Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 227-232
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55032

Properties of the System Operator of the Repairable System under Common-Cause Failure and Critical Human Error

Shuang Yuan, Hui Wang

Harbin Normal University, Harbin Heilongjiang
Email: yuanshuang0556@126.com

Received: Sep. 5th, 2015; accepted: Sep. 22nd, 2015; published: Sep. 25th, 2015

Abstract

The objective of this paper is to research a stochastic model representing system under common-cause failure and critical human error. Using C_0 semigroup theory, we first prove that the system operator is a densely defined resolvent positive operator. Then, we set the adjoint operator of the system operator and its domain. So, we can prove that 0 is the growth bound of the system operator. At last, by using the concept of cofinal and relative theory we can prove that 0 is also spectral bound of the system operator.

Keywords

Repairable Systems, Resolvent Positive Operator, Growth Bound, Cofinal, Upper Spectral Bound

由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统的算子性质

苑　爽，王　辉

哈尔滨师范大学，黑龙江 哈尔滨
Email: yuanshuang0556@126.com

收稿日期：2015年9月5日；录用日期：2015年9月22日；发布日期：2015年9月25日

文章引用: 苑爽, 王辉. 由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统的算子性质[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 227-232. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55032

摘　要

本文讨论了由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统，通过运用C_0半群的理论，证明该系统的预解正算子是稠定的，从而证明了系统算子的增长界为0。最后运用共尾概念和相关理论，证明了该系统算子的谱上界也为0。

关键词

可修复系统，预解正算子，增长界，共尾，谱上界

1. 引言

由于现代智能化发展进程的加快致使各部件在工作量增加，为了不影响系统的正常工作，因此各个系统的可靠性和耐用性理应得到人们的广泛重视。

在文献[1]中，作者运用 Laplace 变换分析了一类由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统的平均故障时间，文献[2]中作者主要讨论了此系统主算子的谱的特征，分析了系统的稳定性，文献[3]在[1] [2] [4]结论的基础上，以泛函理论作为测定描述系统可控性的标准，利用 Banach 空间相关知识对此系统的稳态解是否可以到达期望概率分布的最优控制问题进行分析。

本文在文献[2]的基础上进行进一步分析，结合 C_0 半群理论的内容，得到了系统算子是稠定的预解正算子的结论，并且在假设系统算子的共轭算子及其定义域存在的前提下，得到系统算子的增长界为 0 的结论。进而根据预解正算子的共尾性质以及相关内容，证明了系统算子的谱上界也为 0。

2. 系统介绍

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(2\lambda+\lambda_{h0})p_0(t)+\mu_1 p_1(t)+\sum_{j=3}^{4}\int_0^\infty \mu_j(x)p_j(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t}=-(2\lambda+\mu_1+\lambda_{h1})p_1(t)+\mu_2 p_2(t)+2\lambda p_0(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(t)}{\mathrm{d}t}=-(\mu_2+\lambda+\lambda_{h2})p_2(t)+2\lambda p_1(t)$$

$$\frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t}=-p_j(x,t)\mu_j(x),\ j=3,4$$

$$p_3(0,t)=\lambda p_2(t),\quad p_4(0,t)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{hi}p_i(t)$$

$$p_0(0)=1;\quad p_1(0)=p_2(0)=p_3(x,0)=p_4(x,0)=0$$

为了方便，记：$a_0=2\lambda+\lambda_{h0}$，$a_1=2\lambda+\mu_1+\lambda_{h1}$，$a_2=\mu_2+\lambda+\lambda_{h2}$。

系统中相关符号的物理意义定义如下：

状态 0：两个部件工一个部件储备；

状态 1：一个部件故障，储备部件进入工作状态；

状态 2：一个部件由于常规和非严重的人为错误引起的故障状态；

状态 3：常规错误引起部件故障状态；

状态 4：临界人为错误引起的系统故障状态；

λ_i 表示运行部件的常数修复率；$i = 1,2$；

λ_{hi} 表示从 i 状态到 4 状态的常规损坏率；$i = 0,1,2$；

$p_i(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 i 的概率($i = 0,1,2$)；

$p_i(x,t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 i 且已修复时间为 x 的概率；

$\mu_i(x)$ 表示状态 i 到状态 0 的修复率；

$\mu_i(x)$ 是有界函数($i = 3,4$)。

本文对修复率 $\mu(x)$ 做如下假设：

1) $\forall 0 < M < \infty, \int_0^M \mu_i(x)\mathrm{d}x < \infty$；

2) $\int_0^M \mu_i(x)\mathrm{d}x < \infty, \forall x > 0$；

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \mu_i(x) = \mu$。

取状态空间：$X = C^3 \times L^1[0,\infty) \times L^1[0,\infty)$。

定义) $\forall p \in X$ 有：

$$\|P\| = |p_0| + |p_1| + |p_2| + \|p_3(x)\|_{L^1[0,\infty)} + \|p_4(x)\|_{L^1[0,\infty)}$$

