Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 34-45
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52006

Methodology for Sum of *N* Terms of an Arithmetic Series and Its Application

Dongwu Wu

SINOPEC Guangzhou Petrochem Complex, Guangzhou Guangdong
Email: wdongu@163.com

Received: Feb. 14th, 2015; accepted: Feb. 25th, 2015; published: Mar. 3rd, 2015

Abstract

This paper introduces the methodology for calculating the sum of *N* terms of an arithmetic series with practical examples. The concept of the double-center spiral is introduced again to determine the length and diameter of a spiral heat exchanger and other plate coils as well. A related topic, the drawing and its calculation of a four-center spiral, is also presented.

Keywords

Arithmetic Series, Sum of *N* Terms, Double-Center Spiral, Polar Radius, Spiral-Plate, Heat Exchangers

等差数列的*N*项和及其应用

吴东武

中石化广州石油化工总厂，广东 广州
Email: wdongu@163.com

收稿日期：2015年2月14日；录用日期：2015年2月25日；发布日期：2015年3月3日

摘　要

本文通过计算实例，介绍了等差数列*N*项和的计算方法。双心螺线概念在本文重新提出，用以确定螺旋

板换热器和其它板卷的长度与直径。四心螺线作图法及其计算与本课题相关，在此一并作了介绍。

关键词

等差数列，*N*项和，双心螺线，极径，螺旋板，换热器

1. 等差数列的 N 项和

随着科学技术的发展，一些边缘复杂问题都能准确计算。然而，板卷这类物体，其几何尺寸至今不能准确计算。究其原因，它属数学教学内容欠缺引发的问题。在等差数列教学上，我们只讲 C.F. Gauss 在 1786 年发现的“前 n 项和”计算方法，导致学生只会计算整数项数 n 而不会计算带小数的项数 N，即便他们日后成为老师或工程师，依然如此。此 N 非彼 n，怎样计算 N?

【例 1】等差数列 6，10，14，⋯前几项的和是 120?

解：题中等差数列的首项 $a_1=6$，公差 $d=10-6=4$，设“前 n 项和” $S_n=120$，根据等差数列“前 n 项和”公式，得

$$6n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=120$$

整理得：$n^2+2n-60=0$

解得：$n_1=6.81$，$n_2=-8.81$（舍去）

$n\in$ 正整数，而 $n=6.81$，表明计算方法出了问题。但这个答案告诉了我们，此题如同一堆沙的总量为 $S_N=120$，用前面 $n=6$ 辆车去搬运后，剩余 a_N，还需要用第 $(n+1)=7$ 辆车去运，但第 7 辆车又装不满。

此时剩余量 $a_N=S_N-S_n$，它与第 $(n+1)$ 辆车运力 $a_{(n+1)}$ 的比率为

$$n_0=a_N/a_{(n+1)}，\quad a_N=a_{(n+1)}n_0$$

因此

$$S_N=S_n+a_N=\frac{1}{2}dn^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+(a_1+nd)n_0 \tag{1}$$

$$n=\left\{-(2a_1-d)+\left[(2a_1-d)^2+8dS_N\right]^{1/2}\right\}\backslash(2d) \tag{2}$$

式中 $0\le n_0<1$。

式(1)是等差数列的 N 项和，不论 N 是 $(n_0=0)$ 否 $(n_0\ne 0)$ 为整数都成立。

数列的项数

$$N=n+n_0 \tag{3}$$

当已知 S_N 求 N 时，由式(2)算出 n，再由式(1)算出 n_0，$N=n+n_0$。

本例 $a_1=6$，$d=10-6=4$，$S_N=120$，按此方法得

$$n=\left\{-(2a_1-d)+\left[(2a_1-d)^2+8dS_N\right]^{1/2}\right\}\backslash(2d)=54.481\backslash 8=6$$

$$a_n=a_1+(n-1)d=26，\quad a_{(n+1)}=a_1+nd=30$$

$$S_n=(a_1+a_n)n/2=96，\quad a_N=S_N-S_n=120-96=24$$

$$n_0 = a_N / a_{(n+1)} = 24/30 = 0.8$$

$$N = n + n_0 = 6.8$$

等差数列 6，10，14，⋯的 6.80 项和是 120。

早前数学家是以 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，⋯表述等差数列，且一直被沿用至今。也许他感觉到在 a_n 后面还应有什么项，但又不清楚，因此，他只能严谨地以省略号结束此数列，这样表述的数列是不完整的，故有“前 n 项和”

$$S_n = (a_1 + a_n) n/2 = dn^2/2 + (a_1 - d/2) n$$

项数

$$n = \left\{ -(2a_1 - d) + \left[(2a_1 - d)^2 + 8dS_n \right]^{1/2} \right\} \Big/ (2d)$$

