Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(6), 291-297
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56042

Hardy Type Estimates for Riesz Transforms Associated with Schrödinger Operators on the Heisenberg Group

Guobin Tang, Yu Liu*

School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing
Email: tgb0405@126com, *liuyu75@pku.org.cn

Received: Nov. 8th, 2015; accepted: Nov. 24th, 2015; published: Nov. 30th, 2015

Abstract

Let $\mathbb{H}^n$ be the Heisenberg group and $Q=2n+2$ be its homogenous dimension. In this paper, we consider the Schrödinger operator $-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$, where $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ is the sub-Laplacian and the non-negative potential V belongs to the reverse Hölder class B_{q_1} for $q_1>Q/2$. We show that the operator $T=V^{\alpha}\left(-\Delta+V\right)^{-\alpha}$ is bounded from $H_L^1\left(\mathbb{H}^n\right)$ to $L^1\left(\mathbb{H}^n\right)$.

Keywords

Heisenberg Group, Reverse Hölder Class, Riesz Transform, Schrödinger Operators

海森堡群上与薛定谔算子相关的里斯变换的哈代型估计

汤国斌，刘　宇*

北京科技大学数理学院，北京
Email: tgb0405@126com, *liuyu75@pku.org.cn

*通讯作者。

文章引用: 汤国斌, 刘宇. 海森堡群上与薛定谔算子相关的里斯变换的哈代型估计[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 291-297.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56042

收稿日期：2015年11月8日；录用日期：2015年11月24日；发布日期：2015年11月30日

摘　要

令 $\mathbb{H}^n$ 为海森堡群，$Q=2n+2$ 为其齐次维数。本文考虑了薛定谔算子 $-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$，其中 $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 为次拉普拉斯算子，对于 $q_1>Q/2$，非负位势 V 属于逆赫尔德类 B_{q_1}。我们将证明算子 $T=V^{\alpha}(-\Delta+V)^{-\alpha}$ 在 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{H}^n)$ 上是有界的。

关键词

海森堡群，逆赫尔德类，里斯变换，薛定谔算子

1. 引言

令 $L=-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$ 为海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上的薛定谔算子，其中 $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 为在海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上的次拉普拉斯算子，非负位势 V 属于逆赫尔德群 $B_{q_1}(q_1\ge Q/2, Q\ge 4)$。这篇文章中我们考虑与薛定谔算子 L 相关的里斯变换 $T=V^{\alpha}(-\Delta+V)^{-\alpha}(0<\alpha\le 1)$。近年来，一些关于在海森堡群和其他李群上与薛定谔算子和薛定谔类型算子相关的问题已经被许多学者广泛研究(见[1]-[9])。这些文章中关键问题是对与薛定谔算子相关的里斯变换估计的研究。我们回顾一下关于海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 的基本知识。海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 是李群上基础的流形 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$，乘积为 $(x,y,t)(x',y',t')=(x+x',y+y',t+t'+2x'y-2xy')$。

它的李代数是由下面的左不变向量场给出

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial t},\ \mathrm{Y}_j=\frac{\partial}{\partial y_j}+2x_j\frac{\partial}{\partial t},\ j=1,2,\cdots,n,\ \ T=\frac{\partial}{\partial t}$$

它们满足 $[X_j,\mathrm{Y}_j]=-4T, j=1,2,\cdots,n$。那么次拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 定义为 $\Delta_{\mathbb{H}^n}=\sum_{j=1}^{n}(X_j^2+\mathrm{Y}_j^2)$。梯度算子 $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ 定义为 $\nabla_{\mathbb{H}^n}=(X_1,\cdots,X_n,\mathrm{Y}_1,\cdots,\mathrm{Y}_n)$。$\mathbb{H}^n$ 上的伸缩为 $\delta_\lambda(x,y,t)=(\lambda x,\lambda y,\lambda^2 t),\lambda>0$。在 $\mathbb{H}^n$ 上的哈尔测度与在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度是一致的。我们用 $|E|$ 表示任意可测集 E 上的测度，那么 $|\delta_\lambda E|=\lambda^Q|E|$，其中 $Q=2n+2$ 为 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数。

