Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 247-254
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55035

Hans汉斯

Two Preserver Problems on Induced Maps

Panpan Yan, Jun Zhang, Chongguang Cao

School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang
Email: 492689647@qq.com

Received: Sep. 8th, 2015; accepted: Sep. 25th, 2015; published: Sep. 28th, 2015

Abstract

Let F be a field, Mn(F) be the set of all $n \times n$ matrices over F. If a map f: Mn(F) → Mn(F) is defined by $f: A=(a_{ij}) \mapsto (f_{ij}(a_{ij}))$, $\forall A \in Mn(\mathrm{F})$, where $\{f_{ij} | i,j \in [1,2,\cdots,n]\}$ are the set of functions on F, then f is called a map induced by $\{f_{ij}\}$ on Mn(F). If $AB = BA$ implies $f(A)f(B) = f(B)f(A)$, then f is called preserving commutativity of matrices. If $B^2 = B$ implies $(f(B))^2 = f(B)$, then f is called preserving idempotent matrices. In this paper, we characterize induced maps preserving idempotence and commutativity of matrices over fields, resprectively.

Keywords

Field, Matrix, Preserving Commutativity, Preserving Idempotence, Induced Map

关于诱导映射的两个保持问题

闫盼盼，张　隽，曹重光

黑龙江大学数学科学学院，黑龙江　哈尔滨
Email: 492689647@qq.com

收稿日期：2015年9月8日；录用日期：2015年9月25日；发布日期：2015年9月28日

摘　要

令F是一个域，Mn(F)是F上所有$n \times n$矩阵的集合。如果一个映射 $f: Mn(\mathrm{F}) \to Mn(\mathrm{F})$ 被定义如下，

文章引用: 闫盼盼, 张隽, 曹重光. 关于诱导映射的两个保持问题[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 247-254.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55035

$f: A=(a_{ij})\mapsto(f_{ij}(a_{ij}))$，$\forall A\in Mn(\mathrm{F})$ 其中 $\{f_{ij}\mid i,j\in[1,2,\cdots,n]\}$ 是关于F的函数集，则称f是 $Mn(\mathrm{F})$ 的由 $\{f_{ij}\}$ 诱导的映射。如果$AB=BA$意味着 $f(A)f(B)=f(B)f(A)$，则f被称为保交换矩阵。如果 $B^2=B$ 意味着 $(f(B))^2=f(B)$，则f被称为保幂等矩阵。本文我们分别刻画保域上矩阵幂等性及交换性的诱导映射。

关键词

域，矩阵，保交换，保幂等，诱导映射

1. 引言

近年来刻画矩阵集合保持某些性质的映射的研究更感兴趣于映射没有线性和加法假定的情形，例如[1]-[5]。本文研究的诱导映射，其实也是这类问题的一种。同类研究看[6]和[7]。

设 F 是一个域，Mn(F)是 F 上所有 n 阶矩阵的集合。设 f 是 Mn(F)到自身的映射。f_{ij} 是 F 上的函数，其中 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。如果定义 $f: A=(a_{ij})\mapsto(f_{ij}(a_{ij}))$，$\forall A\in Mn(\mathrm{F})$ 则称 f 是由{f_{ij}}诱导的映射。简称 Mn(F)的诱导映射。

如果 $AB=BA$ 意味着 $f(A)f(B)=f(B)f(A)$，则 f 被称为保交换矩阵。

在本文中用 K 记 Mn(F)中所有幂等阵($B^2=B$)的集合，令 f 是 Mn(F)到自身的诱导映射，如果 $B\in K$ 意味着 $f(B)\in K$ 则称 f 保幂等。本文目的是分别刻画 Mn(F)的保幂等及保交换的诱导映射。

在本文中用 F^*记 F 中所有非 0 元的集合，E_{ij} 表示(i,j)位置是 1，其余位置是零的矩阵。记 $[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$。