式中项数 $n \in$ 正整数，S_n 前 n 项和，a_1 首项，a_n 通项，d 公差。

数列的省略号代表的究竟是什么？因为在 a_n 之后，不可能是其它整数项，只能是带小数项 a_N 和句号。这个数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_N$。才是原本的等差数列，数列的结尾项 a_N 后再无其它项，因此，数列的各项和 $S_N = S_n + a_N$。

数列各项和 S_N 的计算方法，其项数 $N = n + n_0$，不仅适用于双心螺线计算，也适用于四心螺线的计算。带小数项 $a_N = a_{(n+1)} n_0$ 虽然简单至极，不屑一顾，但它完善了 200 多年前的等差数列各项和的计算方法，它将给人们带来更多联想与创新。

2. 双心螺线

顾名思义，双心螺线有二个圆心 O_1 与 O_2 的螺旋线(图 1)，圆心距 $O_1O_2 = t/2$。它与其它螺线一样，有一个极点，二圆心的中点 O 是它的极点，$O_2O = OO_1 = t/4$。双心螺线在上世纪 50 年代初，我国采用苏联教材曾有过这个概念，此后便消失了。然而，在实际工作中，我们经常见到双心螺旋线这类物体——板卷。板卷以有无板间距可分为二类，一类是无板间距的板卷，如螺旋弹簧和冷轧钢板卷等，其板厚为 δ，$t = \delta$；另外一类是有板间距的板卷，如螺旋板换热器等，板间距为 b_1 和 b_2，$t = b_1 + b_2 + 2\delta$。由于人们不能准确计算板卷的长度与直径，而今重新提出双心螺线这个概念及其计算方法，很有必要，因为它是板卷计算的基础，也是现代学生应当了解的基础知识。

设双心螺线的始点为 M_0，以 O_2 为圆心的初始半圆直径为 d_1，以 O_1 为圆心第二个半圆直径为 $(d_1 + t)$，又以 O_2 为圆心第三个半圆直径为 $(d_1 + 2t)$，相连二个半圆的直径差为 t。显然，螺线由内往外，各圈(以 π 弧度为 1 圈)长度 l 构成一个以 l_1 为首项，公差 $d = \pi t/2$ 的等差数列：

$$l_1 = \pi d_1/2,\ l_2 = \pi(d_1 + t)/2,\ l_3 = \pi(d_1 + 2t)/2,\ \cdots,\ l_n = \pi\left[d_1 + (n-1)t\right]/2,\ l_N = \pi(d_1 + nt) n_0/2$$

双心螺旋长度依据等差数列各项和 $S_N = S_n + a_N$ 计算方法，得

$$L = \frac{1}{4}\pi t n^2 + \frac{\pi}{2}\left(d_1 - \frac{t}{2}\right) n + \frac{\pi}{2}(d_1 + nt) n_0 \tag{4}$$

$$n = \left\{ -(d_1 - t/2) + \left[(d_1 - t/2)^2 + 4tL/\pi \right]^{1/2} \right\} \backslash t \tag{5}$$

式中 $0 \le n_0 < 1$。

各圈圆弧半径 R 也构成一个以 R_1 为首项，$t/2$ 为公差的等差数列：

$$R_1 = d_1/2,\ R_2 = d_1/2 + t/2,\ R_3 = d_1/2 + t,\ \cdots,\ R_n = d_1/2 + (n-1)t/2。$$

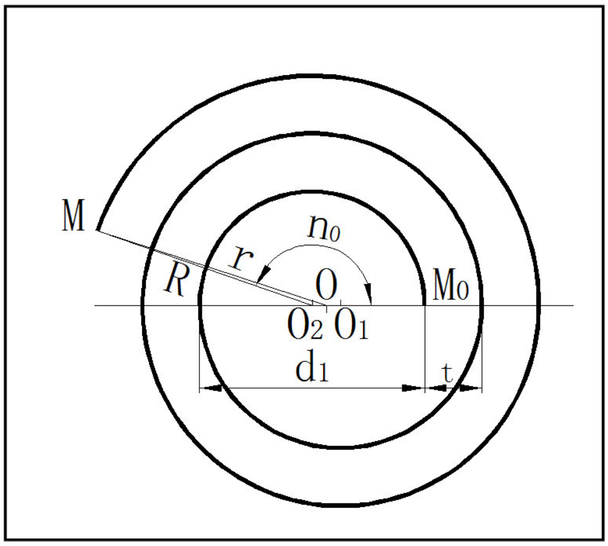

Figure 1. Double-center spiral
图 1. 双心螺线

终点 M 的圈数为 N，其所在圆弧半径 $R = R_{(n+1)} = d_1/2 + nt/2$。在 ΔMO_2O 中，$OM = r$，$O_2O = t/4$，$MO_2 = R$，$\angle MO_2O = \pi n_0$。