我们通过 $|g|=\left(\left(|x|^2+|y|^2\right)^2+|t|^2\right)^{\frac{1}{4}}, g=(x,y,t)\in\mathbb{H}^n$ 定义一个齐次范数。该范数满足三角不等式且可诱导出左不变距离 $d(g,h)=|g^{-1}h|$。那么以 g 为中心，r 为半径的球定义为

$$B(g,r)=\left\{h\in\mathbb{H}^n:|g^{-1}h|<r\right\}$$

球 $B(g,r)$ 是由 $B(0,r)$ 左平移 g 得到，所以我们有 $|B(g,r)|=\alpha_1 r^Q$，其中 $\alpha_1=|B(0,1)|$。

一个 $\mathbb{H}^n$ 上的非负局部 L^q 可积函数 V 被称为属于逆赫尔德类 $B_q(1<q<\infty)$，如果存在 $C>0$ 使得逆赫尔德不等式对于每个 $\mathbb{H}^n$ 上的球 B 成立

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(g)^q\,\mathrm{d}g\right)^{\frac{1}{q}}\le\frac{C}{|B|}\int_B V(g)\,\mathrm{d}g$$

当 $q_2 > q_1$ 时,显然有 $B_{q_2} \subset B_{q_1}$。从文献[10]中我们知道 B_q 族具有“自提升性”，即如果 $V \in B_q$ 则对于某个 $\varepsilon > 0$ 有 $V \in B_{q+\varepsilon}$。假设 $V \in B_{q_1}$ 对于某个 $q_1 > Q/2$，则辅助函数 $m(\mathrm{g}, V)$ 定义如下。

定义 1.1： 对 $\mathrm{g} \in \mathbb{H}^n$，辅助函数 $m(\mathrm{g}, V)$ 定义为：

$$\rho(\mathrm{g}) = \frac{1}{m(\mathrm{g}, V)} = \sup_{r>0}\left\{r : \frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},r)} V(y)\,\mathrm{d}y \le 1\right\},\ \mathrm{g} \in \mathbb{H}^n$$

为了获得 T 在哈代空间上的估计，我们回顾一下在文献[8]和[10]中在海森堡群上与薛定谔算子 L 相关的哈代空间。定义与 $\left\{T_s^L : s > 0\right\}$ 相关的极大函数为 $M^L f(\mathrm{g}) = \sup_{s>0}\left|T_s^L f(\mathrm{g})\right|$，其中 $\left\{T_s^L : s > 0\right\} = \left\{\mathrm{e}^{-sl} : s > 0\right\}$ 是由薛定谔算子 L 产生的半群。哈代空间 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 的定义如下：

定义 1.2： 如果 $M^L f$ 属于 $L^1(\mathbb{H}^n)$,则称函数 $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ 是 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 空间中的元素。f 的半群定义为 $\|f\|_{H_L^1(\mathbb{H}^n)} = \left\|M^L f\right\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}$。

哈代空间 H_L^1 有一个很好的性质，那就是它有原子分解，其内容如下：

定义 1.3： 令 $1 < q \le \infty$，一个函数 $a \in L^q(\mathbb{H}^n)$ 称作是一个 $H_L^{1,q}$-原子如果它满足下面的条件

(1) $\operatorname{supp} a \subset B(\mathrm{g}_0, r)$，

(2) $\|a\|_{L^q(\mathbb{H}^n)} \le \left|B(\mathrm{g}_0, r)\right|^{\frac{1}{q}-1}$，

(3)如果 $r < \dfrac{\rho(\mathrm{g}_0)}{4}$，则 $\int_{B(\mathrm{g}_0,r)} a(\mathrm{g})\,\mathrm{dg} = 0$。

从定义 1.3 中的(1)和(2)可以得到 $1 \le q < \infty$ 时 $H_L^{1,\infty}$ 也是 $H_L^{1,q}$ 原子。我们可以由[8]和[10]的结果得到原子的刻画。

