Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 129-135
Published Online July 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.54020

Hans汉斯

A New Semi-Topological Space and Its Separation Property

Xichao Hu, Peiyong Zhu

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: 540435650@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: Jun. 18th, 2015; accepted: Jul. 1st, 2015; published: Jul. 8th, 2015

Abstract

In 2002, the concept of a generalized topological space was introduced by A. Csaszar. But it contains only half of the conditions in the definition of a topological space. Therefore, a generalized topology is a kind of semi-topologies actually. If we use the other condition of a topology which is contrary to the generalized topology as another semi-topology, can this new semi-topology be of some good properties, just like a generalized topology? This thesis is about this problem, and several results are obtained for the theories of point set and separation properties of this semi-topological space.

Keywords

Generalized Topology (Sup-Semi-Topology), Inf-Semi-Topology, Separation Property

一类新型半拓扑空间及其分离性质

胡西超，朱培勇

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 540435650@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期：2015年6月18日；录用日期：2015年7月1日；发布日期：2015年7月8日

摘　要

2002年，A. Csaszar引入的广义拓扑空间定义仅包含拓扑空间定义条件的一半。因此，广义拓扑实际上

是一类半拓扑。如果把广义拓扑相对于拓扑的另一半条件作为另一类半拓扑，那么这类半拓扑能否像广义拓扑那样具有一些良好的特征性质？本文就此问题进行研究，在这类半拓扑的点集理论和分离性质获得了一系列结果。

关键词

广义拓扑(上半拓扑)，下半拓扑，分离性

1. 引言与预备知识

广义拓扑空间的概念由匈牙利数学家 A. Csaszar 于 2002 在文献[1]中引入。近些年来，不少学者积极投入，取得了不少的研究成果(参见文献[1]-[7]等)。然而，广义拓扑定义中条件仅是拓扑定义中条件的一半，即广义拓扑实际上是一类半拓扑。在此，下列问题自然被提出：

问题 1：如果把广义拓扑相对于拓扑的另一半条件作为另一类半拓扑，那么这类半拓扑能否像广义拓扑那样可以进行研究?

本文首先引入上述半拓扑(称为下半拓扑)及其相关的点集概念；然后，类比拓扑空间的点集理论，讨论下半拓扑空间对拓扑空间中的一系列点集性质的保持性；最后，引入下半拓扑空间的分离性质，得到了与拓扑空间的分离性质相同和相异的一系列结果。

首先，回忆广义拓扑的概念：

定义 1.1 [8]：设 X 是任一非空集合，$\mathcal{G}$ 是 X 的一些子集构成的集族，如果下列两个条件被满足：(GO1) $\phi\in\mathcal{G}$；(GO2)若 $G_\lambda\in\mathcal{G}\ (\lambda\in\Lambda)$，其中 Λ 为任意指标集，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\mathcal{G}$。则称 $\mathcal{G}$ 为集合 X 上的一个广义拓扑，并且称有序偶 $(X,\mathcal{G})$ 为一个广义拓扑空间，集族 $\mathcal{G}$ 中的每一个集合都称为广义拓扑空间 $(X,\mathcal{G})$ 的广义开集。

不难看出：广义拓扑的条件只有拓扑条件的一半。因此，广义拓扑实际上就是一个半拓扑。为了引入新的半拓扑，本文也称广义拓扑为上半拓扑(Sup-semi-topology)，新引入的半拓扑称为下半拓扑(Inf-semi-topology)，如下：

定义 1.2：设 X 是任一非空集合，$\mathcal{I}$ 是 X 的一些子集构成的集族，如果下列两个条件被满足：(IO1) $X\in\mathcal{I}$；(IO2)若 $G_1,G_2\in\mathcal{I}$，则 $G_1\cap G_2\in\mathcal{I}$。则称 $\mathcal{I}$ 为 X 上的一个下半拓扑(Inf-semi-topology)，并称 $(X,\mathcal{I})$ 为下半拓扑空间(Inf-semi-topological space)，简记为 ISTS。集族 $\mathcal{I}$ 中的每一个元都称为 $(X,\mathcal{I})$ 中的下半开集。下半开集的余集称为下半闭集。

