Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 241-246
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.46035

Boundedness of Solutions of a Second Order Differential Equation via Bellman's Inequality

Ming Lu, Weimin Wang*, Lei Wu, Shaohui Liu

School of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan
Email: *645063914@qq.com

Received: Oct. 13th, 2014; revised: Oct. 31st, 2014; accepted: Nov. 4th, 2014

Abstract

By using Bellman's inequality, the boundedness of solutions of a second order differential equation is investigated. Two different forms of Bellman inequality are given, which can be used to get the boundedness of differential equations.

Keywords

Bellman Inequality, Differential Equation, Boundedness

基于Bellman不等式的一类二阶微分方程的解的有界性

卢　明，王蔚敏*，吴　磊，刘少辉

武汉科技大学理学院，武汉
Email: *645063914@qq.com

收稿日期：2014年10月13日；修回日期：2014年10月31日；录用日期：2014年11月4日

*通讯作者。

摘　要

由Bellman不等式证明一类二阶微分方程的解的有界性，给出了两种不同形式的Bellman不等式，由此可得出有关微分方程解的有界性结论。

关键词

Bellman不等式，微分方程，有界性

1. 引言

早在 1957 年，欧阳亮在文[1]中利用给出了如下引理：

若：$(1')$　$u \ge 0, v \ge 0, c > 0$

$(2')$　$u^2 \le c + \int_0^t uv\mathrm{d}t_1$

则

$$|u| \le \sqrt{c} + \frac{1}{2}\int_0^t v\mathrm{d}t_1$$

利用该引理，证明了 $y''(t) + A(t)y(t) = 0$ 这类二阶微分方程的解的有界性，并给出了相关的结论。在 2014 年，Qusuay H. Alqifiary 和 Soon-Mo Jung 在文[2]中利用 Bellman 引理证明了一类二阶微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性结论。而本文则是用 Bellman 引理 1 和引理 5，在欧阳亮[1]的基础上简化其证明过程，同时也减弱了文[1]中对二阶微分方程的系数 $A(t)$ 的要求，即只需要文[1]中定理一中的条件(i)。除此之外，本文也与文[2]中的定理 2 中对 $\psi(t)$ 的要求不同，即不需要当 $t \to \infty$ 时，$\psi(t) \to 0$。从而对于证明微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性起到了重要作用。

2. 正文

在本文中我们只讨论方程

$$y''(t) + A(t)y(t) = 0 \tag{1}$$

的解的有界性。

引理 1 [2]：若 u, v：$[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是可积函数，c 为常量且 $c > 0$，如果 u 满足不等式

$$u(t) \le c + \int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s, \quad t > 0 \tag{2}$$

则

$$u(t) \le c\exp\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right), \quad t > 0 \tag{3}$$

证明：由(2)式可得

$$\frac{u(t)v(t)}{c + \int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s} \le v(t), \quad t > 0 \tag{4}$$

对(4)式两边同时从 0 到 t 积分可得

$$\ln\left(c+\int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s\right)-\ln c\le\int_0^t v(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

整理可得

$$c+\int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s\le c\exp\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right),\quad t>0 \tag{6}$$

综合(2)式可得

$$u(t)\le c\exp\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right),\quad t>0 \tag{7}$$

利用引理 1，我们可以证明如下定理，即

定理 2：若方程(1)的系数 $A(t)>0$，$A(t)$ 和 $A'(t)$ 是可积函数，则当 $t\to\infty$ 时，(1)式的所有解有界。

证明：对(1)式两边同乘 $y'(t)$，可得

$$y''y'+Ayy'=0 \tag{8}$$

对(8)式从 0 到 t 积分并且利用分部积分可得

$$\int_0^t y''y'\mathrm{d}s+\int_0^t Ayy'\mathrm{d}s=0$$

$$\frac{1}{2}y'(t)^2-\frac{1}{2}y'(0)^2+\int_0^t A(s)y(s)y'(s)\mathrm{d}s=0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}y'(t)^2-\frac{1}{2}y'(0)^2+\frac{1}{2}A(t)y^2(t)-\frac{1}{2}A(0)y^2(0)-\frac{1}{2}\int_0^t y^2(s)A'(s)\mathrm{d}s=0 \tag{10}$$