命题 1.4： 令 $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ 和 $1 < q \le \infty$。当且仅当 f 可以写成 $f = \sum_j \lambda_j a_j$ 时 $f \in H_L^1(\mathbb{H}^n)$，其中 a_j 是 $H_L^{1,q}$-原子，$\sum_j \left|\lambda_j\right| < \infty$，且其和按 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 范数收敛，并且有 $\|f\|_{H_L^1(\mathbb{H}^n)} \sim \inf\left\{\sum_j \left|\lambda_j\right|\right\}$，其中下确界取自于 f 在 $H_L^{1,q}$-原子上的所有原子分解。

通过 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 的原子分解，我们就可以知道 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 空间是比经典哈代空间 $H^1(\mathbb{H}^n)$ 要大。

接下来我们给出文章的主要结果。

定理 1.5： 假设 $V \in B_{q_1}, q_1 > Q/2$，则 $T = V^\alpha(-\Delta + V)^{-\alpha}$ 是 $H_L^1(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{H}^n)$ 的有界线性算子。即存在常数 $C > 0$ 使得 $\|Tf\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \le C\|f\|_{H_L^1(\mathbb{H}^n)}$。

2. 辅助函数 $m(\mathrm{g}, V)$

在这一部分，我们回顾关于辅助函数的相关引理。这些定理的证明在[1]中均给出。假设 $V \in B_{q_1}, q_1 > \dfrac{Q}{2}$ 并且是非负的。

引理 2.1： 存在 $C > 0$，使得 $0 < r < R < \infty$ 时

$$\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},r)} V(h)\,\mathrm{d}h \le C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{Q}{q_1}-2}\frac{1}{R^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},R)} V(h)\,\mathrm{d}h$$

引理 2.2： 如果 $r = \rho(\mathrm{g})$,那么 $\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},r)} V(h)\,\mathrm{d}h = 1$。且 $\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},r)} V(h)\,\mathrm{d}h \sim 1$ 当且仅当 $r \sim \rho(\mathrm{g})$

引理 2.3： 存在 $C > 0$ 和 $l_0 > 0$ 使得对于任意的 $\mathbb{H}^n$ 中的 g, h 有

$$\frac{1}{C}\left(1+m(\mathrm{g},V)\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|\right)^{-l_0}\leq\frac{\rho(h)}{\rho(\mathrm{g})}\leq C\left(1+\frac{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|}{\rho(\mathrm{g})}\right)^{\frac{l_0}{l_0+1}}$$

特别的如果 $\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|<C\rho(\mathrm{g})$ 时，有 $\rho(\mathrm{g})\sim\rho(h)$。

引理 2.4： 存在 $C>0$ 和 $l_0>0$ 使得

$$\int_{B(\mathrm{g},R)}\frac{V(h)}{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|^{Q-2}}\mathrm{d}h\leq\frac{C}{R^{Q-2}}\int_{B(\mathrm{g},R)}V(h)\mathrm{d}h\leq C\left(1+\frac{R}{\rho(\mathrm{g})}\right)^{l_1}$$

3. 薛定谔算子基本解的估计

我们回顾一下算子 $-\Delta+V+i\tau$ 的基本解的估计以及里斯变换的核的估计。定义 $\Gamma(\mathrm{g},h,\lambda)$ 是算子 $-\Delta+V+\lambda$ 的基本解，其中 $\lambda\in[0,\infty)$。显然 $\Gamma(\mathrm{g},h,\lambda)=\Gamma(\mathrm{g},h,-\lambda)$。

下面引理的证明在[1]中给出。

引理 3.1： 假设 $V\in B_{q_1}$， $q>\frac{Q}{2}$。那么存在 $C_N>0$ 使得对于 $\mathrm{g}\neq h$ 有

$$\left|\Gamma(\mathrm{g},h,\lambda)\right|\leq\frac{C_N}{\left\{1+\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|\left|\lambda\right|^{1/2}\right\}^N\left\{1+\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|\rho(\mathrm{g})^{-1}\right\}^N}\frac{1}{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|^{Q-2}}$$

