Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(6), 266-271
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56038

Stability in Predator-Prey Model with Age-Structure

Huantao Zhu

Hunan College of Information, Changsha Hunan
Email: zhu-huan-tao@163.com

Received: Oct. 26th, 2015; accepted: Nov. 10th, 2015; published: Nov. 17th, 2015

Abstract

The stability in predator-prey model with age-structure is investigated. Sufficient conditions for global asymptotic stability of boundary equilibrium and positive invariance and the boundedness are derived.

Keywords

Age-Structure, Predator Model, Stability

一类具年龄结构的捕食－食饵模型的稳定性

朱焕桃

湖南信息职业技术学院，湖南 长沙
Email: zhu-huan-tao@163.com

收稿日期：2015年10月26日；录用日期：2015年11月10日；发布日期：2015年11月17日

摘 要

研究了一类具有年龄结构的捕食－食饵模型系统，得到了该系统解的正不变性、有界性及其边界平衡点全局渐近稳定的充分条件。

文章引用：朱焕桃. 一类具年龄结构的捕食－食饵模型的稳定性[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 266-271.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56038

关键词

年龄结构，捕食模型，稳定性

1. 引言与引理

在现实生活中，各种种群的发展都与其年龄因素有着重要的关系，这表现在不同年龄的种群在生育和死亡方面存在很多差异。1911 年，Sharpe 和 Lotka [1]首次将种群的年龄因素考虑到模型中。随后，具有年龄结构的种群模型的研究有了丰富的结果[2]-[6]。本文将考虑在经典的 Lotka-Volterra 捕食－食饵模型的基础上将年龄结构引入到捕食种群中且适合 Mckendrick-Foerster 方程的一类捕食－食饵模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -kP(t) + m_0\mathrm{e}^{-k\tau}P(t-\tau)\mathrm{e}^{-\beta P(t-\tau)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = Q(t)\big(b - cQ(t) - dP(t)\big). \end{cases} \tag{1}$$

满足初始条件

$$P(s) \ge 0, Q(s) \ge 0, s \in [-\tau, 0], P(0) > 0, Q(0) > 0 \tag{2}$$

其中 b,c,d,m_0,β,k,τ 是正常数。

由文献[7]知，系统(1)在 $[0,+\infty)$ 存在唯一解。

引理 1.1 (Liapunov-LaSalle 不变原理)： 若 V 是 G 上的李雅普诺夫泛函，且 $x_t(\phi)$ 是方程 $\dot{x}(t) = f(x_t)$ 停留在 G 中的有界解，则当 $t \to +\infty$ 时，$x_t(\phi) \to M$。其中 $S = \{\phi \in G : \dot{V}(\phi) = 0\}$，$M$ 是集合 S 关于 $\dot{x}(t) = f(x_t)$ 的最大不变集。

2. 主要结论

我们首先讨论系统(1)在满足初始条件(2)时的解是正的和有界的。

定理 2.1： 对一切 $t \ge 0$，系统(1)满足初始条件(2)的解是正的。

证明：由系统(1)的第二个方程可以得到

$$Q(t) = Q(0)\mathrm{e}^{\int_0^t [b - cQ(s) - dP(s)]\mathrm{d}s}$$

根据初始条件(2)可知，$Q(t) > 0$。

假设 $p(t)$ 不恒为正，则一定存在一个 $t_0 > 0$，使得 $P(t_0) = 0$。

由(2)的第一个方程可得，

$$\dot{P}(t) = m_0\mathrm{e}^{-k\tau}P(t_0-\tau)Q(t_0-\tau)\mathrm{e}^{-\beta P(t_0-\tau)} > 0$$

这说明对于充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，当 $t \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0)$ 时，$P(t) < 0$，于是产生矛盾。因此，$P(t)$ 总是恒为正。

定理 2.2： 对一切 $t \ge 0$，系统(1)满足初始条件(2)的解是有界的。

证明：由(1)的第二个方程，我们可以得到

$$\dot{Q}(t) \le Q(t)\big(b - cQ(t)\big), t \ge 0$$

故对充分小的 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $t_1 > 0$ 使得对所有的 $t > t_1$ 有 $Q(t) \le \dfrac{b}{c} + \varepsilon_1$

又根据系统(1)的第一个方程和 $\sup\{a\mathrm{e}^{-a}, a \in R\} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，我们得到

$$\dot{P}(t) \le -kP(t) + \frac{m_0}{e\beta}\left(\frac{b}{c}+\varepsilon_1\right)$$

故对所有的 $t > t_1$，有 $P(t) \le \frac{m_0}{ek\beta}\left(\frac{b}{c}+\varepsilon_1\right)+\varepsilon_2$。