显然，下一结论是不证自明的：

定理 1.1：设 X 是任一非空集合，则 X 的一些子集构成的集族 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑当且仅当 $\mathcal{T}$ 既是 X 上的广义拓扑(上半拓扑)又是 X 上的下半拓扑。

根据定理 1.1，下面问题自然被提出：

问题 2：在一般拓扑学中，拓扑的哪些是由上半拓扑导出的，哪些又是由下半拓扑导出的呢？

本文就此问题展开讨论。首先，对下半拓扑引入如下相关概念：

定义1.3：设 $(X,\mathcal{I})$ 是一个ISTS，$\mathcal{I}$ 称为是 X 上的一个强下半拓扑，如果 $\phi\in\mathcal{I}$。这时也称下半拓扑空间 $(X,\mathcal{I})$ 为强下半拓扑空间，简记为S-ISTS。

从上面的定义可以看出，强下半拓扑空间是一类特殊的下半拓扑空间。

定义1.4：设 $(X,\mathcal{I})$ 是一个ISTS，$x\in X$，$U\subset X$，如果 $\exists G\in\mathcal{I}$ 使得 $x\in G\subset U$，则称 U 为点 x 的一个下半邻域。点 x 的下半邻域的全体称为 x 的下半邻域系，记为 $\mathcal{U}_*(x)$。

定义1.5：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS，$x\in X$，$A\subset X$，若$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$使得$U\subset A$，则称$x$为点集$A$的下半内点；点集$A$的下半内点的全体称为$A$的下半内部，记为$\operatorname{int}_* A$。

定义1.6：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS，$A\subset X$，$x\in X$，如果$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，有$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi$，则称$x$为点集$A$的下半聚点；点集$A$的下半聚点的全体称为$A$的下半导集，记为$A'_*$；记$cl_*A=A\cup A'_*$，并称$cl_*A$为$A$的下半闭包。

定义1.7：设$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$是下半拓扑空间$(X,\mathcal{I})$中的一个网，$x\in X$，若$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists\delta_0\in S$，使得$\forall\delta\in S$，当$\delta\succ\delta_0$时，恒有$x_\delta\in U$，则称网$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$(按下半拓扑$\mathcal{I}$)收敛于$x_0$或称$\{x_\delta\}_{\delta\in S}$以$x_0$为下半极限，通常记为$x_\delta\to x_0$或$\lim\limits_{\delta\in S}x_\delta=x_0$。

类比拓扑空间的分离性质，在下半拓扑中引入IS-分离性质如下：

定义1.8：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS。

(1) 称$(X,\mathcal{I})$为$\mathcal{IST}_0$空间，如果$\forall x,y\in X$，若$x\neq y$，则$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$，使得$y\notin U$，或者$\exists V\in\mathcal{U}_*(y)$使得$x\notin V$；

(2) 称$(X,\mathcal{I})$为$\mathcal{IST}_1$空间，如果$\forall x,y\in X$，若$x\neq y$，则$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(y)$，使得$y\notin U$并且$x\notin V$。

定义1.9：设$(X,\mathcal{I})$是一个S-ISTS。

(1) 称$(X,\mathcal{I})$为$\mathcal{IST}_2$空间，如果$\forall x,y\in X$，若$x\neq y$，则$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(y)$，使得$U\cap V=\phi$；

(2) 称$(X,\mathcal{I})$为$\mathcal{IS}$-正则空间，如果对$\forall x\in X$，$\forall F$下半闭于X且$x\notin F$，则$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(F)$，使得$U\cap V=\phi$；

(3) 称$(X,\mathcal{I})$为$\mathcal{IS}$-正规空间，如果$\forall F_1,F_2$下半闭于X且$F_1\cap F_2=\phi$，则$\exists U\in\mathcal{U}_*(F_1)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(F_2)$，使得$U\cap V=\phi$。

此外，本文中所有没定义的关于拓扑空间的概念、术语和记号，如果没有特殊声明都选自文献[9]。在不引起混淆的情况下，本文也将下半开集、下半闭集、下半闭包等称为开集、闭集、闭包等。

2. 下半拓扑空中基本点集性质

命题2.1：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS，$A\subset X$，$B\subset X$，则：