算子 $T=V^\alpha(-\Delta+V)^{-\alpha}$ 被定义为

$$Tf(\mathrm{g})=\int_{\mathbb{H}^n}K(\mathrm{g},h)f(h)\mathrm{d}h,$$

其中 $K(\mathrm{g},h)=V(\mathrm{g})^\alpha\Gamma(\mathrm{g},h)$，且 $\Gamma(\mathrm{g},h)=\Gamma(\mathrm{g},h,0)$。

下面的定理可以从[2]得到

引理 3.2： 假设 $V\in B_{q_1}$， $q>\frac{Q}{2}$。对于任意的正整数 $N>0$ 存在 $C_N>0$ 使得

$$\left|K(\mathrm{g},h)\right|\leq\frac{C_N}{\left\{1+\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|\rho(\mathrm{g})^{-1}\right\}^N}\frac{V(\mathrm{g})^\alpha}{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|^{Q-2\alpha}}$$

且 $\left|K(\mathrm{g},h\xi)-K(\mathrm{g},h)\right|\leq\frac{C_N}{\left\{1+\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|\rho(\mathrm{g})^{-1}\right\}^N}\frac{|\xi|^\delta}{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|^{Q-2\alpha+\delta}}V(\mathrm{g})^\alpha$

其中 $|\xi|\leq\frac{\left|\mathrm{g}^{-1}h\right|}{2}$。

4. 主要结果的证明

这一部分将证明里斯变换 T 在海森堡群上的哈代型估计。定理 1.5 的证明依赖于下面引理 4.2。

下面的命题给出了与薛定谔算子 $L=-\Delta+V$ 有关的里斯变换的 $L^p(\mathbb{H}^n)$ 有界性，证明过程参见[2]。

命题 4.1： 假设 $V\in B_{q_1}$， $\frac{Q}{2}\leq q_1<Q$，那么对于 $1<p\leq q_1$，

$$\left\|V^\alpha(-\Delta+V)^{-\alpha}f\right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}\leq C_p\left\|f\right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}.$$

其中 C_p 为不依赖与 f 的正常数。

引理 4.2：对于任意的 $H_L^{(1,q)}$ 原子 a，令 $q_1 > \frac{Q}{2}$，则存在 $1 < q < q_1$

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \le C,$$

其中 C 是一个与 a 无关的常数。

证明：我们分两种情况来证明这个引理：$r \ge \frac{\rho(g_0)}{4}$ 和 $r < \frac{\rho(g_0)}{4}$。

情况一：我们考虑 $r \ge \frac{\rho(g_0)}{4}$ 的时候。令 $B^* = B(g_0, 2r), B^\# = B(g_0, 2\rho(g_0))$。那么

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \le \|\chi_{B^*} Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} + \|\chi_{B^{*c}} Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} = I_1 + I_2.$$

取适当的 $q > 1$ 使得 $1 < q < 2q_1$。那么利用命题 4.1，T 在 $L^q(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{H}^n)$ 是有界的，从而由赫尔德不等式我们可以得到

$$I_1 = \left(\int_{B^*} |Ta(g)|\right) \le \left(\int_{B^*} 1 \mathrm{d}g\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{B^*} |Ta(g)|^q \mathrm{d}g\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le C|B|^{1-\frac{1}{q}} \|a\|_{L^q(\mathbb{H}^n)} \le C|B|^{1-\frac{1}{q}} |B|^{\frac{1}{q}-1} = C$$