则显然 X 是 Banach 空间。引入算子：

$$A = \operatorname{diag}\left\{-a_0, -a_1, -a_2, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu_3(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu_4(x)\right\}$$

$$D(A) = \left\{\left(p_0, p_1, p_2, p_3(x), p_4(x)\right)^{\mathrm{T}} \in X \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} \in L^1[0,\infty), p_i(x)\text{为绝对连续函数}, i = 3,4\right\}$$

其中 $P = \left[p_0, p_1, p_2, p_3(x), p_4(x)\right]^{\mathrm{T}}$ 且 $p_3(0,t) = \lambda p_2(t)$，$p_4(0,t) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_{hi} p_i(t)$

再引入算子：

$$E = \begin{Bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \int_0^\infty \mu_i(x)\mathrm{d}x < \infty & \int_0^\infty \mu_i(x)\mathrm{d}x < \infty \\ 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

则有 $D(E) = X$，此时系统方程组可以改写成 Banach 空间 X 中的抽象 Cauacy 问题[5]：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = (A+E)P(t) \\ P = \left[p_0, p_1, p_2, p_3(x), p_4(x)\right]^{\mathrm{T}} \\ P(0) = (1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

定义 1：算子 $A + E$ 的谱上界 $s(A + E)$的定义为：

$$s(A+E) = \left\{\omega \in C \,\middle|\, (\omega,\infty) \subseteq \rho(A+E)\right\}$$

定义 2：若算子 $A + E$ 是半 $T(t)$的无穷小生成元，则增长界 $\omega(A+E)$ 定义为；

$$\omega(A+E) = \inf\left\{\omega \in C \,\middle|\, \exists M \ge 1, \text{对}\forall t \ge 0\text{有}\|T(t)\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}\right\}$$

定义 3：E 的子集 C 称为在 E 中共尾(cofinal)，若满足对每个 $f\in E$，存在 $g\in C$，使得 $f\le g$ [6]。

定理 1：$D(A+E)$在 X 中稠密。

证明：设 L={ $\left[p_0,p_1,p_2,p_3(x),p_4(x)\right]^{\mathrm{T}}\Big|$ $p_i(x)\in C_0^{\infty}[0,\infty)$ 且存在常数 $C_i>0$，使得 $p_i=0$，$x\in[0,c_i]$，$i=3,4$ }，显然 L 在 X 中稠密[7]，故只需要 $D(A)$在 L 中稠密。

取 $P\in L$，则存在 c_i 使 $p_i(x)=0$，$x\in[0,c_i]$，$i=3,4$。令 $0<2s<\min\{c_1,c_2\}$，显然 $p_i(x)=0$。$x\in[0,2s]$ (i=3,4)。根据文献[8]知：

$$f^s(0)=\left\{p_0,p_1,p_2,f_3^s(0),f_4^s(0)\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$f^s(x)=\left\{p_0,p_1,p_2,f_3^s(x),f_4^s(x)\right\}^{\mathrm{T}}$$

其中：

$$f_z^s(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{s}\right)^2, & x\in[0,s)\\ \mu_z(x-s)^2(x-2s)^2, & x\in[0,2s)\\ p_z(x), & x\in[2s,\infty)\end{cases}$$

此处：

$$\mu_z=\frac{f_z^s(0)\int_0^s\mu_z\left(1-\dfrac{x}{s}\right)2\mathrm{d}x}{\int_s^{2s}\mu_z(x-s)^2(x-2s)^2\,\mathrm{d}x},\quad (z=3,4)$$