(1) 若A为X中的开集，则$A=\operatorname{int}_* A$；

(2) 若B是X中的闭集，则$B=cl_*B$。

证明：(1) 由内部的定义得$\operatorname{int}_* A\subset A$，下证$A\subset\operatorname{int}_* A$。事实上，$\forall x\in A$，由$A\in\mathcal{I}$，故$A\in\mathcal{U}_*(x)$，取$U=A\in\mathcal{U}_*(x)$，则$x\in U\subset A$，$x\in\operatorname{int}_* A$，故$A\subset\operatorname{int}_* A$，$A=\operatorname{int}_* A$。

(2) 由闭包的定义$B\subset cl_*B$，下证$cl_*B\subset B$。事实上，由于B为闭集，故$X\setminus B$为开集，故$\forall x\in X\setminus B$，$\exists G\in\mathcal{I}$使$x\in G\subset X\setminus B$，故$G\cap B=\phi$，即$x\notin cl_*B$。所以，$cl_*B\subset B$。从而$B=cl_*B$。□

在§4中，我们将通过例4.1和例4.2说明上述命题的逆命题是不成立的。

命题 2.2：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS，$A\subset X$，则$x\in cl_*A$当且仅当对$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，有$U\cap A\neq\phi$。

证明：必要性：设$x\in cl_*A$，因为$cl_*A=A\cup A'_*$，则$x\in A$或者$x\in A'_*$。若$x\in A$，则对$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，$x\in U\cap A\neq\phi$；若$x\notin A$，则$x\in A'_*$，由聚点的定义，对$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi$，故$U\cap A\neq\phi$。

充分性：假设$x\notin cl_*A$，则$x\notin A'_*$。故$\exists U\in\mathcal{U}_*(x)$，$U\cap(A\setminus\{x\})=\phi$。又因为$x\notin A$，故$U\cap A=U\cap(A\setminus\{x\})=\phi$，这与$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，有$U\cap A\neq\phi$矛盾。因此，$x\in cl_*A$。□

命题2.3：设$(X,\mathcal{I})$是一个ISTS，A是X的任意子集，则$cl_*(cl_*A)=cl_*A$。

证明：由闭包的定义知$cl_*A\subset cl_*(cl_*A)$，下证$cl_*(cl_*A)\subset cl_*A$。

事实上，对 $\forall x\in cl_*\left(cl_*A\right)$，$\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，有 $U\bigcap\left(cl_*A\right)\neq\phi$。因 U 是点 x 的邻域，故 $\exists G\in\mathcal{I}$，使 $x\in G\subset U$，因为 $G\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，故 $G\bigcap\left(cl_*A\right)\neq\phi$，取 $y\in G\bigcap\left(cl_*A\right)$，则 $G\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$，故 $G\bigcap A\neq\phi$，从而 $U\bigcap A\neq\phi$。于是 $x\in cl_*A$，故 $cl_*\left(cl_*A\right)=cl_*A$。□

3. 关于分离性质的一些结果

由定义1.8和定义1.9，显然有：

定理3.1：$\mathcal{IST}_2$ 空间 $\Rightarrow$ $\mathcal{IST}_1$ 空间 $\Rightarrow$ $\mathcal{IST}_0$ 空间。

在§4中，例4.3与例4.4将说明上述定理的不可逆性。关于这三类分离性质，我们有如下等价刻画：

定理3.2：设 $\left(X,\mathcal{I}\right)$ 是一个ISTS，则 X 为 $\mathcal{IST}_0$ 空间当且仅当对 $\forall x,y\in X:x\neq y$，$cl_*\left\{x\right\}\neq cl_*\left\{y\right\}$。