2. 保矩阵的幂等性

在 $f(0)=0$ 的情况下，对于 f 为 Mn(F)的保幂等的诱导映射的充要条件，我们有如下的重要结果。

定理 2.1： 设 F 为一个域，n 为整数且 $n\geq 3$。f 是 Mn(F)的诱导映射且 $f(0)=0$，则 f 保幂等当且仅当 f 为如下两种形式之一。

(i) 当 A 为幂等阵时，$f_{11},\cdots,f_{nn}$ 为值域为{0,1}的函数，A 为其它矩阵时，$f_{11},\cdots,f_{nn}$ 任意，

$$f(A)=\mathrm{diag}(f_{11}(a_{11}),f_{22}(a_{22}),\cdots,f_{nn}(a_{nn})),\quad \forall A\in Mn(\mathrm{F}). \tag{1}$$

(ii) 存在一个可逆对角阵 $P\in Mn(\mathrm{F})$ 及 F 上的一个单自同态 η，使得：

$$f(A)=PA^{\eta}P^{-1},\quad \forall A\in Mn(\mathrm{F}) \tag{2}$$

其中 $A^{\eta}=(\eta(a_{ij}))$。

证明：充分性显然，下证必要性。假设 $i,j,k\in[1,n]$，且互不相等，由 $A_1=aE_{ij}+abE_{ik}+E_{jj}+bE_{jk}\in K$ 及 f 保幂等，看 $f(A_1)$ 的(i,j)位置得：

$$f_{ij}(a)f_{jk}(b)=f_{ik}(ab) \tag{3}$$

下面分两种情况讨论。

(i) 存在某 $a\neq 0$ 及 $i\neq j$ 使 $f_{ij}(a)=0$。

此时由(3)易证 $f_{ik}=0$，再由 $f_{ki}(b)f_{ij}(a)=f_{kj}(ba)$ 可知 $f_{kj}=0$，进一步由 $f_{ik}(a)f_{kj}(b)=f_{ij}(ab)$ 可得 $f_{ij}=0$，类似可证 $f_{jk}=0$，$f_{ji}=0$，$f_{ki}=0$。进一步运用此法可证得对任意 $m\neq l$ 有 $f_{ml}=0$。

这意味着 $f(A)=\begin{pmatrix} f_{11}(a_{11}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{nn}(a_{nn}) \end{pmatrix}$

由 f 保幂等，不难推出形式(1)。

(ii) 对于任意不同的 $i\neq j\in[1,n]$ 由及任意 $a\in F^*$ 均有 $f_{ij}(a)\neq 0$。

由 $aE_{ii}+E_{ij}+E_{ik}-a^2E_{ii}-aE_{jj}-aE_{jk}+aE_{ki}+E_{kj}+E_{kk}\in K$ 和 f 保幂等，得 $f\left(aE_{ii}+E_{ij}+E_{ik}-a^2E_{ii}-aE_{jj}-aE_{jk}+aE_{ki}+E_{kj}+E_{kk}\right)\in K$。利用(3)看 (i,j) 位置，可得 $f_{ii}(a)f_{ij}(1)+f_{ij}(1)f_{jj}(-a)=0$，又由

已知得 $f_{ii}(a)=-f_{jj}(-a)$。同理可得 $f_{kk}(a)=-f_{jj}(-a)$。因此，

$$f_{ii}(a)=f_{kk}(a),\quad \forall i\neq k\in[1,n],a\in F \tag{4}$$

类似有 $f_{jj}(a)=f_{kk}(a)$，因此有

$$f_{ii}(-a)=-f_{ii}(a),\quad \forall i\in[1,n],a\in F \tag{5}$$

对于任意的 $i\neq j\in[1,n]$，由 $E_{ii}+aE_{ij}\in K$ 可知 $f\left(E_{ii}+aE_{ij}\right)\in K$。因此，