易证：$f^s(x)\in D(A)$且：

$$\begin{aligned}\left\|P-f^s(x)\right\|&=\sum\nolimits_{z=3}^{4}\int_0^{\infty}\left|P_z-f_z^s(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\sum\nolimits_{z=3}^{4}\int_0^{s}\left|f_z^s(0)\right|\left(1-\frac{x}{s}\right)^2\mathrm{d}x+\sum\nolimits_{z=3}^{4}\int_s^{2s}\mu_z(x-s)^2(x-2s)^2\,\mathrm{d}x\\&=\sum\nolimits_{z=3}^{4}\left(f_z^s(0)\frac{s}{3}+\left|\mu_j\frac{s^5}{30}\right|\right)\to 0\,(s\to 0)\end{aligned}$$

故 $D(A)$在 L 中稠密，故 $D(A)$在 X 中稠密。又由于 $D(E)=X$，故 $D(A)$在 X 中稠密。

定理 2：$A+E$ 是预解正算子。

证明：对任意给定的 $y\in X$，考虑方程$(\gamma I-A)P=y$，等价于如下方程组：

$$(\gamma+a_0)p_0=y_0$$

$$(\gamma+a_1)p_1=y_1$$

$$(\gamma+a_2)p_2=y_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_3(x)=-(\gamma+\mu_3)p_3+y_3(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_4(x)=-(\gamma+\mu_4)p_4+y_4(x)$$

得：

$$p_0=\frac{y_0}{\gamma+a_0}$$

$$p_1=\frac{y_1}{\gamma+a_1}$$

$$p_2=\frac{y_2}{\gamma+a_2}$$

$$p_3(x)=p_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^z(y+\mu_3(x))\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_z^s(y+\mu_3(x))\mathrm{d}\xi}y_3(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$p_4(x)=p_4(0)\mathrm{e}^{-\int_0^z(y+\mu_4(x))\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_z^s(y+\mu_4(x))\mathrm{d}\xi}y_4(\xi)\mathrm{d}\xi$$

所以：

$$\begin{aligned}\|P\|&=|p_0|+|p_1|+|p_2|+\sum_{i=3}^4\|p_i(x)\|_{L^1[0,\infty)}\\&=\left|\frac{y_0}{\gamma+a_0}\right|+\left|\frac{y_1}{\gamma+a_1}\right|+\left|\frac{y_2}{\gamma+a_2}\right|+\int_0^\infty\left|p_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^z(y+\mu_3(x))\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_z^s(y+\mu_3(x))\mathrm{d}\xi}y_3(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^\infty\left|p_4(0)\mathrm{e}^{-\int_0^z(y+\mu_4(x))\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_z^s(y+\mu_4(x))\mathrm{d}\xi}y_4(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\mathrm{d}x\\&\le\frac{5}{\gamma}\left(|y_0|+|y_1|+|y_2|+\|y_3\|_{L^1[0,\infty)}+\|y_4\|_{L^1[0,\infty)}\right)\end{aligned}$$

设 $C=\frac{5}{\gamma}$，因 $\gamma>0$，故 $\|P\|\le c\|y\|$，所以当 $\gamma>5C$ 时，$\|\gamma I-A\|^{-1}\le\frac{5}{\gamma}$。

观察 E 的表达式，显然 E 是有界正算子，且设 $E\le M$，有方程 $(\gamma I-A)P=y(\gamma>0)$ 的形式可知，当 $\gamma>0$ 时，若 y 为非负向量，则 p 为非负向量。故 $\|\gamma I-A\|^{-1}$ 为正算子，又 $\|\gamma I-A\|^{-1}\le\frac{5}{\gamma}$，故当 $\gamma>\max\{5M,1\}$ 时，$\left\|(\gamma I-A)^{-1}E\right\|\le\left\|(\gamma I-A)^{-1}\right\|\|E\|\le\frac{5M}{\gamma}<1$。

故 $\left|I-(\gamma I-A)^{-1}(E)^{-1}\right|^{-1}$ 存在且有界。

因此 $A+E$ 为预解正算子。

X 的共轭空间为 $X^*=\{q_0,q_1,q_2,q_3(x),q_4(x)\}\in R^3\times L^1[0,\infty)\times L^1[0,\infty)$，其中 $\|q\|=\max\left\{|q_0|,|q_1|,|q_2|,\|q_3\|_{L^1[0,\infty)},\|q_4\|_{L^1[0,\infty)}\right\}$，显然 X^* 为 Banach 空间(文献[7])。因为 $A+E$ 为 X 的子空间，X 存在共轭空间 X^*，则不妨假设 $(A+E)^*$ 为 $A+E$ 的共轭空间且 $(A+E)^*$ 为 X^* 的子空间。