对于 I_2，由闵可夫斯基不等式和引理 2.3，且 $|g^{-1}h| \sim |g^{-1}g_0|$，我们有

$$I_2 \le \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\int_{B^{*c}} |K(g,h)| \mathrm{d}g\right) \le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\int_{B^{*c}} \frac{V(g)^\alpha \mathrm{d}g}{|g^{-1}h|^{Q-2\alpha} \left(1 + |g^{-1}h| \rho(g)^{-1}\right)^N} \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\int_{B^{*c}} \frac{V(g)^\alpha \mathrm{d}g}{|g^{-1}g_0|^{Q-2\alpha} \left(1 + |g^{-1}g_0| \rho(g_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r < |g^{-1}g_0| \le 2^{j+1} r} \frac{V(g)^\alpha \mathrm{d}g}{\left(2^j r\right)^{Q-2\alpha} \left(1 + 2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q-2\alpha}} \int_{|x-x_0| \le 2^{j+1} r} V(g)^\alpha \mathrm{d}g \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q-2\alpha}} \left\{ \int_{|g^{-1}g_0| \le 2^{j+1} r} V(g)^{q_1} \mathrm{d}g \right\}^{\frac{\alpha}{q_1}} \left(2^j r\right)^{\left(1-\frac{\alpha}{q_1}\right) Q} \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \frac{1}{\left(2^j r\right)^{-2\alpha}} \left\{ \frac{1}{\left(2^j r\right)^Q} \int_{|g^{-1}g_0| \le 2^{j+1} r} V(g)^{q_1} \mathrm{d}g \right\}^{\frac{\alpha}{q_1}} \right)$$

$$\le C_N \int_B |a(h)| \mathrm{d}h \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}} \frac{1}{\left(2^j r\right)^{-2\alpha}} \left\{ \frac{1}{\left(2^j r\right)^Q} \int_{|g^{-1}g_0| \le 2^{j+1} r} V(g) \mathrm{d}g \right\}^{\alpha} \right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}}}\left\{\frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q-2}}\int_{|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}V(\mathrm{g})\mathrm{dg}\right\}^{\alpha}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+2^j\right)^{\frac{N}{l_0+1}-\alpha l_1}}\right)\le C\left(\int_B|a(h)|^q\mathrm{d}h\right)^{1/q}|B|^{1-1/q}=C,$$

其中我们选择的是足够大的 N 且用了假设 $\frac{\rho(\mathrm{g}_0)}{4}\le r\le\rho(\mathrm{g}_0)$。

情况二：我们考虑 $r<\frac{\rho(\mathrm{g}_0)}{4}$ 的时候，注意 $B^*\subseteq B^\#$。这时，原子 a 是一个经典原子。我们对算子 T 做如下分解：

$$\begin{aligned}Ta(\mathrm{g})&\doteq\int_{R^d}K(\mathrm{g},h)a(h)\mathrm{d}h\\&=\int_{B^{\#c}}K(\mathrm{g},h)a(h)\mathrm{d}h+\int_{B^\#\setminus B^*}\left[K(\mathrm{g},h)-K(\mathrm{g},\mathrm{g}_0)\right]a(h)\mathrm{d}h+\int_{B^*}K(\mathrm{g},h)a(h)\mathrm{d}h\\&=J_1+J_2+J_3\end{aligned}$$

那么

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\le\|J_1\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}+\|J_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}+\|J_3\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}$$

显然，类似于情况一的证明，很容易就可证得

$$\|J_1\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}+\|J_3\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\le C$$

对于 J_2。应用引理 2.3 和引理 3.2 可以得到

$$\|J_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\le\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\int_{B^\#\setminus B^*}|K(\mathrm{g},h)-K(\mathrm{g},\mathrm{g}_0)|\mathrm{dg}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\int_{B^\#\setminus B^*}\frac{|h^{-1}\mathrm{g}_0|^{\delta}V(\mathrm{g})^{\alpha}\mathrm{dg}}{\left(1+|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{N}|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|^{Q-2\alpha+\delta}}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\int_{B^\#\setminus B^*}\frac{|h^{-1}\mathrm{g}_0|^{\delta}V(\mathrm{g})^{\alpha}\mathrm{dg}}{\left(1+|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|^{Q-2\alpha+\delta}}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^j r<|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}\frac{r^{\delta}V(\mathrm{g})^{\alpha}\mathrm{dg}}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}\left(2^j r\right)^{Q-2\alpha+\delta}}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\frac{1}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}}\frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q-2\alpha}}\int_{|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}V(\mathrm{g})^{\alpha}\mathrm{dg}\right)$$