$$f_{ii}(1)=1,\quad \forall i\in[1,n] \tag{6}$$

在(3)中取 $a=1$ 可得 $f_{ik}(b)=f_{ij}(1)f_{jk}(k)=f_{ij}(1)f_{ji}(1)f_{ik}(b)$ 于是有

$$f_{ij}(1)f_{ji}(1)=1,\quad \forall i\neq j\in[1,n] \tag{7}$$

对于任意不同的 $i,j,k\in[1,n]$ 和 $a\in F$。由 $E_{ii}+aE_{ij}-E_{ik}+E_{jj}+aE_{kj}\in K$，看 (i,j) 位置，得到 $f_{ii}(1)f_{ij}(a)+f_{ij}(a)f_{jj}(1)+f_{ik}(-1)f_{kj}(a)=f_{ij}(a)$，由(3)和(6)得到 $f_{ij}(a)=-f_{ij}(-a)$。同理可证，

$$f_{kj}(a)=-f_{kj}(-a) \tag{8}$$

令 $f_{12}(x)=f_{11}(1)\eta(x)f_{12}(1)=\eta(x)f_{12}(1)$，$\forall x\in F$。

首先，设对于 $i\neq j\in[3,n]$，由(3)和(7)得，

$$\begin{aligned} f_{ij}(x)&=f_{i2}(x)f_{2j}(1)=f_{i1}(1)f_{12}(x)f_{21}(1)f_{1j}(1)\\ &=f_{i1}(1)\eta(x)f_{12}(1)f_{21}(1)f_{1j}(1)=f_{i1}(1)\eta(x)f_{1j}(1),\quad \forall x\in F \end{aligned}$$

其次，令 $i=1$，显然有 $f_{12}(x)=f_{11}(1)\eta(x)f_{12}(1)=\eta(x)f_{12}(1)$。由(3)可得

$$f_{1j}(x)=f_{12}(x)f_{2j}(1)=f_{11}(1)\eta(x)f_{12}(1)f_{2j}(1),\quad \forall x\in F$$

最后，令 $i=2$，由(3)和(7)可得

$$f_{2j}(x)=f_{21}(1)f_{1j}(x)=f_{21}(1)\eta(x)f_{1j}(1),\quad \forall x\in F$$

$$f_{21}(x)=f_{23}(x)f_{31}(1)=f_{21}(1)\eta(x)f_{13}(1)f_{31}(1)=f_{21}(1)\eta(x)f_{11}(1),\ \forall x\in F$$

同理可得

$$f_{i1}(x)=f_{i1}(1)\eta(x)f_{11}(1),\quad \forall x\in F$$

$$f_{i2}(x)=f_{i1}(1)\eta(x)f_{12}(1),\ \forall x\in F$$

因此，得到

$$f_{ij}(x)=f_{i1}(1)\eta(x)f_{1j}(1),\quad \forall i\neq j\in[1,n],\ \forall x\in F \tag{9}$$

对于任意不同的 $i,j,k\in[1,n]$ 和 $a\in F$，由 $aE_{ii}-aE_{ij}+aE_{ik}+aE_{ji}-aE_{jj}+aE_{jk}+E_{ki}-E_{kj}+E_{kk}\in K$，得

$f\left(aE_{ii}-aE_{ij}+aE_{ik}+aE_{ji}-aE_{jj}+aE_{jk}+E_{ki}-E_{kj}+E_{kk}\right)\in K$，由((6)和(8)得，$f_{ki}(1)f_{ii}(a)=f_{kj}(1)f_{ji}(a)$ 从(4)，定义 $f_{jj}(x)=\xi(x)$，$\forall x\in F$。又(9)，得到

$f_{k1}(1)\eta(1)f_{1i}(1)\xi(a)=f_{k1}(1)\eta(1)f_{1j}(1)f_{ji}(1)\eta(a)f_{1i}(1)$。再由 $f_{ij}(a)\neq 0$ 和(7)式，得到

$$\eta(a)=\xi(a),\quad \forall a\in F$$

将(9)代入(3)，又由 $f_{ij}(a)\neq 0$ 和(7)，可得

$$\eta(ab)=\eta(a)\eta(b),\quad \forall a,b\in F \tag{10}$$

对于任意不同的 $i,j,k\in[1,n]$ 和 $a+b\in F^*$，由

$$\frac{a}{a+b}E_{ij}+E_{ik}-E_{ji}+\frac{2a+b}{a+b}E_{jj}+E_{jk}+\frac{a}{a+b}E_{ki}-\frac{a^2}{(a+b)^2}E_{kj}+\frac{a}{a+b}E_{kk}\in F$$