双心螺线的极径，根据余弦定理得

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{Rt}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} \tag{6}$$

$$n = \left(r - r_0\right) \backslash \left(t/2\right) \tag{7}$$

其中 r_0 是始点极径，$r_0 = d_1/2 + t/4$，$0 \le n_0 < 1$。

当已知 L 或 r 求 N 时，首先按式(5)或(7)算出 n，再由式(4)或(6)算出 n_0。螺线圈数 $N = n + n_0$，此圈数是以圆心角 π 弧度为 1，即是半圆的个数。

【例 2】双心螺线的长度 $L = 1.155$ m，$d_1 = 0.1146$ m，$t = 0.0181$ m，计算螺线的圈数 N，极径 r 和螺线直径 D。

解：双心螺线长度 $L = 1.155$ m，$d_1 = 0.1146$ m，$t = 0.0181$ m，由公式(5)得：

$$n = \left\{-\left(d_1 - t/2\right) + \left[\left(d_1 - t/2\right)^2 + 4tL/\pi\right]^{1/2}\right\} \backslash t = 0.0888 \backslash 0.0181 = 4$$

以 $n = 4$ 代入公式(4)解得：$n_0 = 0.9$

$$N = n + n_0 = 4.9。$$

终点所在圆弧半径 $R = d_1/2 + nt/2 = 0.0935$ m，极径

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{Rt}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} = 0.09781 \text{ m}。$$

螺线的直径是指终点 M 至 MO 延长线与前一圈螺线交点之间的直线距离，它等于这二点的极径之和。交点的极径为 $r_{(N-1)}$，因此，螺线直径 $D = r + r_{(N-1)}$。

$$R_{(N-1)} = d_1/2 + \left(n-1\right)t/2 = 0.08445 \text{ m} \quad r_{(N-1)} = \sqrt{R_{(N-1)}^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{R_{(N-1)}t}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} = 0.08876 \text{ m}$$

$$D = r + r_{(N-1)} = 0.09781 + 0.08876 = 0.18657\ \text{m}。$$

3. 螺旋板换热器

瑞典人 Rosemblad 在 1930 年提出螺旋板换热器的结构，它是由两块厚度为 δ 的钢板制成的有板间距的板卷，有两条宽度(板间距)为 b_1 和 b_2 的螺旋通道，冷热介质在各自通道中流动换热，是紧凑高效而应用广泛的换热设备。螺旋板换热器是等差数列和双心螺线的应用实例。

在螺旋板换热器(图 2)中，螺线相连二半圆的直径差 $t = (b_1 + b_2 + 2\delta)$，螺旋通道的初始半圆直径 $d_{f1} = d_{21} + b_1 + 2\delta$，由式(4)得螺旋通道长度

$$L = \frac{1}{4}\pi t n^2 + \frac{\pi}{2}\left(d_{f1} - \frac{t}{2}\right)n + \frac{\pi}{2}\left(d_{f1} + nt\right)n_0 \tag{8}$$

$$n = \left\{-\left(d_{f1} - t/2\right) + \left[\left(d_{f1} - t/2\right)^2 + 4tL/\pi\right]^{1/2}\right\} \backslash t \tag{9}$$

当已知 L 求 N 时，首先由式(9)算出 n，再由式(8)算出 n_0， $N = n + n_0$。

螺旋板 2 围成的内侧半圆直径 d_{21}，板内始点极径 $r_{02} = d_{21}/2 - t/4$，宽度为 b_2 的通道与此半圆柱体相通；螺旋板 1 的内侧半圆直径 $d_{11} = d_{21} + b_1 - b_2$，板内始点极径 $r_{01} = d_{11}/2 - t/4$，宽度为 b_1 的通道与此半圆柱体相通。

螺旋板 1，2 的初始半圆直径分别为 $d_1 = d_{11} + \delta$ 和 $d_1 = d_{21} + \delta$；终点 [1] 极径分别为 r_1 和 r_2。将 d_1 代入双心螺线长度公式(4)，便得到相应螺旋板 1，2 的长度公式。

螺旋通道圈数 N 比螺旋板圈数 N_p 少 1 圈

$$N_p = N + 1 \tag{10}$$

螺旋板换热器的外径等于两螺旋板外侧终点的极径之和

$$D_o = \left(r_1 + \delta/2\right) + \left(r_2 + \delta/2\right) = r_1 + r_2 + \delta \tag{11}$$