定理 2.3： 对于系统(1)的所有解 $\left(P(t),Q(t)\right)$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(P(t),Q(t)\right)=\left(0,\frac{b}{c}\right)$ 当且仅当 $bm_0e^{-k\tau} \le kc$。

证明：先证 $bm_0e^{-k\tau} \le kc \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\left(P(t),Q(t)\right)=\left(0,\frac{b}{c}\right)$。

当 $bm_0e^{-k\tau} < kc$ 时，则存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $\left(\frac{b}{c}+\varepsilon\right)m_0e^{-k\tau} < k$，根据定理 2.1 知，存在 $T = T_\varepsilon > 0$，使得当 $t > T$ 时，有 $Q(t) < \frac{b}{c}+\varepsilon$ 成立，从而对 $t \ge T+\tau$ 有

$$\dot{P}(t) < -kP(t) + m_0e^{-k\tau}\left(\frac{b}{c}+\varepsilon\right)P(t-\tau)$$

考虑比较方程

$$\dot{z}(t) = -kz(t) + m_0e^{-k\tau}\left(\frac{b}{c}+\varepsilon\right)z(t-\tau)$$

由文献[8]中的引理 1 知，$\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$.又由定理 2.1 和比较定理得到

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$$

因此存在充分小的 $\xi > 0$ 和 $T_\xi > 0$ 使得对所有的 $t \ge T_\xi$ 有 $P(t) < \xi$。

又由系统(1)的第二个方程有 $\dot{Q}(t) \ge Q(t)\left(b-d\xi-cQ(t)\right)$。

再由比较定理可得

$$\liminf_{t\to+\infty} Q(t) \ge \frac{b-d\xi}{c}.$$

由于 ξ 任意小，结合上面的讨论，我们有 $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \frac{b}{c}$。

当 $bm_0e^{-k\tau} = kc$ 时，由系统(1)的第二个方程可知，当 $Q(t) \ge \frac{b}{c}$ 时它总递减。若存在 $t_2 > 0$，使得 $Q(t_2) < \frac{b}{c}$，则对所有的 $t > t_2$，有 $Q(t) < \frac{b}{c}$。事实上，若存在 $t_3 > t_2$，使得 $Q(t_3) = \frac{b}{c}$，则有 $\dot{Q}(t_3) \ge 0$，矛盾，故 $Q(t)$ 有两种情形；

(1) $Q(t) > \frac{b}{c}$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \frac{b}{c}$；

(2) 存在 $t_4 > 0$ 使得对所有的 $t > t_4$，有 $Q(t) < \frac{b}{c}$。

对情形(1)，仅需证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$。对系统(1)的第二个方程两边从 0 到 t 积分得

$$\begin{aligned} Q(t)-Q(0) &= \int_0^t Q(s)\left(b-cQ(s)\right)ds - d\int_0^t P(s)Q(s)ds \\ &< \int_0^t Q(s)\left(b-cQ(s)\right)ds - \frac{bd}{c}\int_0^t P(s)ds \end{aligned}$$

因此

$$\frac{bd}{c}\int_0^t P(s)\mathrm{d}s < Q(0)-Q(t)+\int_0^t Q(s)-cQ(s)\mathrm{d}s < Q(0)$$

由 $Q(t)$ 的有界性可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=0$ 。

对情形(2)，考虑 Liapunov 泛函

$$V(t)=P(t)+k\int_{t-\tau}^t P(s)\mathrm{d}s\,.$$

对所有的 $t\ge t_4+\tau$ 沿着系统(1)的轨线计算 $V(t)$ 的导数可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\big|_{(1)} &= -kP(t-\tau)+m_0\mathrm{e}^{-k\tau}P(t-\tau)Q(t-\tau)\mathrm{e}^{-\beta P(t-\tau)}\\ &= -kP(t-\tau)\left(-k+m_0\mathrm{e}^{-k\tau}Q(t-\tau)\mathrm{e}^{-\beta P(t-\tau)}\right)\\ &< P(t-\tau)\left(-k+\frac{m_0 b}{c}\mathrm{e}^{-k\tau}\mathrm{e}^{-\beta P(t-\tau)}\right) \quad \left(\because Q(t-\tau)<\frac{b}{c}\right)\\ &\le 0\end{aligned}$$

由引理 1.1 知， $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=0$ 。对于 $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)=\frac{b}{c}$ 的证明类似于第一种情形。

下证 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(P(t),Q(t)\right)=\left(0,\frac{b}{c}\right)\Rightarrow bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}\le kc$ 。否则，设 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}>kc$ 成立，则我们知道系统(1)有唯一的正平衡点 E^* 。这与系统(1)对所有解 $\left(P(t),Q(t)\right)$ ，都有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(P(t),Q(t)\right)=\left(0,\frac{b}{c}\right)$ 矛盾。