得到

$$f_{ij}\left(\frac{a}{a+b}\right)f_{jk}(1)+f_{ik}(1)f_{kk}\left(\frac{a}{a+b}\right)=f_{ik}(1)$$

又由(9)和(10)，得到

$$\eta\left(\frac{a}{a+b}\right)+\eta\left(\frac{b}{a+b}\right)=\eta(1) \tag{11}$$

应用(10)，将(11)两边乘 $\eta(a+b)$，得到

$$\eta(a+b)=\eta(a)+\eta(b) \tag{12}$$

当 $a+b=0$ 时，运用(8)，易证(13)仍成立。从 $f_{ij}(a)\neq 0$，(9)，(10)和(12)，知 η 是 F 上的一个单自同态。应用(7)和(9)，有

$$f(A)=PA^{\eta}P^{-1},\ \forall A\in M_n(F)$$

其中 $P=\mathrm{diag}\left(1,f_{21}(1),\cdots,f_{n1}(1)\right)$ 为一个可逆对角阵，证毕。

定理 2.2： F 是一个域，若 $f:M_2(F)\to M_2(F)$ 为一个由函数 $\{F_{ij}:F\to F,i,j\in[1,2]\}$ 导出的映射，满足 $f(0)=0$，则 f 保幂等当且仅当下列(i) (ii)之一成立。

(i) 当 $A^2=A$ 时，$f(A)=\begin{pmatrix} f_{11}(a_{11}) & 0 \\ 0 & f_{22}(a_{22})\end{pmatrix}$，$f_{11}$ 及 f_{22} 是值为 0,1 的函数，其它情况下 f_{11} 及 f_{22} 任意，$f(A)$ 仍为对角阵。

(ii) 由 $a^2+bc=a$ 可推出 $f_{11}(a)+f_{22}(1-a)=1$ 及 $f_{12}(b)f_{21}(c)=f_{11}(a)\left(1-f_{11}(a)\right)$。

证明：

充分性：注意到二阶幂等阵集

$$K=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\c&1-a\end{pmatrix}\middle|\, a^2+bc=a,a,b,c\in D\right\}$$

结论不难被证。

必要性：由 f 保幂等，得 $f(I)=\begin{pmatrix} f_{11}(1) & 0\\ 0 & f_{22}(1)\end{pmatrix}\in K$ 得 $f_{ii}(1)=1$ 或 0，可推出(i)。同理，当 $a^2+bc=a$ 时有 $f\begin{pmatrix}a&b\\c&1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{11}(a)&f_{12}(b)\\f_{21}(c)&f_{22}(1-a)\end{pmatrix}\in K$，若 $f_{11}(a)+f_{22}(1-a)\neq 1$，可推出 $f_{12}(b)=f_{21}(c)=0$，推出(i)。

若 $f_{11}(a)+f_{22}(1-a)=1$，可推出 $f_{12}(b)f_{21}(c)=f_{11}(a)(1-f_{11}(a))$，推出(ii)，证毕。

下面我们将用一个例子说明满足定理 1.2 中(ii)的条件的 f 也未必是标准的。

例 2.3：令 F 为一个至少包含 3 个元素的域，设 $f:M_2(F)\to M_2(F)$ 为一个由函数 $\{f_{ij} \mid i,j\in[1,2]\}$ 诱导的。

$f_{11}(x)=0\begin{cases}1, x=1\\0, x\neq 1\end{cases}$, $f_{22}(x)=\begin{cases}0, x=0\\1, x\neq 0\end{cases}$, $f_{12}(x)=x, f_{21}=0$。显然，$f(0)=0$ 且 f 满足定理 2.2 中(ii)的条件，因此运用定理 2.2 可知 f 保幂等。但是这个形式与定理 2.1 中的(ii)形式不同，事实上，当 $a\in F^*$ 且 $a\neq 1$ 有 $f_{11}(a)=0$，然而 f 不是标准的，单射 η 不存在。