根据双心螺线的极径公式(6)得螺旋板 1，2 终点的极径

$$r_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{R_1 t}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} \tag{12}$$

其中 $R_1 = d_{11}/2 + nt/2 + \delta/2$

$$r_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{R_2 t}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} \tag{13}$$

其中 $R_2 = d_{21}/2 + nt/2 + \delta/2$

$$n = \left[D_o - \left(r_{01} + r_{02}\right) - 2\delta\right] \backslash t \tag{14}$$

当已知 D_o 求 N 时，首先由式(14)算出 n，再由式(11)~(13)算出 n_0， $N = n + n_0$。

【例 3】从螺旋板换热器的传热计算得到螺旋通道长 $L = 26.61\ \text{m}$，螺旋板的厚度 $\delta = 0.0045\ \text{m}$，通道宽度 $b_1 = b_2 = 0.014\ \text{m}$，螺旋板的初始内径 $d_{11} = d_{21} = 0.3\ \text{m}$。计算螺旋板的长度 L_1 和换热器外径 D_o。

解： $t = 2\left(b_1 + \delta\right) = 0.037\ \text{m}$，通道初始直径 $d_{f1} = d_{21} + b_1 + 2\delta = 0.323\ \text{m}$， $L = 26.61\ \text{m}$。

$$n = \left\{-\left(d_{f1} - t/2\right) + \left[\left(d_{f1} - t/2\right)^2 + 4tL/\pi\right]^{1/2}\right\} \backslash t = 23$$

[1] 在换热器横截面上，螺旋板终端有三个(外侧，内侧和中间)计算终点，螺旋板终点是中间计算终点。当 N_p 为带小数时，三个计算终点的圆心角(πn_0)不相等。作者以前论文视它们的圈数 n_0 相等并用于计算是错误的，现已更正，尽管误差极微。

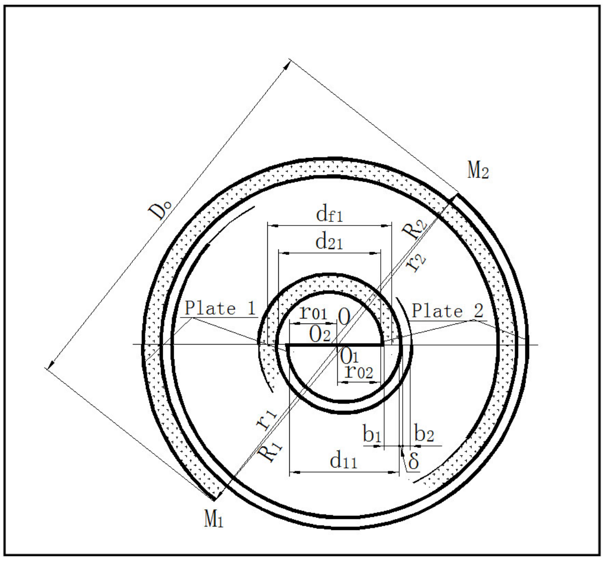

Figure 2. Calculation diagram of the SHEs
图 2. 螺旋板换热器计算示图

由(8)式

$$L = \frac{1}{4}\pi t n^2 + \frac{\pi}{2}\left(d_{f1} - \frac{t}{2}\right)n + \frac{\pi}{2}\left(d_{f1} + nt\right)n_0$$

得：$n_0 = 0.1281$。

螺旋通道圈数 $N = 23.1281$。

螺旋板圈数 $N_p = N + 1 = 24.1281$。

螺旋板 1 的初始直径 $d_1 = d_{11} + \delta = 0.3045\ \text{m}$，$t = 0.037\ \text{m}$，由(4)式

$$L = \frac{1}{4}\pi t n^2 + \frac{\pi}{2}\left(d_1 - \frac{t}{2}\right)n + \frac{\pi}{2}\left(d_1 + nt\right)n_0$$

得螺旋板长 $L_1 = 27.76\ \text{m}$。

螺旋板终点所在圆弧的半径。

$$R_1 = d_{11}/2 + nt/2 + \delta/2 = 0.59625\ \text{m}$$

由(12)式得：$r_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2 - \frac{R_1 t}{2}\cos\left(\pi n_0\right)} = 0.58775\ \text{m}$

由(11)式得：换热器外径 $D_o = 2r_1 + \delta = 1.18\ \text{m}$。

4. 四心螺线

四心螺线也是阿基米德螺线 $r = a\theta = r_0 + S\theta/(2\pi)$ 的类似曲线，它或许是阿基米德或其他数学家在研究螺线长度时发现并流传下来的。四心螺线是由不同半径的劣弧连成的曲线，它有 4 个圆心和一个极点 O，此 4 个圆心构成以极点 O 为中心的正方形 ABCD，螺线的始点极径为 r_0。四心螺线的几何画法如下：