证明：充分性：(反证)。假设 X 不是 $\mathcal{IST}_0$ 空间，则 $\exists\, x,y\in X:x\neq y$，使得 $\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$ 有 $y\in U$，并且对 $\forall V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$ 有 $x\in V$，故 $U\bigcap\left\{y\right\}\neq\phi$ 且 $V\bigcap\left\{x\right\}\neq\phi$。命题2.2知，$x\in cl_*\left\{y\right\}$ 并且 $y\in cl_*\left\{x\right\}$。再由命题2.3，有 $cl_*\left\{x\right\}\subset cl_*\left(cl_*\left\{y\right\}\right)=cl_*\left\{y\right\}$ 并且 $cl_*\left\{y\right\}\subset cl_*\left(cl_*\left\{x\right\}\right)=cl_*\left\{x\right\}$，故 $cl_*\left\{x\right\}=cl_*\left\{y\right\}$。这与对 $\forall x,y\in X:x\neq y$，$cl_*\left\{x\right\}\neq cl_*\left\{y\right\}$ 矛盾，故 X 是 $\mathcal{IST}_0$ 空间。

必要性：设 X 为 $\mathcal{IST}_0$ 空间，$\forall x,y\in X$，若 $x\neq y$，则 $\exists U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$ 使得 $y\notin U$，或者 $\exists V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$。使 $x\notin V$。不妨设 $\exists U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$ 使得 $y\notin U$，则 $\exists G\in\mathcal{I}$ 使 $x\in G\subset U$，且 $y\notin G$。因此，$y\in G^C$。故 $cl_*\left\{y\right\}\subset cl_*\left(G^C\right)=X\setminus G$，即 $x\notin cl_*\left\{y\right\}$。因此，$cl_*\left\{x\right\}\neq cl_*\left\{y\right\}$。□

定理3.3：设 $\left(X,\mathcal{I}\right)$ 是一个ISTS，则 X 为 $\mathcal{IST}_1$ 空间当且仅当对 X 的每个单点集 x，都有 $cl_*\left\{x\right\}=\left\{x\right\}$。

证明：充分性：$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，则 $y\in X\setminus\left\{x\right\}=X\setminus cl_*\left\{x\right\}$，则 $y\notin cl_*\left\{x\right\}$，由引理2.2知，$\exists V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$，使得 $V\bigcap\left\{x\right\}=\phi$，故 $x\notin V$。同理，$\exists U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，使得 $y\notin U$，故 X 为 $\mathcal{IST}_1$ 空间。

必要性：对 X 的每个单点集 x，由闭包的定义知 $\left\{x\right\}\subset cl_*\left\{x\right\}$ 成立，下证 $cl_*\left\{x\right\}\subset\left\{x\right\}$ 成立。事实上，对 $\forall y\in X\setminus\left\{x\right\}$，有 $y\neq x$，由 X 为 $\mathcal{IST}_1$ 空间，则 $\exists V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$ 使得 $x\notin V$，故 $V\bigcap\left\{x\right\}=\phi$，从而，$y\notin cl_*\left\{x\right\}$，即 $X\setminus\left\{x\right\}\subset X\setminus cl_*\left\{x\right\}$，故 $cl_*\left\{x\right\}\subset\left\{x\right\}$。从而，$\forall x\in X$，$cl_*\left\{x\right\}=\left\{x\right\}$。□

定理3.4：设 $\left(X,\mathcal{I}\right)$ 是一个S-ISTS，则 X 为 $\mathcal{IST}_2$ 空间当且仅当 X 中的每个收敛网都有唯一极限。

证明：必要性：(反证)，假设 $\left\{x_\delta\right\}_{\delta\in S}$ 是 X 中的一个网，并且 $x_\delta\to x$，$x_\delta\to y$，其中 $x,y\in X$。由 $x_\delta\to x$，对 $\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，$\exists\delta_x\in S$，$\forall\delta'\succ\delta_x$ 有 $x_{\delta'}\in U$；同理 $\forall V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$。$\exists\delta_y\in S$，$\forall\delta''\succ\delta_y$ 有 $x_{\delta''}\in V$。取 $\delta_0\succ\delta_x$ 且 $\delta_0\succ\delta_y$，则当 $\delta\succ\delta_0$ 时，有 $x_\delta\in U\bigcap V\neq\phi$。这与 X 是 $\mathcal{IST}_2$ 空间矛盾。