注记 2.4：如果在定理 2.1 及 2.2 中去掉条件 $f(0)=0$，结论将更加复杂，例如 $f(A)=B, \forall A\in M_n(F)$，其中 $B\in K$ 为任意固定的矩阵，易见 f 保幂等。

3. 保矩阵的交换性

定理 3.1：本节我们研究保矩阵交换性的诱导映射，在一定条件下给出映射的形式。

F 是一个域，f 为 $M_n(F)$ 的诱导映射，$f(0)=0$ 且满足 $f_{ii}(1)\neq 0$，$(i\in[1,n])$：

(i)当 $n=1$ 时，则 f 是保交换性的。

(ii)当 $n\geq 3$ 时，则 f 保交换 $\Leftrightarrow$ f 有下列两种形式之一。

(1) $f(A)=qPA_1^{\delta}P^{-1}$，$\forall A=(a_{ij})\in M_n(F)$，其中 P 为 n 阶可逆对角阵，δ 为 F 的单自同态，$A^{\delta}=(\delta(a_{ij}))$，$q\in F^*$。

(2) $f(A)=\mathrm{diag}(f_{11}(a_{11}),\cdots,f_{nn}(a_{nn}))$。

(iii)当 $n=2$ 时，f 保交换当且仅当下列(1)(2)之一成立。

(1) $f(A)=\begin{pmatrix}\varphi(1)\delta(a_{11}) & \delta(a_{12})f_{12}(1)\\ \delta(a_{21})f_{21}(1) & \varphi(1)\delta(a_{22})\end{pmatrix}$

其中 δ 为 F 的自同态，f_{12},f_{21} 至少其一不为 0。

(2) $f(A)=\mathrm{diag}(f_{11}(a_{11}),f_{22}(a_{22}))$

证明(i)显然成立。

(ii)充分性显然，下证必要性。

设 $i,j,k\in[1,n]$，且互不相等，

令 $A=E_{ii}+E_{jj}+bE_{jk}$，$B=aE_{ij}+abE_{ik}$ 易见 $AB=BA$，由 f 保交换知 $f(A)f(B)=f(B)f(A)$，看 (i,j) 位置有

$$f_{ii}(1)f_{ik}(ab)=f_{ij}(a)f_{jk}(b) \tag{13}$$

此时分两种情形讨论。情形(1)对任意 $i\neq j$ 及任意 $a\in F^*$ 有 $f_{ij}(a)\neq 0$。

由 $f(aE_{ii}+aE_{jj})f(xE_{ii}+yE_{jj}+zE_{ij})=f(xE_{ii}+yE_{jj}+zE_{ij})f(aE_{ii}+aE_{jj})$，其中 $a,x,y,z\in F^*$，可推出 $f_{ii}(a)f_{ij}(z)=f_{ij}(z)f_{jj}(a)$。然后由 $f_{ij}(z)\neq 0$ 得

$$f_{ii}(a)=f_{jj}(a) \tag{14}$$

由 $f(E_{ii}+E_{ij})f(xE_{ii}+xE_{ij})=f(xE_{ii}+xE_{ij})f(E_{ii}+E_{ij})$，看 (i,j) 位置可得

$$f_{ii}(1)f_{ij}(x)=f_{ii}(x)f_{ij}(1) \tag{15}$$

令 $f_{ii}(1)=q\neq 0$，由(1)得

$$f_{ij}(a)f_{jk}(b)=qf_{ik}(ab) \tag{16}$$

由此情形条件可知

$$f_{ij}(a)\neq 0,\quad \forall a\in F^*,\ i,j\in[1,n] \tag{17}$$

令 $f_{12}(x)=q\phi(x)f_{12}(1)$，以下证明对任意 $i\neq j$ 有

$$f_{ij}(x)=\left(f_{1i}(1)\right)^{-1}q^2\phi(x)f_{1j}(1),\ \forall x\in F \tag{18}$$

