < \infty$。Hadamard 定理，$f_1$可表示为

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{d_1(z)},$$

其中$g_1(z), d_1(z)$为整函数，$d_1(z)$是$f_1(z)$极点构成的典型乘积(或多项式)，且满足

$$\sigma(d_1) = \lambda(d_1) = \lambda\left(\frac{1}{f_1}\right) \le \sigma(A_0) < \infty, \sigma(g_1) = \sigma(f_1) = \infty, \sigma_2(g_1) = \sigma_2(f_1) > 0. \tag{4.4}$$

由引理3知，存在一列$\{r_j\}(r_j \to \infty)$，且$r_j \notin [0,1] \cup E_3$，当$z$满足$|z| = r_j, |g_1(z)| = M(r_j, g_1)$时，有

$$\frac{f_1^{(n)}(z)}{f_1(z)} = \left[\frac{v_{g_1}(r_j)}{z}\right]^n (1+o(1)) (n \ge 1). \tag{4.5}$$

由(4.4)知，当r_j充分大时，对上述的ε_2，有

$$\left|d_1(z)\right| < \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2}\right\}, \left|g_1(z)\right| \ge \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+2}\right\}. \tag{4.6}$$

由(4.2)，(4.6)知，当$|z| = r_j \notin [0,1] \cup E_3$，$\left|g_1(z)\right| = M(r_j, g_1)$且$r_j$充分大时，有

$$\left|\frac{F}{f_1}\right| = \left|\frac{Fd_1}{g_1}\right| \le \exp\left\{2r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2} - r_j^{\sigma(A_0)+2}\right\} \to 0, (r_j \to \infty) \tag{4.7}$$

由于(1.2)可改写成

$$\frac{f^{(k)}}{f_1} = \frac{F}{f_1} - \left(A_{k-1}\frac{f_1^{(k-1)}}{f_1} + \cdots + A_1\frac{f_1'}{f_1} + A_0\right). \tag{4.8}$$

当$|z| = r_j \notin [0,1] \cup E_3, \left|g_1(z)\right| = M(r_j, g_1), r_j \to \infty$时，把(4.3)，(4.5)，(4.7)代入(4.8)有

$$\left[\frac{v_{g_1}(r_j)}{|z|}\right]^k (1+o(1)) \le k \cdot \left[\frac{v_{g_1}(r_j)}{|z|}\right]^{k-1} (1+o(1)) \cdot \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2}\right\},$$

即

$$v_{g_1}(r_j) \le k \cdot |z|(1+o(1)) \cdot \exp\left\{r_j^{\sigma(A_0)+\varepsilon_2}\right\}. \tag{4.9}$$

由(4.9)及引理 3 有

$$\sigma_2(f_1) \le \sigma(A_0) + \varepsilon_2. \tag{4.10}$$

由ε_2的任意性及(4.1)，(4.10)有

$$\sigma_2(f_1) = \sigma(A_0). \tag{4.11}$$

把方程(1.2)改写成

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}\left(\frac{f_1^{(k)}}{f_1} + A_{k-1}\frac{f_1^{(k-1)}}{f_1} + \cdots + A_1\frac{f_1'}{f_1} + A_0\right). \tag{4.12}$$

若z_1是$f_1(z)$的大于$n(>k)$阶零点，则z_1是F的$n-k$阶零点，从而有

$$N\left(r, \frac{1}{f_1}\right) \le k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} N(r, A_i). \tag{4.13}$$

由对数导数引理和(4.12)，最多除去一个线测度有限的集合$E_4 \subset [0,\infty)$，当$r \notin E_4$时，有

$$m\left(r, \frac{1}{f_1}\right) \le m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} m(r, A_i) + O\left\{\log rT(r_1, f_1)\right\}. \tag{4.14}$$

由(4.13)，(4.14)

$$T(r, f_1) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + O(1) \le k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + T(r, F) + \sum_{i=0}^{k-1} T(r, A_i) + O\left\{\log rT(r, f_1)\right\}, r \notin E_4. \tag{4.15}$$

由于$\max\left\{\sigma(F), \sigma(A_i)(i = 1, \cdots, k-1)\right\} < \infty$。则存在$N > 0$，当$r$充分大时，有

$$T(r, F) \le r^N, T(r, A_i) \le r^N (i = 0, \cdots, k-1). \tag{4.16}$$

又$\sigma(f_1) = \infty$，则对任给的$M > N$有$T(r, f_1) > r^M$，从而有

$$(k+1)r^N < \frac{1}{4}T(r, f_1). \tag{4.17}$$

因为当 r 充分大时

$$O\{\log rT(r, f_1)\} < \frac{1}{2}T(r, f_1). \tag{4.18}$$

从而由(4.15)~(4.18)，当 $|z| = r \notin E_4$ 时，有

$$T(r, f_1) < 4k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right). \tag{4.19}$$

由(4.19)得

$$\sigma_2(f_1) = \overline{\lambda}_2(f_1). \tag{4.20}$$

由(4.11)，(4.20)知本定理得证。

5. 定理 3 的证明

运用与定理 2 相同的证明可得到

$$T(r, f) \le k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{i=0, i\ne s}^{k-1} T(r, A_i) + T(r, A_s) + O\{\log rT(r, f)\}. \tag{5.1}$$