令 $c=\left|y'^2(0)+A(0)y^2(0)\right|$ 可得

$$y'^2(t)+A(t)y^2-\int_0^t y^2(s)A'(s)\mathrm{d}s=c \tag{11}$$

那么

$$A(t)y^2(t)\le c+\int_0^t A'(s)y^2(s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

对(12)进行变形可得

$$A(t)y^2(t)\le c+\int_0^t\frac{A'(s)}{A(s)}A(s)y^2(s)\mathrm{d}s \tag{13}$$

利用引理 1 有

$$A(t)y^2(t)\le c\exp\int_0^t\frac{A'(s)}{A(s)}\mathrm{d}s \tag{14}$$

即

$$\left|y(t)\right|\le\sqrt{\frac{c}{A(0)}} \tag{15}$$

由于 c 为常量，$A(0)$ 也为一常量，故 $\frac{c}{A(0)}<\infty$。因而(1)式的解 $y(t)$ 是有界的。

我们来考虑方程

$$y''+\left(a^2+\phi(t)\right)y=0 \tag{16}$$

利用上述的(15)式我们就可以得到如下的定理，即

定理 3：若(16)满足条件 $\phi(t) > -a^2$，$t \ge 0$ 时，则当 $t \to \infty$ 时，(16)的所有解有界。

证明：令 $A(t) = a^2 + \phi(t)$，那么由(15)式可得

$$|y(t)| \le \sqrt{\frac{c_1}{A(0)}} = \sqrt{\frac{c_1}{a^2 + \phi(0)}} = M \tag{17}$$

这里的 $c_1 = y'^2(0) + \left(a^2 + \phi(0)\right) y^2(0)$。

引理 4 [Biernacko]：若方程 $u''(t) + a(t)u(t) = 0$ 的所有的解及其一阶微商有界，则方程 $u''(t) + \left(a(t) + b(t)\right)u(t) = 0$ 的所有的解在条件 $\int_0^\infty |b(t)|\mathrm{d}t < \infty$ 时保持有界。

引理 5 [3]：若 x，$\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 的实连续函数，$\chi(t) \ge 0$ 对所有的 $t \in [a,b]$，如果有不等式

$$x(t) \le \psi(t) + \int_a^t \chi(s)x(s)\mathrm{d}s \tag{18}$$

那么就有

$$x(t) \le \psi(t) + \int_a^t \chi(t)\psi(t)\exp\left[\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s \tag{19}$$

引理 6：若 $u(t), f(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是可积函数，c 为常量且 $c > 0$，如果 $u(t)$ 满足不等式

$$u^2(t) \le c^2 + 2\int_0^t f(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{20}$$

那么有

$$u(t) \le \left[c^2 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\left(c^2 + \int_0^s f(u)\mathrm{d}u\right)\exp\left[\int_s^t f(u)\mathrm{d}u\right]\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

证明：设 $v(t) = u^2(t)$，则 $u(t) = v^{\frac{1}{2}}(t)$。将上式带入(19)可得

$$v(t) \le c^2 + 2\int_0^t f(s)v^{\frac{1}{2}}(s)\mathrm{d}s$$

根据数学分析中的 young 不等式可得

$$\begin{aligned} v(t) &\le c^2 + 2\int_0^t f(s)\left(\frac{v(s)}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}s \\ &= c^2 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)v(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{22}$$

令 $\phi(t) = c^2 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，根据引理 5 可得 $u(t)^2 \le \phi(t) + \int_0^t f(s)\phi(s)\exp\int_s^t f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$