由(13)可知，当 $j\geq 3$ 时有，

$$f_{1j}(x)=q^{-1}f_{12}(x)f_{2j}(1)=q^{-1}q\phi(x)f_{12}(1)f_{2j}(1)=q\phi(x)f_{1j}(1)$$

又对 $i\neq j\neq 1$ 有 $f_{1i}(1)f_{ij}(x)=qf_{1j}(x)=q^2\phi(x)f_{1j}(1)$，从而得(18)式。

由 $f_{21}(x)f_{13}(1)=qf_{23}(x)$ 可得 $f_{13}(1)^{-1}qf_{23}(x)=f_{21}(x)$，从而由(18)得

$$f_{21}(x)=f_{13}(1)^{-1}q\left(f_{12}(1)\right)^{-1}q^2\phi(x)f_{13}(1)=\left(f_{12}(1)\right)^{-1}q^2\phi(x)f_{11}(1)$$

此时也满足(18)。当 $i\geq 3$ 时，又由 $f_{i1}(x)f_{12}(1)=qf_{i2}(x)$ 可推出 $f_{i1}(x)=f_{12}(1)^{-1}qf_{i2}(x)=f_{12}(1)^{-1}q\left(f_{1i}(1)\right)^{-1}q^2\phi(x)f_{12}(1)=f_{1i}(1)^{-1}q^2\phi(x)f_{11}(1)$，仍然满足(18)。总之，(18)对所有情形成立。

令 $\delta(x)=q\phi(x)$，则由(13)计算可得 $q\phi(a)\phi(b)=\phi(ab)$，则有

$$\delta(ab)=\delta(a)\delta(b),\ \forall a,b\in F$$

再由 $f\left(aE_{ii}+(a-c)E_{ij}+cE_{jj}\right)f\left(E_{ii}+E_{ij}\right)=f\left(E_{ii}+E_{ij}\right)f\left(aE_{ii}+(a-c)E_{ij}+cE_{jj}\right)$

易推出 $f_{ii}(a)f_{ij}(1)=f_{ii}(1)f_{ij}(a-c)+f_{ij}(1)f_{jj}(c)$，由(13)得

$$f_{ii}(1)f_{ij}(a)=f_{ii}(1)f_{ij}(a-c)+f_{ij}(c)f_{jj}(1)$$

则 $f_{ij}(a)=f_{ij}(a-c)+f_{ij}(c)$，从而有 $\delta(x+y)=\delta(x)+\delta(y),\forall x,y\in F$，(17)式意味着 $\delta(x)=0\Leftrightarrow x=0$，故 δ 为 F 的单自同态。

令 $f_{ii}(x)=\varphi(x)$，则 $f_{12}(x)=q\phi(x)f_{12}(1)$ 中，$x=1$ 时 $f_{12}(1)=q\phi(1)f_{12}(1)$，则

$$q^{-1}=\varphi(1)=\left(f_{ii}(1)\right)^{-1} \tag{19}$$

由(15)得 $\varphi(1)\phi(x)=\varphi(x)\phi(1)$，由(19)得 $\phi(1)=\left(\varphi(1)\right)^{-1}$，故

$$\phi(x)=q^{-2}\varphi(x) \tag{20}$$

由(18)，设 $P=\operatorname{diag}\left(q,\left(f_{12}(1)\right)^{-1},\cdots,\left(f_{1n}(1)\right)^{-1}\right)$，易见

$$f_1(A_1)=qP\begin{pmatrix}\delta(a_{11}) & \delta(a_{12}) & \cdots & \delta(a_{1m})\\ \delta(a_{21}) & \delta(a_{22}) & \cdots & \delta(a_{2m})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \delta(a_{m-1m})\\ \delta(a_{m1}) & \delta(a_{m2}) & \cdots & \delta(a_{mm})\end{pmatrix}P^{-1}$$

