Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 218-221
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45031

The Nonexistence Results of Radial Solutions to Some Chern-Simons-Schrödinger Equations

Kuiliang Dong, Can Zhang, Zhiyong Zhang, Jun Xie, Kangli Zhu, Youyan Wan

Department of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Jianghan University, Wuhan
Email: wanyouyan@jhun.edu.cn

Received: Jul. 12th, 2014; revised: Aug. 9th, 2014; accepted: Aug. 17th, 2014

Abstract

Using variational methods, we obtain that the nonexistence of radial solutions to some Chern-Simons-Schrödinger equations with radial symmetric potentials and special nonlinearities when the parameter λ is positive.

Keywords

Chern-Simons-Schrödinger Equations, Radial Solutions, The Nonexistence

一类陈－西蒙斯－薛定谔方程径向对称解的非存在性结论

董奎良，张　灿，张志永，谢　俊，朱康力，万优艳

江汉大学数学与计算机科学学院数学系，武汉
Email: wanyouyan@jhun.edu.cn

收稿日期：2014年7月12日；修回日期：2014年8月9日；录用日期：2014年8月17日

摘　要

通过变分法研究得到：当参数λ大于零时，一类带正的径向对称的位势和特殊非线性项的陈－西蒙斯－

薛定谔方程不存在非平凡的径向对称解。

关键词

陈－西蒙斯－薛定谔方程，径向对称解，非存在性

1. 引言

在对高温超导电性、分数量子霍尔效应和 Aharovnov-Bohm 扩散等负离子量子物理的研究中，我们常常需要研究陈－西蒙斯－薛定谔方程和方程组，参见[1]-[4]。在文献[5] [6]中，作者通过拟设和库仑规范条件，将陈－西蒙斯－薛定谔方程转化为下列带非局部项的椭圆型薛定谔方程

$$-\Delta u+wu+\left(\xi+\int_{|x|}^{\infty}\frac{h(s)}{s}u^2(s)\mathrm{d}s\right)u+\frac{h^2(|x|)}{|x|^2}u=g(u),\ \text{in } R^2, \tag{1}$$

其中 $h(s)=\int_0^s\frac{t}{2}u^2(t)\mathrm{d}t,\ w\in R$ 且 $\xi\in R$ 。

当非线性项 $g(u)=\lambda|u|^{p-1}u$ 时，其中 $\lambda\in R^+,p>1$，文献[5] [6]中作者用变分法研究得到(1)径向对称基态解的存在性，非存在性和多解的存在性。

本文我们主要研究下列陈－西蒙斯－薛定谔方程

$$-\Delta u+V(x)u+\lambda\left(\int_{|x|}^{\infty}\frac{h(s)}{s}u^2(s)\mathrm{d}s+\frac{h^2(|x|)}{|x|^2}\right)u=g(u),\ \text{in } R^2, \tag{2}$$

其中 $h(s)=\int_0^s\frac{t}{2}u^2(t)\mathrm{d}t,\ \lambda>0,\ g(u)=V_0u|\sin u|,V_0\in R^+$， $V(x)$ 满足下列条件：

(V1) $V(x)\in L^\infty(R^2,R)$；

(V2) $V(x)\equiv V(|x|)\ge V_0>0,\ \forall x\in R^2$ 。

当 $V(x)$ 是正的径向对称的位势且(2)右边非线性项 $g(u)$ 是渐近线性的情形时，文献[7]中作者证明了方程(2)解和多解的存在性，并且得到当 λ 充分大时，(2)不存在非平凡的径向对称解。

定义 1：如果 $u(x)$ 满足方程(2)并且 $u(x)=u(|x|)$，则称其为方程(2)的径向对称的解；如果进一步假设 $u(x)\not\equiv 0$ 则称其为非平凡的，否则称为平凡的。

本文考虑 $V(x)$ 是正的径向对称的位势且非线性项 $g(u)=V_0u|\sin u|$ 这种情形。很明显，此时 $g(u)$ 在无穷远处不是渐近线性的、不是超线性的，也不是次线性的，但有 $0\le\frac{g(u)}{u}\le V_0,\ \forall u\ne 0$ 。受[7]和[8]中方法的启发，本文的主要结论如下。

定理 1：假设 $V(x)$ 满足(V1)和(V2)且 $g(u)=V_0u|\sin u|$，那么对所有的 $\lambda>0$ 方程(2)没有非平凡的径向对称解。