定理 3：若算子 A 是半群 $T(t)$的无穷小生成元，则系统算子所生成的 C_0 半群的增长界 $\omega(A+E)=0$。

证明：将系统方程整理为：

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-a_0p_0(t)+\sum_{i=1}^2\mu_ip_i(t)+\sum_{i=3}^4\int_0^\infty\mu_ip_i(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t}=-a_1p_1(t)+\lambda p_0(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(t)}{\mathrm{d}t}=-a_2p_2(t)+\eta p_0(t)$$

$$\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu_3(x)\right] p_3(x,t)$$

$$\frac{\partial p_4(x,t)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu_4(x)\right] p_4(x,t)$$

将上式对 x 从零到正无穷积分，代入边值条件，并将各式左右两端相加，最终可得 $\frac{\mathrm{d}\|P\|}{\mathrm{d}t} = 0$。故系统方程组所对应的半群是非扩张半群，根据初值条件知 $\|T(t)\| = 1$。故系统算子所生成的 C_0 半群的增长界 $\omega(A+E) = 0$。

定理 4：$s(A+E) = 0$。

证明：由前文知，

$$X = \left\{P \in C^3 \times L^1[0,\infty) \times L^1[0,\infty) \middle| \|P\| = |p_0| + |p_1| + |p_2| + \|p_3(x)\|_{L^1[0,\infty)} + \|p_4(x)\|_{L^1[0,\infty)}\right\}$$

$$X^* = \left\{q \in C^3 \times L^1[0,\infty) \times L^1[0,\infty) \middle| \|Q\| = |q_0| + |q_1| + |q_2| + \|q_3(x)\|_{L^\infty[0,\infty)} + \|q_4(x)\|_{L^\infty[0,\infty)}\right\}$$

$$X_+^* = \left\{Q \in X^* \middle| Q_0 \geq 0, Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0, Q_3(x) \geq 0, Q_4(x) \geq 0\right\}$$

$$D\left[(A+E)^*\right] = \left\{Q \in X^* \middle| Q_i(x)\text{绝对连续且}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_i(x) \in L^\infty[0,\infty)\right\} (i = 3,4)$$

$$D\left[(A+E)^*\right]^+ = X_+^* \cap D\left[(A+E)^*\right]$$

任取 $f = \left[f_0, f_1, f_2, f_3(x), f_4(x)\right]^{\mathrm{T}} \in X_+^*$，则 $\|f\| = \max\left\{|f_0|, |f_1|, |f_2|, \|f_3\|, \|f_4\|\right\}$。

因此 $|f - f_i| \geq 0; f\|1(x) - f_j(x)\| \geq 0; (i = 0,1,2; j = 3,4)$ 故 $g - f \geq 0$，所以在 X_+^* 中任取一个元素 f，$\exists g \in D\left[(A+E)^*\right]^+$，使得 $f \leq g$，则 $+X_+^*$ 中共尾，又根据定理 2 可知 AE 为预解正算子，再由文献[8]，知：$s(A+E) = \omega(A+E)$。

基金项目

黑龙江省自然科学基金项目(A201305)。

参考文献 (References)

[1] Dhillon, B.S. and Anuded, O.C. (1993) Common-cause failure analysis of a non-identical unitparallel system with arbitrarily distributed repair time. *Microelectron Reliability*, **33**, 88-10. http://dx.doi.org/10.1016/0026-2714(93)90048-4

[2] 严伟，王雪峰，贾诺 (2008) 由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统稳定性分析. *数学的实践与认识*, **24**, 165-172.

[3] 朱永生，王辉 (2009) 由常规故障和临界人为错误引起系统故障的可修复系统稳态解的最优控制. *数学的实践与认识*, **16**, 235-240.

[4] 贾诺，王涛 (2007) 两不同部件可修复系统稳定解的最优控制. *数学的实践与认识*, **20**, 101-107.

[5] 陈传璋，侯宗义，李明忠 (1987) 积分方程理论及其应用. 上海科学出版社，上海.

[6] Arendt, W. (1987) Resolvent positive operators. *Proceedings London Mathematical Society*, **54**, 321-349. http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-54.2.321

[7] 匡继昌 (2002) 实分析与发函分析. 高等教育出版社，北京.

[8] Gupur, G., Li, X.Z. and Zhu, G.T. (2001) Functional analysis method in queueing theory. Research Information, Hertfordshire.