作相互垂直且交于 O 点的直线 X 和 Y，如图 3 所示。以 O 点为中心，作边长为 $S/4$ 的正方形 ABCD，AD 与 AB 边分别与直线 Y 和 X 相交于 m_1 和 m_2。在 X 上取点 M_0，使 $OM_0 = r_0$。

以 A 为圆心，M_0 为始点，$AM_0 = R_1$ 为半径画弧交 Y 于 M_1；

以 B 为圆心，M_1 为始点，$BM_1 = R_2$ 为半径画弧交 X 于 M_2；

以 C 为圆心，M_2 为始点，$CM_2 = R_3$ 为半径画弧交 Y 于 M_3；

以 D 为圆心，M_3 为始点，$DM_3 = R_4$ 为半径画弧交 X 于 M_4；

又以 A 为圆心，M_4 为始点，$AM_4 = R_5$ 为半径画弧……，如此重复画弧，便得到一条如图 4 所示 1:1 的四心螺线。

在工程上，四心螺线也可以用来加工螺旋板换热器，螺旋板的段数 $N_p = N + 2$，N 为螺旋通道段数，换热器外径 $D_o = r_1 + r_2 + \delta$，r_1 和 r_2 为二螺旋板终点极径。

四心螺线的长度和极径的计算理论依据，仍然是数列的各项和与余弦定理，但比双心螺线的计算要烦琐一些。

设四心螺线的始点 M_0 至下一圈(2π 弧度)始点 M_4 间的直线距离为螺线距 S，每圈螺线由 4 段圆弧组成，每段弧的圆心角为 φ，极角为 θ，$\theta_{\max} = \pi/2$。

螺线首段弧的始点极径为 r_0，在直角三角形⊿Am_2M_0 与⊿Am_1M_1 中，

$\because AM_0 = AM_1 = R_1$，$Am_2 = Am_1 = S/8$，$\angle Am_2M_0 = \angle Am_1M_1 = \pi/2$

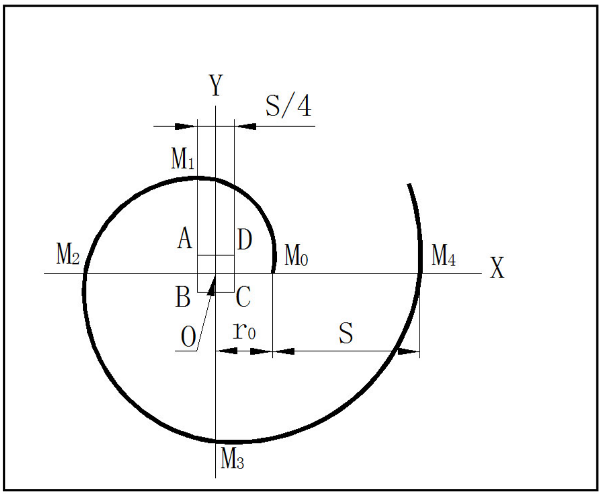

Figure 3. 4-center spiral
图 3. 四心螺线

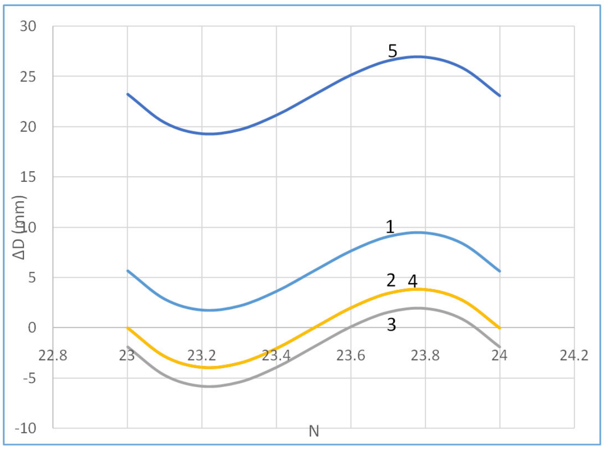

Figure 4. Error assessment of mainstream formula
图 4. 主流公式误差曲线

$\therefore \triangle Am_2M_0 \cong \triangle Am_1M_1$

$\therefore M_1m_1 = M_0m_2 = r_0 + S/8$

$\therefore R_1 = \left[\left(r_0 + S/8\right)^2 + \left(S/8\right)^2\right]^{0.5}$