从而

$$\begin{aligned} u(t) &\le \left[\phi(t) + \int_0^t f(s)\phi(s)\exp\int_s^t f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \\ u(t) &\le \left[c^2 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\left(c^2 + \int_0^s f(u)\mathrm{d}u\right)\exp\left[\int_s^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{23}$$

定理 7：若方程

$$y''(t) + \left(a^2 + \phi(t) + \psi(t)\right)y(t) = 0 \tag{24}$$

满足下列条件

(i) $\phi(t)+\psi(t)>-a^2, t>0$，

(ii) $\int_0^\infty|\phi(t)|\mathrm{d}t<\infty, \int_0^\infty|\psi(t)|\mathrm{d}t<\infty$

则当 $t\to\infty$ 方程(21)所有的解保持有界。

证明：显然我们只需证明(16)式的解的一阶微商在 $t\to\infty$ 时有界。给(16)式两边同乘 $y'(t)$，再从 0 到 t 积分且利用分部积分可得：

$$\frac{1}{2}y'^2(t)+\frac{a^2}{2}y^2(t)+\int_0^t\phi(s)y(s)y'(s)\mathrm{d}s=c_1 \tag{25}$$

因而

$$y'^2(t)\le 2c_1+2\int_0^t\phi(s)y(s)y'(s)\mathrm{d}s \tag{26}$$

由定理 3 以及引理 5 可得

$$\begin{aligned} y'(t) &\le \left[2c_1+\int_0^t\phi(t)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\phi(s)y(s)\left(2c_1+\int_0^s\phi(u)y(u)\mathrm{d}u\right)\exp\left[\int_s^t\phi(u)y(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left[2c_1+M\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s+M\int_0^t\phi(s)\left(2c_1+M\int_0^s\phi(u)\mathrm{d}u\right)\exp\left[M\int_s^t\phi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}<\infty \end{aligned} \tag{27}$$

再根据引理 4，一阶微商有界，就可以得到方程(24)是有界的。从而证得定理 7 成立。

定理 8：若方程

$$y''(t)+\left[f(t)+g(t)\right]y(t)=0 \tag{28}$$

满足条件 $f(t)+g(t)>0, t\ge 0$，则当 $t\to\infty$ 时其所有的解保持有界。

证明：给(28)两边同乘 $y'(t)$，且从 0 到 t 积分，再利用分部积分，整理得

$$y'(t)+\left(f(t)+g(t)\right)y^2(t)=y'^2(0)+g(0)y^2(0)+\int_0^t y^2(s)\left[f'(s)+g'(s)\right]\mathrm{d}s$$

则

$$\left(f(t)+g(t)\right)y^2(t)\le y'^2(0)+g(0)y^2(0)+\int_0^t y^2(s)\left(f'(s)+g'(s)\right)\mathrm{d}s \tag{29}$$

令 $c_2=\left|y'(0)+g(0)y^2(0)\right|$

由引理 1 可得：$|y(t)|\le\sqrt{\dfrac{c_2}{f(0)+g(0)}}$。从而可证得定理 8。

致 谢

本文是在冯育强教授的精心指导下完成的。从本科入学以来，无论在学习上还是在生活中冯老师都给予我们大量的关心，鼓励和帮助，对本文的写作进行悉心的指导，提出了宝贵的意见。在此，我们想冯老师表示深深的敬意和感谢！

基金项目

武汉科技大学优秀科技人才培育项目(2008RC01)武汉科技大学大学生科技创新项目(13ZRA067)。

参考文献 (References)

[1] 欧阳亮 (1957) 有关分数阶微分方程的解的有界性. *数学进展*, **3**, 409-415.

[2] Alqifiary, Q.H. and Jung, S.-M. (2014) On the Hyers-Ulam stability of differential equations of second order. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 483707.

[3] Dragomir, S.S. (2002) Some Gronwall type inequalities and applications. Melbourene City MC, Australia.