充分性：(反证)。若 X 不是 $\mathcal{IST}_2$ 空间，则 $\exists x,y\in X$，$x\neq y$ 使得 $\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，$\forall V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)$，有 $U\bigcap V\neq\phi$。取 $x_{(U,V)}\in U\bigcap V$，并且定义："

$$\Delta=\left\{\left(U,V\right)\middle|U\in\mathcal{U}_*\left(x\right),V\in\mathcal{U}_*\left(y\right)\right\}$$

在 Δ 上定义半序关系“$\prec$”：$\left(U_1,V_1\right)\prec\left(U_2,V_2\right)$ 当且仅当 $U_1\supset U_2$ 且 $V_1\supset V_2$，则 $\left(\Delta,\prec\right)$ 是一个定向集。因此，$\left\{x_{(U,V)}\right\}_{(U,V)\in\Delta}$ 为 X 中的网并且 $x_{(U,V)}\to x$，$x_{(U,V)}\to y$，这与 X 中的每个收敛网都有唯一极限矛盾。
□

在§4 中，将用例 4.5~例 4.8 四个反例来说明：$\mathcal{IST}_2$、$\mathcal{IS}$ -正则与 $\mathcal{IS}$ -正规三者是互相不蕴含的，而且关于 $\mathcal{IS}$ -正则与 $\mathcal{IS}$ -正规，至今还没能类似于定理 3.2~定理 3.4 的任何等价刻画。关这两种分离性质，我们仅得到如下两个类似于拓扑空间的定理：

定理3.5：设 $\left(X,\mathcal{I}\right)$ 是S-ISTS，若 X 为 $\mathcal{IS}$ -正则空间，则 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，使得 $cl_*V\subset U$。

证明：对 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，$\exists G\in\mathcal{I}$，使得 $x\in G\subset U$，G^C 闭于 X 且 $x\notin G^C$，因为 X 为 $\mathcal{IS}$ -正则空间，则 $\exists V\in\mathcal{U}_*\left(x\right)$，存在开集 $W\in\mathcal{U}_*\left(G^C\right)$，使得 $V\bigcap W=\phi$。因此，

$$V \subset X \setminus W \subset X \setminus (X \setminus G) = G \subset U$$

由于 W 是开集，故 $X \setminus W$ 为闭集。因此，$cl_* V \subset cl_*(X \setminus W) = X \setminus W \subset G \subset U$。□

定理 3.6：设 $(X, \mathcal{I})$ 是一个 S-ISTS，若 X 为 $\mathcal{IS}$-正规空间，则对 X 中的任意闭集 F，$\forall U \in \mathcal{U}_*(F)$，$\exists V \in \mathcal{U}_*(F)$，使得 $cl_* V \subset U$。

证明：设 F 是 X 的任一闭集，$\forall U \in \mathcal{U}_*(F)$，$\exists G \in \mathcal{I}$，使得 $F \subset G \subset U$。则 G^C 为 X 中的闭集并且 $F \cap G^C \neq \phi$，则存在 $V \in \mathcal{U}_*(F)$，存在开集 $W \in \mathcal{U}_*(G^C)$，使得 $V \cap W \neq \phi$。故 $V \subset W^C$ 并且 $cl_* V \subset cl_*(X \setminus W) = X \setminus W$。故 $F \subset V \subset cl_* V \subset cl_*(X \setminus W) = X \setminus W \subset X \setminus G^C = G \subset U$。□

上述两个定理的逆命题是不成立的，关于这点在例 4.9 说明。

4 下半拓扑空间中的反例

首先用下面两例分别说明：命题 2.1(1)与命题 2.1(2)的逆命题是不真的。

例 4.1：存在下半拓扑空间 $(X, \mathcal{I})$，$A \subset X$ 并且 $A = \operatorname{int}_* A$ 成立，但 $A \notin \mathcal{I}$。

事实上，可取 $X = \{a,b,c,d\}$，$\mathcal{I} = \{\{a,c\},\{b,c\},\{c\},X\}$，则 $(X, \mathcal{I})$ 是一个下半拓扑空间。又取 $A = \{a,b,c\} \subset X$，则 $A = \operatorname{int}_* A$。这是因为 $\forall x \in A$，$\exists G \in \mathcal{I}$ 使得 $x \in G \subset A$。故 $A = \operatorname{int}_* A$，但 $A \notin \mathcal{I}$。

