Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 85-88
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52013

The Properties of Rank 1 Matrix and Its Application in Statistics

Shumei Guo, Jie Guo

Department of Science, The People's Liberation Army Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: 8132430@qq.com

Received: Mar. 17th, 2015; accepted: Mar. 26th, 2015; published: Mar. 31st, 2015

Abstract

Rank 1 matrices is the product of the n dimensional column vectors x and x^T. This paper discussed some properties of the matrices with rank 1, like the structure, multiplication, eigenvalues and eigenvectors etc., and further analyzed the applications of the matrices applied in Statistics.

Keywords

Column Vector, Symmetrical Matrix, Properties, Statistics, Application

秩1矩阵的性质及其在统计学中的应用

郭淑妹，郭　杰

信息工程大学理学院，河南　郑州
Email: 8132430@qq.com

收稿日期：2015年3月17日；录用日期：2015年3月26日；发布日期：2015年3月31日

摘　要

n维列向量x与x^T的乘积，为秩为1的矩阵xx^T。本文对这种秩1矩阵的结构、乘法运算、特征值与特征向量等性质进行了讨论，结合这些性质重点讨论了秩1矩阵在统计学中的应用。

关键词

列向量，对称阵，性质，统计，应用

1. 引言

秩 1 矩阵是线性代数中一类非常重要的矩阵，它可以表示为一个非零列向量 n 维列向量与一个 n 维非零行向量的乘积。文献[1]与文献[2]已经讨论了秩 1 矩阵的一些性质，其中文献[2]还拓展和优化了一些结论。本文主要讨论由 n 维列向量 x 与 x^{T} 乘积构成的秩 1 矩阵 xx^{T}。现从矩阵的结构、乘法运算、特征值与特征向量等方面总结了矩阵 xx^{T} 的性质，并且结合这些优良的性质，重点讨论了秩 1 矩阵 xx^{T} 在统计学中的应用。

2. xx^{T} 的性质

设 x 为一个 n 维的列向量设为 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，那么 $xx^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{bmatrix}$，可以得出 xx^{T} 具有以下性质。

2.1. xx^{T} 为对称阵

证明：根据矩阵的乘积，得到 $xx^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{bmatrix}$，容易得出 xx^{T} 为对称阵。

2.2. xx^{T} 的秩为 1

证明：因为 $R\left(xx^{\mathrm{T}}\right)\le\min\left\{R(x),R\left(x^{\mathrm{T}}\right)\right\}$，$R\{x\}=1,R\left\{x^{\mathrm{T}}\right\}=1$，$xx^{\mathrm{T}}$ 非零，所以 $R\left(xx^{\mathrm{T}}\right)=1$。

2.3. xx^{T} 有两个实特征值，分别是 $x^{\mathrm{T}}x$ 和 0，且 xx^{T} 非负定

证明：求解特征方程 $\left|xx^{\mathrm{T}}-\lambda E\right|=0$，把 xx^{T} 代入得特征方程为 $\begin{vmatrix} x_1^2-\lambda & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2-\lambda & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2-\lambda \end{vmatrix}=0$，假设 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$，方程左边的特征多项式第一列提取出 x_1，第二列提取出 x_2，…，第 n 列提取出 x_n 得

$$x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} x_1-\dfrac{\lambda}{x_1} & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2-\dfrac{\lambda}{x_2} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n-\dfrac{\lambda}{x_n} \end{vmatrix}$$

把第二列至第 n 列分别减去第一列得

$$x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} x_1-\dfrac{\lambda}{x_1} & \dfrac{\lambda}{x_1} & \cdots & \dfrac{\lambda}{x_1} \\ x_2 & -\dfrac{\lambda}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & -\dfrac{\lambda}{x_n} \end{vmatrix}$$

把第 i 列乘以 $\dfrac{x_i^2}{\lambda}$ 加到第一列得

$$x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} x_1-\dfrac{\lambda}{x_1}+\dfrac{x_2^2}{x_1}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{x_1} & \dfrac{\lambda}{x_1} & \cdots & \dfrac{\lambda}{x_1} \\ 0 & -\dfrac{\lambda}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\lambda}{x_n} \end{vmatrix}=\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^{n-1}$$

所以，xx^{T} 的特征值为

$\lambda_1=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=x^{\mathrm{T}}x,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，其中 0 为 $n-1$ 重特征根。

由 xx^{T} 的特征值 $\lambda\ge 0$ 判定矩阵 xx^{T} 为非负定阵。

2.4. 0 为 xx^{T} 的特征值，其重数为 $n-1$，并且对应一个 $n-1$ 维的线性子空间作为 0 的特征空间

证明：因为 xx^{T} 的秩为 1，所以 $xx^{\mathrm{T}}-0\cdot E$ 的秩也为 1，根据线性方程组解的结构可得，对应特征值 0 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，从而对应一个 $n-1$ 维的线性子空间作为 0 的特征空间。

2.5. 特征值 $x^{\mathrm{T}}x$ 和 0 的特征空间是相互正交的

证明：因为列向量 x 非零，所以 $x^{\mathrm{T}}x\ne 0$，对称阵不同的特征值对应的特征向量正交，所以特征值 $x^{\mathrm{T}}x$ 和 0 的特征空间是相互正交的。