$\therefore M_1O = M_1m_1 + m_1O = \left(r_0 + S/8\right) + S/8 = r_0 + S/4$

M_1O 为首段弧终点 M_1 的极径，也是第二段 M_1M_2 弧始点 M_1 的极径 $r_{02} = r_0 + S/4$。如此类推，第三段和第四段始点 M_2 和 M_3 极径为 $r_{03} = r_0 + 2S/4$ 和 $r_{04} = r_0 + 3S/4$，…

整段弧的圆心角为 $\pi/2$。过点 M_1 作与 AD 边平行的直线，此直线和 BA 延长线相交于 a

$\because \angle AM_0m_2 = \angle AM_1m_1 = \angle M_1Aa$

$\therefore \angle m_2AM_0 + \angle M_1Aa = \pi/2$

$\therefore$ 圆心角 $\varphi = \angle M_1AM_0 = \pi - \left(\angle m_2AM_0 + \angle M_1Aa\right) = \pi/2$

因此，各段弧的最大圆心角 $\varphi_{max} = \pi/2$。将上述归纳成四心螺线弧与点的关系表 1。

从表 1 可以看出，各段圆弧的始点极径，构成 $a_1 = r_0$， $d = S/4$ 的等差数列

第 n 段圆弧的始点极径

$$r_{0(n-1)} = r_0 + \left(n-1\right)S/4 \tag{15}$$

但相连圆弧的半径差不相等，不能构成等差数列。第 n 段圆弧的半径

Table 1. Relationship between arc and points of 4-center spiral
表 1. 四心螺线弧与点的关系

段序	始/终点		极径 r/半径 R	弧长 l
	始点	M_0	r_0	
第 1 段弧			$R_1 = \left[\left(r_0 + S/8\right)^2 + \left(S/8\right)^2\right]^{0.5}$	$l_1 = \pi R_1/2$
	终点	M_1	$r_{01} = r_0 + S/4$	
	始点			
第 2 段弧			$R_2 = \left[\left(r_0 + 3S/8\right)^2 + \left(S/8\right)^2\right]^{0.5}$	$l_2 = \pi R_2/2$
	终点	M_2	$r_{02} = r_0 + 2S/4$	
	始点			
第 3 段弧			$R_3 = \left[\left(r_0 + 5S/8\right)^2 + \left(S/8\right)^2\right]^{0.5}$	$l_3 = \pi R_3/2$
	终点	M_3	$r_{03} = r_0 + 3S/4$	
…	…		…	…
	始点	$M_{(n-1)}$	$r_{0(n-1)} = r_0 + \left(n-1\right)S/4$	
第 n 段弧			$R_n = \left\{\left[r_0 + \left(2n-1\right)S/8\right]^2 + \left(S/8\right)^2\right\}^{0.5}$	$l_n = \pi R_n/2$
	终点	M_n	$r_{0n} = r_0 + nS/4$	
第(n+1)段弧 第 N 段弧	始点			
	任意点	M	$^*R_{(n+1)}$ r_N	$l_N = \pi R_{(n+1)} n_0/2$
	终点	$M_{(n+1)}$	$r_{0(n+1)} = r_0 + \left(n+1\right)S/4$	$l_{(n+1)} = \pi R_{(n+1)}/2$

*注： $R_{(n+1)} = \left\{\left[r_0 + \left(2n+1\right)S/8\right]^2 + \left(S/8\right)^2\right\}^{0.5}$。

$$R_n=\left[\left(r_{0(n-1)}+S/8\right)^2+\left(S/8\right)^2\right]^{0.5}=\left\{\left[r_0+(2n-1)S/8\right]^2+\left(S/8\right)^2\right\}^{0.5} \tag{16}$$

因此，四心螺线的 n 段圆弧长度和为

$$L_n=\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left[r_0+(2n-1)\frac{S}{8}\right]^2+\left(\frac{S}{8}\right)^2} \tag{17}$$

依据数列的各项和 $S_N=S_n+a_N$，得四心螺线长度

$$L_N=L_n+l_N \tag{18}$$

第 N 段圆弧长度

$$l_N=l_{(n+1)}n_0=n_0\left\{\left[r_{01}+(2n+1)S/8\right]^2+\left(S/8\right)^2\right\}^{0.5}\pi/2 \tag{19}$$

螺线段数

$$N=n+n_0 \tag{20}$$

其中 n 为整数，$0\le n_0<1$。

四心螺线只有各段圆弧的始点极径 r_{0n} 能构成等差数列，而各段圆弧半径 R_n 不能形成等差数列，四心螺线长度 L_N 按公式(17)计算。当已知 L_N 求 N 时，由于 $L_n\le L_N<L_{(n+1)}$，方程有二个未知数 n 和 n_0，先以 Excel 电子表格算出公式(16)的 L_n 和 n，再以(17)(18)式算出 n_0。