例4.2：存在下半拓扑空间 $(X, \mathcal{I})$，$A \subset X$ 且 $A = cl_* A$ 成立，A 不是 X 中的闭集。

事实上，设 $X = \{a,b,c\}$，$\mathcal{I} = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},X\}$，则 $(X, \mathcal{I})$ 是一个下半拓扑空间。由定理2.2推得，$cl_*\{a\} = \{a\}$。但 $X \setminus \{a\} = \{b,c\} \notin \mathcal{I}$，从而 $\{a\}$ 不是 X 中的闭集。□

现在，用如下两例说明定理 3.1 的每个逆命题都是不成立的：

例4.3：存在 $\mathcal{IST}_0$ 空间不是 $\mathcal{IST}_1$ 空间。事实上，取 $X = \{a,b\}$，$\mathcal{I} = \{\{a\},X\}$，易知 $(X, \mathcal{I})$ 是一个下半拓扑空间，则 $(X, \mathcal{I})$ 是 $\mathcal{IST}_0$ 空间，但不是 $\mathcal{IST}_1$ 空间。□

例 4.4：存在 $\mathcal{IST}_1$ 空间不是 $\mathcal{IST}_2$ 空间。设 $\mathbb{R}$ 为实数集，$\mathcal{I} = \{B \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus B$ 至多可数$\}$，易知 $(X, \mathcal{I})$ 是一个下半拓扑空间，则 $(X, \mathcal{I})$ 是 $\mathcal{IST}_1$ 空间，但 $(X, \mathcal{I})$ 不是 $\mathcal{IST}_2$ 空间。

事实上，$\forall x, y \in R$，若 $x \neq y$，则 $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ 为 y 的一个不包含 x 邻域，$\mathbb{R} \setminus \{y\}$ 为 x 的一个不包含 y 邻域。因此，$(X, \mathcal{I})$ 是 $\mathcal{IST}_1$ 空间。若 $(X, \mathcal{I})$ 是 $\mathcal{IST}_2$ 空间，则对 $\forall x, y \in X$，$\exists U \in \mathcal{U}_*(x)$，$\exists V \in \mathcal{U}_*(y)$ 使得 $U \cap V \neq \phi$。因为 $U \in \mathcal{U}_*(x)$，$V \in \mathcal{U}_*(y)$，故存在至多可数集 $A, B \subset \mathbb{R}$ 使得 $x \in \mathbb{R} \setminus A \subset U$，$y \in \mathbb{R} \setminus B \subset V$。故 $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathrm{B}) = \mathbb{R} \setminus (A \cup \mathrm{B}) = \phi$。因此，$\mathbb{R} = A \cup B$。这与 A，B 是不可数集矛盾。从而，$(X, \mathcal{I})$ 不是 $\mathcal{IST}_2$ 空间。□

问题 3：$\mathcal{IST}_2$ 与 $\mathcal{IS}$-正则和 $\mathcal{IS}$-正规之间是否存在蕴含关系呢？

下面的两个例子分别说明：$\mathcal{IST}_2$ 与 $\mathcal{IS}$-正则以及 $\mathcal{IST}_2$ 与 $\mathcal{IS}$-正规之间均不存在蕴含关系。

例 4.5：存在 $\mathcal{IST}_2$ 空间不是 $\mathcal{IS}$-正则的，也不是 $\mathcal{IS}$-正规的。设 $X = \{a,b,c,d,e\}$，$\mathcal{I} = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,b,c\},\{c,d,e\},X\}$，则 $(X, \mathcal{I})$ 是一个 $\mathcal{IST}_2$ 空间。但 $(X, \mathcal{I})$ 不是 $\mathcal{IS}$-正则空间，也不是 $\mathcal{IS}$-正规空间。