其中 $|z| = r \notin E_4, E_4$ 为有穷测度集。

由于 $\delta(\infty, A_s) = \delta_s > 0$, 即 $\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{m(r, A_s)}{T(r, A_s)} = \delta_S > 0$，则对任意 $\varepsilon_s\left(0 < \varepsilon_s < \frac{\delta_s}{2}\right)$，当 r 充分大时，有

$$\frac{\delta_s}{2}T(r, A_s) < (\delta_s - \varepsilon_s)T(r, A_s) < m(r, A_s) \le T(r, A_s). \tag{5.2}$$

由(5.2)知

$$\sigma(A_s) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log m(r, A_s)}{\log r}. \tag{5.3}$$

我们断言存在一个线测度为无穷的集合 $E_5 \subset [0, \infty)$，使得

$$\lim_{r\to\infty, r\in E_5} \frac{\log m(r, A_s)}{\log r} = \sigma(A_s). \tag{5.4}$$

事实上由(5.3)知存在一系列 $\{r_n\}(r_n \to \infty)$，有

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log m(r_n, A_s)}{\log r_n} = \sigma(A_s).$$

令 $E_5 = \bigcup_{n=1}^{\infty}[r_n, 2r_n]$。显然(5.4)在 E_5 上成立，且 E_5 的线测度 $mE_5 = \infty$。

取任意实数 α, β 使得 $b < \alpha < \beta < \sigma(A_s)$，则由(5.4)知，当 $|z| = r \in E_5$ 时，有

$$m(r, A_s) > r^{\beta}. \tag{5.5}$$

又 $b = \max\{\sigma(F), \sigma(A_i)(i \ne s)\} < \alpha$，当 r 充分大时，有

$$T(r, F) \le r^{\alpha}, T(r, A_i) \le r^{\alpha}(i \ne s). \tag{5.6}$$

从而由(5.5)知

$$kr^{\alpha} < \frac{1}{4}m\left(r, A_s\right). \tag{5.7}$$

由(5.1)~(5.2)，(5.5)~(5.7)知，当 $|z| = r \in E_5 - E_4$，且 r 充分大时，有

$$T\left(r, f\right) \le k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{\delta_s + 8}{4\delta_s}m\left(r, A_s\right) + O\left\{\log rT\left(r, f\right)\right\}. \tag{5.8}$$

现在分两种情况讨论：

情况1：假设 $f(z)$ 满足条件 (i)：除去一个线测度有穷的集合 $E_6 \subset (0, \infty)$ 外有

$$m\left(r, A_s\right) = O\left\{\log T\left(r, f\right)\right\}. \tag{5.9}$$

由 $\sigma\left(A_s\right) > b \ge 0$ 知 A_s 是超越的，则由(5.9)可知 $f(z)$ 是无穷极亚纯函数，从而存在一系列 $\{r_n'\}\left(r_n' \to \infty\right)$ 满足 $\lim\limits_{r_n' \to \infty} \frac{\log T\left(r_n', f\right)}{\log r_n'} = \infty$。令 $m\left(E_4 \cup E_6\right) = d < \infty$，则存在点 $r_n \in \left[r_n', r_n' + d + 1\right] - \left(E_4 \cup E_6\right)$，使得

$$\lim_{r_n \to \infty} \frac{\log T\left(r_n, A_s\right)}{\log r_n} \ge \lim_{r_n' \to \infty} \frac{\log T\left(r_n', f\right)}{\log\left(r_n' + d + 1\right)} = \lim_{r_n' \to \infty} \frac{\log T\left(r_n', f\right)}{\log r_n' + \log\left(1 + \frac{d+1}{r_n'}\right)} = \infty,$$

从而有

$$\lim_{r_n \to \infty} \frac{\log T\left(r_n, f\right)}{\log r_n} = \infty. \tag{5.10}$$

由(5.8)~(5.9)知，当 $|z| = r_n \in E_5 - \left(E_4 \cup E_6\right)$，且 r 充分大时，有

$$T\left(r_n, f\right) \le k\overline{N}\left(r_n, \frac{1}{f}\right) + O\left\{\log r_n T\left(r_n, f\right)\right\}. \tag{5.11}$$

又当 r_n 充分大时，有

$$O\left\{\log r_n T\left(r_n, f\right)\right\} < \frac{1}{2}T\left(r_n, f\right). \tag{5.12}$$

由(5.11)~(5.12)，当 $|z| = r_n \in E_5 - \left(E_4 \cup E_6\right)$，时，有

$$T\left(r_n, f\right) \le 2k\overline{N}\left(r_n, \frac{1}{f}\right). \tag{5.13}$$

由(5.4)，(5.9)，(5.13)有

$$\overline{\lambda}_2\left(f\right) = \sigma_2\left(f\right) \ge \sigma\left(A_s\right). \tag{5.14}$$