2.6. 当 x 为一个 n 维单位列向量时，xx^{T} 为幂等阵，特征值只能是 1 或 0，并且 xx^{T} 为投影阵

证明：$xx^{\mathrm{T}}xx^{\mathrm{T}}=x\left(x^{\mathrm{T}}x\right)x^{\mathrm{T}}$，因为 x 为一个 n 维的单位列向量，$x^{\mathrm{T}}x=1$ 所以 $xx^{\mathrm{T}}xx^{\mathrm{T}}=x\left(x^{\mathrm{T}}x\right)x^{\mathrm{T}}=xx^{\mathrm{T}}$ 所以 xx^{T} 为幂等阵。

此时特征值为 0 和 1，特别此时 xx^{T} 既为幂等阵又为对称阵，所以 xx^{T} 为投影阵。

3. x 与 x^{T} 及 xx^{T} 在统计上的应用

矩阵是工程技术等学科发展的重要工具，特别是研究线性模型最基本的工具之一，在线性模型的发展中具有举足轻重的地位，许多地方需要矩阵代数方面高超的运算技巧。x 与 x^{T} 是比较简单和常见的矩阵，在线性模型中处处可见，并且由于其优良的性质，所以在统计上具有巧妙的应用。

3.1. 多元正态分布

多元正态分布在数理统计中的很多分支占有重要地位，那么多元正态是怎样定义的呢?先看一个定理。

定理 1、设 Y 是 n 维随机向量，$Y\sim N_n\left(\mu,\Sigma\right),\Sigma>0$，则对任一 n 维列向量 $x,x\ne 0$，当且仅当

$x^{\mathrm{T}}Y \sim N_n\left(x^{\mathrm{T}}\mu, x^{\mathrm{T}}\Sigma x\right)$。

证明：必要性设 $R(\Sigma)=r$，存在 $n\times r$ 矩阵 A，$R(A)=r$，Y 可表示为 $Y=AU+\mu, A^{\mathrm{T}}A=\Sigma, U\sim N\left(0,I_r\right)$，这里。

$U=\left(u_1,\cdots,u_r\right)^{\mathrm{T}}, u_i \sim N\left(0,I_r\right)$ 且相互独立，μ 为 $n\times 1$ 非随机向量。

于是 $x^{\mathrm{T}}Y=x^{\mathrm{T}}AU+x^{\mathrm{T}}\mu$，根据定义文献[3]可得 $x^{\mathrm{T}}Y\sim N_n\left(x^{\mathrm{T}}\mu, x^{\mathrm{T}}\Sigma x\right)$。

充分性由特征函数的唯一性可以得到文献[3]。

这个定理表明，一个多元正态向量的任一线性组合仍为一元正态向量。同样可以得出一个多维随机向量的任一线性组合都是一元正态的，那么这个多维随机向量服从多元正态分布，就从无密度函数的角度定义了多元正态分布。

3.2. 对称阵的谱分解

对称阵的谱分解是基于特征值和特征向量的分解，在多元统计分析的许多方法中起了重要的作用。

对称阵 A 可以表为它的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和相应标准化特征向量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 $A=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j x_j^{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j A_j$，这里 $A_j=x_j x_j^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的 n 阶方阵，就把对称阵 A 表示成了 n 个对称阵 $A_j=x_j x_j^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，其线性组合系数为相应的特征值，其实也就是 A_i 的加权和，对称阵的谱分解和对角化放在一起就是谱定理文献[4]。

3.3. 在定理证明中的应用

在统计分析学习中，出现很多次的向量 x 与 x^{T}，并且由于 xx^{T} 是对称阵而 $x^{\mathrm{T}}x$ 是一个数的特殊性经常被用到。

在矩阵特征值的性质中，n 阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$，$x_1,\cdots,x_n, x_i\ne 0$ 为 n 阶列向量，则有。

$$\max_{\substack{x\in R^n\\ x\ne 0}}\frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}=\lambda_1,\quad \min_{\substack{x\in R^n\\ x\ne 0}}\frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}=\lambda_1$$

这个性质把矩阵与与矩阵的特征值之间的关系通过 x 与 x^{T} 联系起来。在统计中经常用到的 Kantorovich 不等式的证明中就用到了这个结论文献[4]，并且在证明中也用到了 $x^{\mathrm{T}}x$。

在线性模型

$$y=X\beta+e,\ E(e)=0,\ \mathrm{Cov}(e)=\sigma^2 I$$

的可容许估计中，一个重要的定理：

$$x^{\mathrm{T}}y\sim c^{\mathrm{T}}\mu \Leftrightarrow x^{\mathrm{T}}x\le x^{\mathrm{T}}c$$

在充分性证明中就因为 xx^{T} 为对称方阵，使问题迎刃而解文献[3]。

当 x 为一个 n 维单位列向量时，xx^{T} 既为幂等阵又为对称阵，所以 xx^{T} 为投影阵。幂等阵和投影阵在统计学，线性模型，以及其它学科都有很多的应用，这里不再赘述。

参考文献 (References)

[1] 杨桂元 (2002) 秩等于 1 矩阵的有关性质. *大学数学*, **2**, 127-128.

[2] 邵逸民 (2010) 秩为 1 矩阵的性质及应用. *大学数学*, **10**, 194-198.

[3] 王松桂 (1987) 线性模型的理论及其应用. 安徽教育出版社, 合肥.

[4] 方开泰 陈敏 (2013) 统计学中的矩阵代数. 高等教育出版社, 北京.