注意到 $f_{11}(1)=q$ 及(18)式，易见 $\delta(a_{ii})=q^{-1}f_{ii}(a_{ii})$，这样结论(ii)的(1)被证明。

情形(2)：对某 $a\neq 0$ 及某 $i\neq j$ 有 $f_{ij}(a)=0$。

此时由(13)可知 $f_{ik}(ab)=0$，设 i,j,k 互不相等，由(13)可知 $f_{ii}(1)f_{il}(ab)=f_{ij}(a)f_{jl}(b)$，由 $f_{ij}(a)=0$ 知 $f_{il}=0$，类似的由 $f_{kk}(1)f_{kj}(ab)=f_{ki}(a)f_{ij}(b)$ 有 $f_{kj}=0$，接着用类似的方法可证得 $f_{ij}=0$，$f_{ji}=0$，$f_{jk}=0$，$f_{ki}=0$，此时设 $l\neq q$，由(13)可知 $f_{qq}(1)f_{ql}(ab)=f_{qi}af_{il}(b)$，由 $f_{il}=0$ 知 $f_{ql}(a)=0$，因此 $f(A)=\operatorname{diag}\left(\left(f_{11}(a_{11})\right),\cdots,\left(f_{nn}(a_{nn})\right)\right)$，结论(ii)的(2)被证明。

(iii)充分性

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$，易证 $AB=BA$ 当且仅当 $bu=yc$，$b(z-x)=y(d-a)$ 和 $c(x-z)=u(a-d)$ 成立。

由(iii)中(1)可知

$$f_{12}(b)f_{21}(u)=\delta(b)f_{12}(1)\delta(u)f_{21}(1),\quad f_{12}(y)f_{21}(c)=\delta(y)f_{12}(1)\delta(c)f_{21}(1),$$

若 $f_{12}(1), f_{21}(1)$ 其一为 0，则有 $0=0$，即 $f_{12}(b)f_{21}(u)=f_{12}(y)f_{21}(c)$。

若 $f_{12}(1), f_{21}(1)$ 都不为 0，则 $\delta(b)f_{12}(1)\delta(u)f_{21}(1)=\delta(y)f_{12}(1)\delta(c)f_{21}(1) \Leftrightarrow \delta(b)\delta(u)=\delta(y)\delta(c)$。又 δ 是自同态，由 $bu=yc$ 可得 $\delta(bu)=\delta(yc)$ 成立。故此时 $f_{12}(b)f_{21}(u)=f_{12}(y)f_{21}(c)$ 依然成立。

由(iii)中(1)可知 $f_{12}(b)\left[f_{22}(z)-f_{11}(x)\right]=\delta(b)f_{12}(1)\left[\varphi(1)\delta(z)-\varphi(1)\delta(x)\right]$，

$$f_{12}(y)\left[f_{22}(d)-f_{11}(a)\right]=\delta(y)f_{12}(1)\left[\varphi(1)\delta(d)-\varphi(1)\delta(a)\right]$$

若 $f_{12}(1), f_{21}(1)$ 其一为 0，则有 $0=0$，即 $f_{12}(b)\left[f_{22}(z)-f_{11}(x)\right]=f_{12}(y)\left[f_{22}(d)-f_{11}(a)\right]$

若 $f_{12}(1), f_{21}(1)$ 都不为 0，则 $\delta(b)f_{12}(1)\left[\varphi(1)\delta(z)-\varphi(1)\delta(x)\right]=\delta(y)f_{12}(1)\left[\varphi(1)\delta(d)-\varphi(1)\delta(a)\right]$ $\Leftrightarrow \delta(b)\left[\delta(z)-\delta(x)\right]=\delta(y)\left[\delta(d)-\delta(a)\right]$。又 δ 是自同态，由 $b(z-x)=y(d-a)$ 可得 $\delta\left[b(z-x)\right]=\delta\left[y(d-a)\right]$ 成立，故此时 $f_{12}(b)\left[f_{22}(z)-f_{11}(x)\right]=f_{12}(y)\left[f_{22}(d)-f_{11}(a)\right]$ 依然成立。