在“四心螺线弧与点的关系表”中，四心螺线点 M 的极径 r_N：在点 M，M_n 分别与圆心极点连线构成的二个三角形中，连线长为 $2^{0.5}S/8$，极径 r_N 的对角为圆心广角 $\left[\pi\left(n_0+n_{0n}\right)/2\right]$，始点极径 r_{0n} 对角为圆心余角 $\left(\pi n_{0n}/2\right)$，四心螺线点 M 的极径

$$r_N=\sqrt{R_{(n+1)}^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}S\right)^2-\frac{\sqrt{2}R_{(n+1)}S}{4}\cos\left(\frac{n_0+n_{0n}}{2}\pi\right)} \tag{21}$$

$$\cos\left(\frac{\pi n_{0n}}{2}\right)=4\frac{R_{(n+1)}^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}S\right)^2-r_{0(n+1)}^2}{\sqrt{2}R_{(n+1)}S} \tag{22}$$

式中 $\pi n_0/2$ 为圆心角，rad；$\left(\pi n_{0n}/2\right)$ 为圆心余角，rad

双心螺线和四心螺线都是阿基米德螺线 $r=a\theta$ 的类似曲线，阿基米德螺线的极径 $r=a\theta=S\theta/(2\pi)$。阿基米德螺线长度 $L=\frac{S}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{S}{4\pi}\left[\theta_1\sqrt{\theta_1^2+1}+\ln\left(\theta_1+\sqrt{\theta_1^2+1}\right)-\theta_0\sqrt{\theta_0^2+1}-\ln\left(\theta_0+\sqrt{\theta_0^2+1}\right)\right]$。

5. 主流公式及其计算误差

主流公式是指换热器专著，设计手册和行业标准采用的螺旋板换热器几何计算公式。由于人们此前不会计算等差数列各项和的项数 N，曾出现了各种类型的公式，外径共有五类 8 种公式，归纳如下：

① 日本学者以理论上不能成立的螺旋通道圈数[1]-[6]

$$N=\frac{-\left(d_0+\frac{b_1-b_2}{2}\right)+\sqrt{\left(d_0+\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2+\frac{4L}{\pi}\left(b_1+b_2+2t_S\right)}}{b_1+b_2+2t_S}$$

用来计算换热器的外径

$$D_O = d_0 + \left(b_1 + t_S\right) + N\left(b_1 + b_2 + 2t_S\right)$$

其中 $d_0 = d_{21}$， $t_s = \delta$。

此类公式从上世纪六十年代起，被日中两国化工学者广泛采用。

② 中国有学者以[7] [8]“前 n 项和”公式，导出螺旋通道长度公式

$$L = \frac{\pi}{2} N\left[N\left(b+\delta\right)+\delta+d\right]$$

并以此式 N 计算螺旋长轴内径(即换热器内径)

$$D_B = d + \left(b+\delta\right) + 2N\left(b+\delta\right)$$

其中 $d = d_{21}$， $b = b_1 = b_2$。

③ 美国学者 Minton [9]采用螺旋板的长度直接计算换热器的外径

$$D_s = \sqrt{15.36L\left(d_{sc} + d_{sh} + 2p\right) + C^2} \quad \text{(英制)}$$

由此引出公制公式

$$D_o = \sqrt{1.28tL_2 + d_{21}^2} \quad \text{(公制)}$$

其中 C 对应 d_{21}， t 对应 $\left(d_{sc} + d_{sh} + 2P\right)$， L 对应 L_2。

④ 中国也有学者[10]以“前 n 项和”公式，导出错误的 n 圈螺旋板总长公式

$$l_0 = \left(2\pi r_1 - \pi b\right)n + 2\pi bn^2$$

并以此式 n 计算换热器的外径

$$D_o = d + 2nb + \delta$$

此类公式按常理，其螺旋板的长度应当是：

$$l_0 = \left(2\pi r_1 - \pi b\right)n/2 + \pi bn^2/2$$

$$bn^2 + \left(d-b\right)n - 2l_0/\pi = 0$$

$$n = \left\{-\left(d-b\right) + \left[\left(d-b\right)^2 + 8bl_0/\pi\right]^{0.5}\right\}/\left(2b\right)$$

换热器外径 D_o 也应当是：

$$D_o = d + \left(2n-1\right)b + \delta$$

其中 b 为“每一螺旋所根据的圆心彼此相距”， $b = t/2$， $d = 2r_1 = d_{21} + \delta$

⑤ 中国还有学者，采用与第①类螺旋通道圈数相似的通道圈数公式[11]-[13]

$$N_Y = \frac{\left(\frac{b_1+b_2}{2} - d_1\right) + \sqrt{\left(d_1 - \frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 + \frac{4L_{Y1}}{\pi}\left(b_1+b_2+2\delta\right)}}{b_1+b_2+2\delta}$$