将系统(1)关于平衡点 E_0 线性化，其相应的特征方程为

$$(\lambda+k)(\lambda-b)=0$$

其根为 $\lambda=-k$ 和 $\lambda=b$ 。这说明对所有的 $\tau\ge 0$ 平衡点 E_0 是不稳定的。

将系统(1)关于平衡点 E 线性化，相应的特征方程为

$$(\lambda+b)\left(\lambda+k-\frac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\right)=0$$

显然， $\lambda=-b$ 是上方程的一个特征根。因此，我们只需讨论下面方程的根

$$\lambda+k-\frac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\mathrm{e}^{-k\tau}=0 \tag{3}$$

令

$$\Delta(\lambda,\tau)=\lambda+k-\frac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\mathrm{e}^{-k\tau}$$

对 $\tau\ge 0$ 和 $\lambda\ge 0$ ，我们有

$$\Delta(0,\tau)=k-\frac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c} \tag{4}$$

和

$$\frac{\partial\Delta(\lambda,\tau)}{\partial\lambda}=1+\frac{\tau bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}>0 \tag{5}$$

由式(4)知，当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}<kc$ 时，$\Delta(0,\tau)>0$。再由式(5)知，对所有的 $\tau>0$，方程(3)没有正根。

注意到若 $\tau=0$ 和 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}<kc$，则方程(3)的特征根是负的。进一步我们可以证明当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}<kc$ 时，对所有的 $\tau>0$，方程(3)的所有根必定具有负实部。假设存在 $\tau_*>0$ 使得方程(3)有一对纯虚根 $\lambda=\pm i\omega(\omega>0)$，则由方程(3)，我们有

$$\begin{cases}\dfrac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\cos\omega\tau_*=k,\\[2mm]\dfrac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\sin\omega\tau_*=-\omega,\end{cases}$$

两边平方相加可得

$$\omega^2=\left(\frac{bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{c}\right)^2-k^2<0$$

这说明方程(3)没有正根，即 τ_* 不存在。因此，当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}<kc$ 时，方程(3)的所有根都具有负实部，即系统(1)的平衡点 E 渐进稳定的。

当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}=kc$ 时，$\lambda=0$ 是方程(3)的特征根。由式(5)知，$\lambda=0$ 是一个简单的特征根。

当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}>kc$ 时，由式(4)知 $\Delta(0,\tau)<0$，而 $\Delta(+\infty,\tau)=\infty$，因此 $\Delta(\lambda,\tau)$ 至少有一个正实根，从而平衡点 E 是不稳定的。

由上述讨论和定理 2.3，我们得到以下结论

定理 2.4： 当 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}\le kc$ 时，系统(1)的平衡点 E 是全局渐进稳定的。

3. 举例

我们考虑如下系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-0.5P(t)+6\mathrm{e}^{-0.5\tau}P(t-\tau)\mathrm{e}^{-0.8P(t-\tau)},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=Q(t)\big(5-0.6Q(t)-0.5P(t)\big).\end{cases}\tag{6}$$

通过计算，当 $\tau\ge 9.2103$ 时，我们得到 $bm_0\mathrm{e}^{-k\tau}\le kc$，其中 $k=0.5$，$m_0=6$，$b=5$，$c=0.6$。根据定理 2.4，系统(6)的平衡点是全局渐进稳定的。

基金项目

湖南省教育厅资助科研项目(13C660)。

参考文献 (References)

[1] Sharpe, F.R. and Lotka, A.J. (1911) A Problem in Age Distribution. *Philosophical Magazine*, **21**, 435-438. http://dx.doi.org/10.1080/14786440408637050

[2] Cushing, J.M. (1976) Periodic Lotka-Volterra Competition Equations. *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 665-673.

[3] Webb, G.F. (1985) Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics. Marcel Dekker, New York.

[4] Cushing, J.M. and Saleem, M. (1982) A Predator-Prey Model with Age Structure. *Journal of Mathematical Biology*, **14**, 231-250. http://dx.doi.org/10.1007/BF01832847

[5] Anderson, R.M. and May, R.M. (1991) Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. Oxford University Press, Oxford.

[6] 马知恩. 种群动态学数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1984.

[7] Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin.

http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7

[8] Gourley, S.A. and Kuang, Y. (2004) A Stage Structured Predator-Prey Model and Its Dependence on Maturation Delay and Death Rate. *Journal of Mathematical Biology*, **49**, 188-200. http://dx.doi.org/10.1007/s00285-004-0278-2