同理 $f_{21}(c)\left[f_{22}(z)-f_{11}(x)\right]=f_{21}(u)\left[f_{22}(d)-f_{11}(a)\right]$ 成立，故有 $f(A)f(B)=f(B)f(A)$，由(iii)中(2)可知 f_{12}，f_{21} 都为 0，显然有 $f(A)f(B)=f(B)f(A)$，故充分性成立。

下证必要性若 f_{12}，f_{21} 至少其一不为 0 时，不妨设 $f_{12}\neq 0$ (若 $f_{21}\neq 0$，证明是类似的)由 $AB=BA$，其中 $A=aE_{11}+E_{12}$，$B=abE_{11}+bE_{12}$，知 $f(aE_{11}+E_{12})f(abE_{11}+bE_{12})=f(abE_{11}+bE_{12})f(aE_{11}+E_{12})$，从而有 $f_{11}(a)f_{12}(b)=f_{11}(ab)f_{12}(1)$。

由(14)令 $\varphi=f_{11}=f_{22}$，则

$$\varphi(a)f_{12}(b)=\varphi(ab)f_{12}(1) \tag{21}$$

又由(15)得

$$\varphi(1)f_{12}(b)=\varphi(b)f_{12}(1) \tag{22}$$

综合(21)及(22)得 $\varphi(1)\varphi(a)f_{12}(b)=\varphi(1)\varphi(b)f_{12}(1)$ 及 $\varphi(1)\varphi(a)f_{12}(b)=\varphi(a)\varphi(b)f_{12}(1)$，由已知 $f_{12}\neq 0$ 及(21)易见 $f_{12}(1)\neq 0$ 从而得

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(ab)\varphi(1) \tag{23}$$

于是令 $\varphi(1)^{-1}\varphi(a)=\delta(a)$ 则仿 $n\geq 3$ 的情形易证 δ 为 F 的域自同态。

$$f(A)=\begin{pmatrix} f_{11}(a_{11}) & f_{12}(a_{12}) \\ f_{21}(a_{21}) & f_{22}(a_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(1)^{-1}\varphi(a_{12})f_{12}(1) \\ \varphi(1)^{-1}\varphi(a_{21})f_{21}(1) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \varphi(1)\delta(a_{11}) & \delta(a_{12})f_{12}(1) \\ \delta(a_{21})f_{21}(1) & \varphi(1)\delta(a_{22}) \end{pmatrix}$$

对 f_{12}，f_{21} 都为 0 时，仿 $n\geq 3$ 情形易得 $f(A)=\operatorname{diag}\left(f_{11}(a_{11}), f_{22}(a_{22})\right)$，故(iii)成立。

注记 3.2： 如果在定理 3.1 中去掉 $f(0)$ 或 $f_{ii}(1)\neq 0, \forall i\in[1,n]$，结论如何?这仍然是个开问题。

参考文献 (References)

[1] Li, C.K., Plevnik, L. and Semrl, P. (2012) Preservers of matrix pairs with a fixed inner product value. *Operators and*

Matrices, **6**, 433-464. http://dx.doi.org/10.7153/oam-06-29

[2] Cao, C.G., Ge, Y.L. and Yao, H.M. (2013) Maps preserving classical adjoint of products of two matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **61**, 1593-1604. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2012.753592

[3] Semrl, P. (2008) Commutativity preserving maps. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 1051-1070. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2007.05.006

[4] Li, C.K., Semrl, P. and Sze, N.S. (2007) Maps preserving the nilpotency of products of operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **424**, 222-239. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2006.11.013

[5] Chooi, W.L. and Ng, W.S. (2010) On classical adjoint-commuting mappings betweenmatrix algebras 0. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 2589-2599. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2009.12.001

[6] Liu, S.W. and Zhang, G.D. (2006) Maps preserving rank 1 matrices over fields. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, **23**, 138-140.

[7] Yang, L., Ben, X.Z., Zhang, M. and Cao, C.G. (2014) Induced maps on matrices over fields. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 596796, 5 p.