2. 预备知识

$H_r^1(R^2)$ 表示径向对称的 Sobolev 空间，其范数定义为：

$$\|u\|:=\left(\int_{R^2}|\nabla u|^2+|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

上述范数与下列范数是等价的：

$$\|u\|_v := \left(\int_{R^2} |\nabla u|^2 + v(x)|u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们定义能量泛函 $I_\lambda : H_r^1\left(R^2\right) \to R$，

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{R^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_{R^2} \frac{u^2}{|x|^2}\left(\int_0^{|x|} \frac{t}{2}u^2(t)\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x - \int_{R^2} G(u)\mathrm{d}x,$$

其中 $G(u) = \int_0^u g(s)\mathrm{d}s$。

类似于[7]中性质 2.3，我们可以得到下述引理。

引理 1：假设 $V(x)$ 满足(V1)和(V2)且 $g(u) = V_0 u|\sin u|$，则能量泛函 I_λ 在 $H_r^1\left(R^2\right)$ 中是连续可微的并且它的临界点 u 是(2)的弱解。此外，假设 u 是 I_λ 的一个临界点，则 $u \in C^2\left(R^2\right)$，即(2)的弱解也是它的经典解。

下面我们来回忆[7]中一个重要不等式，我们在对主要定理的证明中会用到它。

引理 2：如果 $u \in H_r^1\left(R^2\right)$，那么我们有

$$\int_{R^2} |u|^4 \mathrm{d}x \le 2\varepsilon \int_{R^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{2}{\varepsilon}\int_{R^2} \frac{u^2}{|x|^2}\left(\int_0^{|x|} \frac{s}{2}u^2(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x,\ \forall \varepsilon > 0.$$

3. 定理 1 的证明

假设 $u \in H_r^1\left(R^2\right)$ 是(2)的一个解。由引理 1，可将(2)式两边同时乘以 u 并且分部积分得：

$$\int_{R^2} |\nabla u|^2 + v(x)u^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_{R^2}\left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{h(s)}{s}u^2(s)\mathrm{d}s + \frac{h^2(|x|)}{|x|^2}\right)u^2 \mathrm{d}x - \int_{R^2} g(u)u\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $g(u) = V_0 u|\sin u|$，所以

$$g(u)u \le V_0 u^2 \tag{3}$$

由(3)和引理 2，选取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$，我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{R^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_{R^2}\left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{h(s)}{s}u^2(s)\mathrm{d}s + \frac{h^2(|x|)}{|x|^2}\right)u^2 \mathrm{d}x - \int_{R^2} g(u)u\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{R^2} |\nabla u|^2 + \left(V(x) - V_0\right)u^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_{R^2} \frac{h^2(|x|)}{|x|^2}u^2 \mathrm{d}x \\
&\ge \left(1 - \lambda\varepsilon^2\right)\int_{R^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\int_{R^2} |u|^4 \mathrm{d}x \ge \frac{\lambda\varepsilon}{2}\int_{R^2} |u|^4 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda > 0$ 时，$u \equiv 0$。故当 $\lambda > 0$ 时，(2)没有非平凡的径向对称解。

致 谢

本文受江汉大学 2014 年度大学生创新训练项目资助，作者在此表示衷心感谢！

基金项目

江汉大学 2014 年度大学生创新训练项目 2014yb189。

参考文献 (References)

[1] Dunne, G. (1995) Self-dual Chern-Simons theories. Springer.

[2] Jackiw, R. and Pi, S.-Y. (1990) Classical and quantal non-relativistic Chern-Simons theory. *Physical Review D*, **42**, 3500-3513.

[3] Jackiw, R. and Pi, S.-Y. (1992) Self-dual Chern-Simons solitons. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **107**, 1-40.

[4] Liu, B., Smith, P., Tataru, D. (preprint) Local wellposedness of Chern-Simons-Schrödinger.

[5] Byeon, J., Huh, H. and Seok, J. (2012) Standing waves of nonlinear Schrödinger equations with the gauge field. *Journal of Functional Analysis*, **263**, 1575-1608.

[6] Huh, H. (2012) Standing waves of the Schrödinger equation coupled with the Chern-Sinons gauge field. *Journal of Mathematical Physics*, **53**, Article ID: 063702.

[7] Wan, Y. and Tan, J. (2014) Standing waves for the Chern-Simons-Schrödinger systems without (AR) condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **415**, 422-434.

[8] Wang, Z. and Zhou, H. (2007) Positive solution for a nonlinear stationary Schrödinger-Poisson system in R^3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**, 809-816.