事实上，可取 $A = \{a,b,c,d\}$，$e \in X$，则 A 是 X 的闭集且 $e \notin A$，X 是唯一包含 A 的开集。故 $\forall U \in \mathcal{U}_*(A)$，$\forall V \in \mathcal{U}_*(e)$ 有 $U \cap V \supset X \cap \{e\} \neq \phi$。因此，$(X, \mathcal{I})$ 不是 $\mathcal{IS}$-正则空间。此外，取 $F_1 = \{a,b\}$，$F_2 = \{d,e\}$，则 F_1，F_2 是 X 中闭集，并且 $F_1 \cap F_2 = \phi$。因为 $\forall U \in U_*(F_1)$，$\forall V \in U_*(F_2)$ 都有 $F_1 \subset \{a,b,c\} \subset U$，并且 $F_2 \subset \{c,d,e\} \subset V$，故 $U \cap V \supset \{a,b,c\} \cap \{c,d,e\} \neq \phi$。因此，$(X, \mathcal{I})$ 不是 $\mathcal{IS}$-正规空间。

例4.6：存在 $\mathcal{IS}$-正则空间、$\mathcal{IS}$-正规空间不是 $\mathcal{IST}_2$ 空间。

设 $X = \{a,b,c\}$，$\mathcal{I} = \{\phi,\{a\},\{b,c\},X\}$，则 $\mathcal{I}$ 为 X 上的一个下半拓扑并且 $\mathcal{I}$ 也是 $(X, \mathcal{I})$ 中闭集全体，

所以$(X,\mathcal{I})$是$\mathcal{IS}$-正则空间，也是$\mathcal{IS}$-正规空间。但$(X,\mathcal{I})$不是$\mathcal{IST}_0$空间。从而，也不是$\mathcal{IST}_1$空间和$\mathcal{IST}_2$空间。事实上，对于$b,c\in X:b\neq c$，不存在b的邻域V使得$c\notin V$，也不存在c的邻域W，使得$b\notin W$。故X不是CT_0空间。□

问题 4： $\mathcal{IS}$-正则空间和$\mathcal{IS}$-正规空间是否有相互蕴含关系呢？

下面的两个例子说明：它们两者也没有蕴含关系。

例 4.7： 存在$\mathcal{IS}$-正则空间不是$\mathcal{IS}$-正规空间。设$X=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\middle|x_2\geq 0\right\}$，并令

$$\mathcal{B}=\left\{B(x,\varepsilon)\middle|0<\varepsilon<x_2,x=(x_1,x_2)\in X\right\}\cup\left\{B(x,x_2)\cup\{(x_1,0)\}\middle|x=(x_1,x_2)\in X,x_2>0\right\},$$

又$\mathcal{T}=\{\phi,G|\forall x\in G,\exists B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset G\}$，则$\mathcal{T}$是以$\mathcal{B}$为基的拓扑，且$(X,\mathcal{T})$是正则空间，但不是正规空间[10]。故$(X,\mathcal{T})$是$\mathcal{IS}$-正则空间，但不是$\mathcal{IS}$-正规空间。□

例4.8： 存在$\mathcal{IS}$-正规空间不是$\mathcal{IS}$-正则空间。设$X=\{a,b\}$，$\mathcal{I}=\{\phi,\{a\},X\}$，则$(X,\mathcal{T})$是一个$\mathcal{IS}$-正规空间，但不是$\mathcal{IS}$-正则空间。

事实上，X中的闭集全体为$\mathcal{F}=\{\phi,\{b\},X\}$，故$(X,\mathcal{I})$没有不相交的非空闭集。因此，是一个$\mathcal{IS}$-正规空间。此外，取$\{b\}$闭于$X$，$a\in X$，由于$X$是包含$\{b\}$的唯一开集，则$\forall U\in\mathcal{U}_*(\{b\})$，$\forall W\in\mathcal{U}_*(a)$有$W\cap U\neq\phi$。所以，$(X,\mathcal{I})$不是$\mathcal{IS}$-正则空间。□

虽然，$\mathcal{IST}_2$空间、$\mathcal{IS}$-正则空间与$\mathcal{IS}$-正规空间之间不存在任何蕴含关系，但是根据定义 1.8，下面结论成立是显然的：

定理 4.1： 设$(X,\mathcal{I})$是一个 S-ISTS，如果$\forall x\in X$，单点集$\{x\}$是下半闭集，则有$\mathcal{IS}$-正规空间$\Rightarrow$ $\mathcal{IS}$-正则空间$\Rightarrow$ $\mathcal{IST}_2$空间。