$$\le C_N\int_B|a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\frac{1}{(2^j r)^{Q-2\alpha}}\frac{1}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}}\left\{\int_{|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}V(\mathrm{g})^{q_1}\mathrm{dg}\right\}^{\frac{\alpha}{q_1}}\left(2^j r\right)^{\left(1-\frac{\alpha}{q_1}\right)Q}\right)$$

$$\le C_N\int_B |a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\frac{1}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}}\frac{1}{\left(2^j r\right)^{-2\alpha}}\left\{\frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q}}\int_{|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}V(\mathrm{g})^{q_1}\,\mathrm{dg}\right\}^{\frac{\alpha}{q_1}}\right)$$

$$\le C_N\int_B |a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\frac{1}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}}}\left\{\frac{1}{\left(2^j r\right)^{Q-2}}\int_{|\mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}_0|\le 2^{j+1}r}V(\mathrm{g})\mathrm{dg}\right\}^{\alpha}\right)$$

$$\le C_N\int_B |a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\frac{1}{\left(1+2^j r\rho(\mathrm{g}_0)^{-1}\right)^{\frac{N}{l_0+1}-\alpha l_1}}\right)\le C_N\int_B |a(h)|\mathrm{d}h\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\delta j}\right)\le C,$$

其中 N 足够大。因此我们证明了 $\|Ta\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\le C$。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11471018)，中央高校基本科研业务费专项资金(No.FRF-TP-14-005C1)和北京市自然科学基金(No.1142005)资助。

参考文献 (References)

[1] Li, H.Q. (1999) Estimations L^p des opérateurs de Schrödinger sur les groupesnilpotents. *Journal of Functional Analysis*, **161**, 152-218. http://dx.doi.org/10.1006/jfan.1998.3347

[2] Liu, Y. (2009) The Weighted Estimates for the Operators $V^{\alpha}(-\Delta_G+V)^{-\beta}$ and $V^{\alpha}\nabla_G(-\Delta_G+V)^{-\beta}$ on the Stratified Lie Group G. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **349**, 235-244. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.043

[3] Lin, C.C. and Liu, H.P. (2011) $BMO_L(\mathbb{H}^n)$ Spaces and Carleson Measures for Schrödinger Operators, *Advances in Mathematics*, **228**, 1631-1688. http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2011.06.024

[4] Liu, Y. (2010) L^p Estimates for Schrödinger Operators on the Heisenberg Group. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **47**, 425-443. http://dx.doi.org/10.4134/JKMS.2010.47.2.425

[5] Liu, Y. and Xie, W.J. (2015) Riesz Transform Related to Schrödinger Type Operator on the Heisenberg Group. *Georgian Mathematical Journal*, **3**, 397-407. http://dx.doi.org/10.1515/gmj-2015-0024

[6] Liu, Y., Huang, J.Z. and Dong, J.F. (2015) An Estimates on the Heat Kernel of Schrödinger Operators with Non-Negative on Nilpotent Lie Groups and Its Applications. *Forum Mathematicum*, **27**, 1773-1798. http://dx.doi.org/10.1515/forum-2012-0141

[7] Liu, Y., Huang, J.Z. and Xie, D.M. (2010) Some Estimates of Schrödinger Type Operators on the Heisenberg Group. *Archive der Mathematik*, **94**, 255-264. http://dx.doi.org/10.1007/s00013-009-0098-0

[8] Yang, Da. and Zhou, Y. (2011) Localized Hardy Spaces H^1 Related to Admissible Functions on RD-Spaces and Application to Schrödinger Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 1197-1239. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05201-8

[9] Li, P.T. and Peng, L.Z. (2012) L^p Boundness of Commutator Operator Associated with Schrödinger Operators on Heisenberg Group. *Acta Mathematica Scientia. Series B*, **32**, 568-578. http://dx.doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60039-3

[10] Lin, C.C., Liu, H.P. and Liu, Y. (2011) Hardy Spaces Associated with Schrödinger Operators on the Heisenberg Group. Preprint Available at arXiv, **1106**, 4960.