运用与定理2相同的证明方法可得 $\sigma_2\left(f\right) \le \sigma\left(A_s\right)$ 结合(5.14)有

$$\overline{\lambda}_2\left(f\right) = \sigma_2\left(f\right) = \sigma\left(A_s\right).$$

情况2：假设 f_0 是(1.2)的解，且不满足情况1的条件 (i)，即存在线测度为无穷的集合 $E_7 \subset (0, \infty)$，当 $|z| = r \in E_7$ 时，有

$$\log T\left(r, f_0\right) < \frac{m\left(r, A_s\right)}{2M_1}, \tag{5.15}$$

其中 $M_1 > 0$ 为常数。

假设 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 为方程(1.2)所对应的齐次方程(1.1)的基础解，由引理4，有

$$m(r, A_s) = O\left\{\log\left[\max T(r, f_n): 1 \le n \le k\right]\right\},$$

即对上述的 M_1，有

$$m(r, A_s) = M_1\left\{\log\left[\max T(r, f_n): 1 \le n \le k\right]\right\}. \quad (5.16)$$

令 $E_7^{(n)} = \{r; m(r, A_s) \le M_1 \log T(r, f_n)\} \cap E_7 (n = 1, \cdots, k)$，则 $E_7 = \bigcup_{n=1}^{k} E_7^{(n)}$ 及 E_7 的线测度 $mE_7 = \infty$，知至少存在一个集合 $E_7^{(n)}$，不妨设为 $E_7^{(1)}$，满足 $E_7^{(1)}$ 的线测度 $mE_7^{(1)} = \infty$，且当 $r \in E_7^{(1)}$ 时，有

$$m(r, A_s) \le M_1 \log T(r, f_1). \quad (5.17)$$

因此当 $r \in E_7^{(1)}$ 时，由(5.15)，(5.17)有

$$T(r, f_0 + f_1) \ge T(r, f_1) - T(r, f_0) \ge \exp\left\{\frac{m(r, A_s)}{M_1}\right\} - \exp\left\{\frac{m(r, A_s)}{2M_1}\right\} \ge \exp\left\{\frac{m(r, A_s)}{2M_1}\right\},$$

其中 $f_0 + f_1$ 是(1.2)的解.

由上式知

$$m(r, A_s) \le 2M_1 \log T(r, f_0 + f_1), \quad (5.18)$$

即

$$m(r, A_s) = O\{\log T(r, f_0 + f_1)\}. \quad (5.19)$$

又当 r 充分大时，有

$$O\{\log T(r, f_0 + f_1)\} + O\{\log rT(r, f_0 + f_1)\} < \frac{1}{2}\{T(r, f_0 + f_1)\}, \quad (5.20)$$

所以由(5.8)，(5.19)，(5.20)知

$$T(r, f_0 + f_1) \le 2k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_0 + f_1}\right). \quad (5.21)$$

由(5.4)，(5.18)，(5.21)得

$$\overline{\lambda_2}(f_0 + f_1) = \lambda_2(f_0 + f_1) = \sigma_2(f_0 + f_1) \ge \sigma(A_s). \quad (5.22)$$

运用类似于情况1的证明知 $\sigma_2(f_0 + f_1) \le \sigma(A_s)$。所以

$$\overline{\lambda_2}(f_0 + f_1) = \lambda_2(f_0 + f_1) = \sigma_2(f_0 + f_1) = \sigma(A_s).$$

致　谢

感谢陈宗煊教授的指导，他严谨细致，一丝不苟，在我论文写作过程中指点了我的思路和给了我启迪，同时感谢我的同门们对我的帮助和指导，正由于他们的帮助和提供资料我的论文才能写得如此的顺利，最后感谢审稿人对我文章提出的宝贵意见。

参考文献 (References)

[1] 杨乐 (1982) 值分布论及其新研究. 科学出版社, 北京.

[2] 仪洪勋，杨重骏 (1995) 亚纯函数唯一性理论．科学出版社，北京．

[3] 陈宗煊 (2000) 二阶复域微分方程解的不动点与超级．*数学物理学报*, **3**, 425-432.

[4] Chen, Z.-X. and Yang, C.-C. (1999) Quantitative estimation on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations. *Complex Variables*, **42**, 119-133.

[5] 廖莉，陈宗煊 (2006) 关于超越亚纯系数微分方程亚纯解的超级．*江西师范大学学报*(*自然科学版*), **1**, 14-17.

[6] Gundersen, G. (1988) Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. *London Mathematical Society*, **37**, 88-104.

[7] Hayman, W. (1974) The local growth of power series: A survey of the Wiman-Valiron method. *Canadian Mathematical Bulletin*, **17**, 317-358.

[8] He, Y.Z. and Xiao, X.Z. (1988) Algebroid functions and ordinary differential equations. Science Press, Beijing.

[9] Valiron, G. (1949) Lectures on the general theory of integral functions. Chelsea, New York.

[10] 陈宗煊 (1996) 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点．*数学物理学报*, **3**, 276-283.

[11] Frank, G. and Hellerstein, S. (1986) On the meromorphic solution of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients. *Proceedings London Mathematical Society*, **53**, 407-428.