来计算换热器的外径 D_o：

当螺旋板终端的截面法线与中心隔板的平面法线平行时

$$D_o = \left(d_1 - b_1 + \delta\right) + N_B\left(b_1 + b_2 + 2\delta\right)$$

当螺旋板终端的截面法线与中心隔板的平面法线垂直时

若 $N_B-1.5$ 为奇数

$$D_o=\sqrt{\left[\left(\frac{d_1}{2}+\delta\right)+\frac{N_B+0.5}{2}(b_2+\delta)+\frac{N_B-1.5}{2}(b_1+\delta)\right]^2-e_1^2}$$
$$+\sqrt{\left[\left(\frac{d_2}{2}+\delta\right)+\frac{N_B+0.5}{2}(b_1+\delta)+\frac{N_B-1.5}{2}(b_2+\delta)\right]^2-e_2^2},$$

若 $N_B-1.5$ 为偶数

$$D_o=2\sqrt{\left[\left(\frac{d_1}{2}+\delta\right)+\frac{N_B-0.5}{2}(b_1+b_2+2\delta)\right]^2-e_1^2}$$

其中 $d_1=d_{21}$。

在这五类 8 种公式中，哪类公式比较准确？很难以公式判断，只能通过实例计算并以外径之差 ΔD 作比较，才能断定。

首先以【例 3】螺旋板换热器的设计参数，按双心螺线方程，算出螺旋通道在 $N=23.0, 23.1, 23.2, \cdots, 24.0$ 的长度 L 和在 $N_p=24.0, 24.1, 24.2, \cdots, 25.0$ 的螺旋板长度 L_1 以及换热器的相应外径 $2(r_1+\delta/2)$。

然后以第①、②、③、④和第⑤(两法线平行)类公式依照 L 或 L_1 计算出相应的外径 D_o，外径之差 $\Delta D=2(r_1+\delta/2)-D_o$。

双心螺线方程和这 5 类公式以 Excel 电子表格计算并作图。由于第④类公式误差 ΔD 太大(424.5~444.9 mm)，故放弃，便得到如图 4 所示的 4 条曲线：其中曲线 2 与 4 重合，曲线 1，2，3，4，5 分别是第①，②，③，④(常理)，⑤(两法线平行)类公式的误差，曲线一目了然，不再赘述。

6. 结束语

等差数列的各项和与双心螺线方程是板卷和螺旋板换热器计算的基础，也是现代学生应该了解的基础知识。为避免后人重复我们的错误，最简单有效的方法，就是在中学数学课本上，增加例 1 例 2 类似的题解内容；在螺旋板换热器相关论著中增加例 3 类似的题解内容。

致 谢

自从 1999 年发现《化学装置》杂志“螺旋板热交换器的设计”修改一元二次方程求根公式以来，在这十六年等差数列各项和的应用研究工作中，得到了于德兰，李浩明，吴志文，李志松与曾广生等友人的友情帮助，在此一并致以诚挚的感谢！

参考文献 (References)

[1] 化学装置编辑部 (1966) 涡卷板式热交换器的设计. *化学装置*, **7**, 43-49.
[2] 尾花英朗 (1982) 热交换器设计手册. 徐中权译. 石油工业出版社, 北京.
[3] 毛希澜 (1988) 换热器设计. 上海科学技术出版社, 上海, 269-279.
[4] 时钧, 汪家鼎, 余国琮, 等 (1996) 化学工程手册. 化学工业出版社, 北京.
[5] 袁一 (1999) 化学工程师手册. 机械工业出版社, 北京.
[6] 余国琮 (2003) 化工机械工程手册. 化学工业出版社, 北京.
[7] 王松汉 (2002) 石油化工设计手册. 化学工业出版社, 北京.

[8] 中国石化集团上海工程有限公司 (2003) 化工工艺设计手册(第三版). 化学工业出版社, 北京.

[9] Minton, P.E. (1970) Union carbide corp. Designing spiral-plate heat exchangers. *Chemical Engineering Journal*, **77**, 103-112.

[10] 朱聘冠 (1987) 换热器的原理及计算. 清华大学出版社, 北京.

[11] 钱颂文 (2002) 换热器设计手册. 化学工业出版社, 北京.

[12] 中华人民共和国国家经济贸易委员会发布中华人民共和国行业标准 螺旋板式换热器 JB/T4751-2003.

[13] 董其伍, 张垚, 等 (2009) 换热器. 化学工业出版社, 北京.