最后，我们用下面两个例子分别说明：定理3.5和定理3.6的逆命题都是不成立的。

例 4.9： 存在下半拓扑空间$(X,\mathcal{I})$，对$\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(x)$使$cl_*V\subset U$成立，但$(X,\mathcal{I})$不是$\mathcal{IS}$-正则空间；也存在下半拓扑空间$(X,\mathcal{I})$，对$X$中的任意闭集$F$，$\forall U\in\mathcal{U}_*(F)$，$\exists V\in\mathcal{U}_*(F)$使得$cl_*V\subset U$，但$(X,\mathcal{I})$不是$\mathcal{IS}$-正规的。

事实上，可取$X=\{a,b,c,d,e\}$，$\mathcal{I}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,b,c\},\{c,d,e\},X\}$，由命题 2.3 推知，$\forall G\in\mathcal{I}$，都有$cl_*G=G$。这是因为$\forall x\in X$，$x\notin G$，都有$\{x\}\in\mathcal{U}_*(x)$，但$\{x\}\cap G=\phi$，故$x\notin cl_*G$。因此，对$\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_*(x)$，$\exists G\in\mathcal{I}$，使得$F\subset G\subset U$，因为$cl_*G=G$，所以$cl_*G\in U_*(F)$且$cl_*G=G\subset U$。对于$X$中的任意闭集$F$，$\forall U\in\mathcal{U}_*(F)$，$\exists G\in\mathcal{I}$，使得$F\subset G\subset U$。因为$cl_*G=G$，所以$cl_*G\in U_*(F)$且$cl_*G=G\subset U$。

但由例 4.5 知，$(X,\mathcal{I})$既不是$\mathcal{IS}$-正则空间，也不是$\mathcal{IS}$-正规空间。□

5. 小结

本文首先相对于广义拓扑(上半拓扑)，对偶地引入下半拓扑的概念。然后类比拓扑空间的点集理论与分离性质，引入下半拓扑空间中相应的基本点集与分离性质。进而使拓扑空间的分离性质：T_0、T_1、T_2以及正则性和正规性分别被推广为下半拓扑空间中的$\mathcal{IST}_0$、$\mathcal{IST}_1$、$\mathcal{IST}_2$、$\mathcal{IS}$-正规和$\mathcal{IS}$-正则空间，并且先后给出了上述 5 种分离性质之间的蕴含关系以及$\mathcal{IST}_0$、$\mathcal{IST}_1$和$\mathcal{IST}_2$三种分离性质的等价刻画。此外，还分别给出了$\mathcal{IS}$-正规和$\mathcal{IS}$-正则分离性质的必要条件，并且分别通过反例指出：所得到的$\mathcal{IS}$-正规和$\mathcal{IS}$-正则的必要条件的逆命题不真。

致　谢

感谢电子科技大学科研实训创新项目基金的经费资助。

参考文献 (References)

[1] Csaszar, A. (2005) Generalized open sets in generalized topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **106**, 53-66. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-005-0005-5

[2] Min, W.K. (2009) Weak continuity on generalized topological spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **124**, 73-81. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-008-8152-0

[3] Min, W.K. (2009) Almost continuity on generalized topological spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **125**, 121-125. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-009-8230-y

[4] Csaszar, A. (2008) On generalized neighbourhood systems. *Acta Mathematica Hungarica*, **121**, 395-400. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-008-7224-5

[5] Sarma, R.D. (2010) On convergence in generalized topology. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **60**, 51-56.

[6] Sarm, R.D. (2012) On extremely disconnected generalized topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **134**, 583-588. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-011-0153-8

[7] Wu, X. and Zhu, P. (2013) A note on β-connectedness. *Acta Mathematica Hungarica*, **139**, 252-254. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-012-0276-6

[8] Csaszar, A. (2002) Generalized topology, generalized continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, **96**, 351-357. http://dx.doi.org/10.1023/A:1019713018007

[9] 朱培勇, 雷银彬 (2009) 拓扑学导论. 科学出版社, 北京.

[10] 熊金城 (2011) 点集拓扑讲义. 第四版, 高等教育出版社, 北京.