Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(2), 121-126
Published Online March 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62018

A Strong Law of Large Number for PA Random Sequences

Ying Lin[1], Jianhua Shi[2]

[1]Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde Fujian
[2]School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou Fujian
Email: linying162@163.com

Received: Mar. 12th, 2016; accepted: Mar. 24th, 2016; published: Mar. 30th, 2016

Abstract

In this paper, the convergence properties of PA random sequences are studied, some strong laws of large numbers in the independent case are extended, and some new results are obtained.

Keywords

PA Random Sequences, Independent, Strong Law of Large Numbers

PA列的一个强大数定律

林　影[1]，施建华[2]

[1]宁德师范学院数学系，福建 宁德
[2]闽南师范大学数学与统计学院，福建 漳州
Email: linying162@163.com

收稿日期：2016年3月12日；录用日期：2016年3月24日；发布日期：2016年3月30日

摘　要

研究PA随机变量序列的收敛性质，推广了与独立情形相类似的一些强大数定律，得到了新的结果。

文章引用：林影，施建华. PA 列的一个强大数定律[J]. 理论数学, 2016, 6(2): 121-126.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62018

关键词

PA列，独立，强大数定律

1. 引言与引理

定义[1]：随机变量 $X_1,\cdots,X_n\,(n\ge 2)$ 被称为是 PA(Positively Associated)列，如果

$$\mathrm{Cov}\left(f\left(X_1,\cdots,X_n\right),g\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right)\ge 0,$$

其中 f 和 g 是任何两个定义在 R^n 上使上述协方差存在且对每个变元均非降的函数；称随机变量序列 $\{X_i,i\ge 1\}$ 是 PA 列，如果对任何自然数 $n\ge 2$， $X_1,\cdots,X_n$ 都是 PA 的。

由于 PA 列在多元统计分析，可靠性理论及相关的各种领域中均有广泛的应用，许多学者对其极限性质进行了深入的研究。如 Newman 和 Wright 在文[2]中建立了 PA 列的不变性原理，Prakasa Rao 在文[3]中给出了关于 PA 列的三级数定理。本文在文[3]的基础上给出了 PA 列的一个强大数定律，推广了与独立情形相类似的一些结果。

引理 1 [1]：设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是 PA 列， $f_n(x)$ 是 x 的非降函数， $n\ge 1$，则 $\{f_n(X_n),n\ge 1\}$ 仍为 PA 列。

引理 2 [3]：设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是 PA 列，对某 $C>0$，记 $X_n^C=-CI_{(X_n<-C)}+X_nI_{(|X_n|\le C)}+CI_{(X_n>C)}$， 如果有

$$\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^C<\infty$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left(X_j^C\right)+\sum_{j\ne k=1}^{\infty}\mathrm{Cov}\left(X_j^C,X_k^C\right)<\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X_n\right|\ge C\right)<\infty$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n<\infty\quad a.s.$。

2. 主要结果及其证明

定理：设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 为零均值的 PA 列，若下列二条件之一成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty,0<\beta\le 1 \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{|X_n|^\beta}{Ma_n|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty,1\le\beta\le 2 \tag{2}$$

其中 $M>0$， $\{a_n\}$ 是常数列且满足 $0\le a_n\uparrow\infty$， 则 $a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0\quad a.s.$。

证明：由 Kronecker 引理知，只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}X_n<\infty\quad a.s.$。由引理 1 知， $\{a_n^{-1}X_n,n\ge 1\}$ 还是 PA 列，从而只需验证引理 2 中三级数收敛。

由(1)式知，对充分大的 n，有

$$E\left(\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\right)\le\left\{E\left(\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\right)<\infty,0<\beta\le 1 \tag{3}$$

同理由(2)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{|X_n|^\beta}{Ma_n|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^\beta}\right)<\infty,1\le\beta\le 2 \tag{4}$$

当 $\beta>0$，$|X_n|\ge Ma_n>0$ 时，有 $\frac{2|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\ge 1$，从而

$$P\left(|X_n|\ge Ma_n\right)=E\left(I_{\left(|X_n|\ge Ma_n\right)}\right)\le E\left(\frac{2|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\right)$$

由(3)式可得 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\ge Ma_n\right)<\infty$。

当 $\beta\ge 1$，$|X_n|\ge Ma_n>0$ 时，有 $\frac{2|X_n|^\beta}{Ma_n|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^\beta}\ge 1$，由(4)式同样可得 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\ge Ma_n\right)<\infty$。从而当(1)式或(2)式成立时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\ge Ma_n\right)<\infty \tag{5}$$

对 $0<\beta\le 1$，有

$$\begin{aligned}\left|EX_n^{Ma_n}\right|&=\left|E\left(-Ma_nI_{(X_n<-Ma_n)}+X_nI_{(|X_n|\le Ma_n)}+Ma_nI_{(X_n>Ma_n)}\right)\right|\\&\le EMa_nI_{(|X_n|>Ma_n)}+\left|EX_nI_{(|X_n|\le Ma_n)}\right|\\&\le 2Ma_nE\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}+Ma_nE\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta}\\&\le 4Ma_nE\frac{|X_n|^\beta}{(Ma_n)^\beta+|X_n|^\beta}\end{aligned}$$

对 $\beta\ge 1$，由 $EX_n=0$，有

$$\begin{aligned}\left|EX_n^{Ma_n}\right|&\le EMa_nI_{(|X_n|>Ma_n)}+\left|EX_nI_{(|X_n|>Ma_n)}\right|\\&\le 2Ma_nE\frac{|X_n|^\beta}{Ma_n|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^\beta}+Ma_nE\left(\frac{2|X_n|^{\beta-1}}{|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^{\beta-1}}\frac{|X_n|}{Ma_n}\right)\\&\le 4Ma_nE\frac{|X_n|^\beta}{Ma_n|X_n|^{\beta-1}+(Ma_n)^\beta}\end{aligned}$$

所以当(1)式或(2)式成立时，均有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^M = \sum_{n=1}^{\infty} E\frac{X_n^{Ma_n}}{a_n} < \infty \tag{6}$$

由 Holder 不等式，得

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} EX_j^{Ma_j}X_k^{Ma_k} \le \sum_{j,k=1}^{\infty}\left\{E\left(X_j^{Ma_j}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{E\left(X_k^{Ma_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{E\left(X_j^{Ma_j}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{E\left(X_k^{Ma_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

由 C_r 不等式[4]知

$$\begin{aligned} E\left(X_j^{Ma_j}\right)^2 &\le 3\left\{E\left(Ma_j\right)^2 I_{\left(X_j<-Ma_j\right)} + X_{j\left(\left|X_j\right|<Ma_j\right)}^2 + \left(Ma_j\right)^2 I_{\left(X_j>Ma_j\right)}\right\} \\ &= 3\left(Ma_j\right)^2 E\left(I_{\left(\left|X_j\right|>Ma_j\right)}\right) + 3E\left(X_j^2 I_{\left(\left|X_j\right|\le Ma_j\right)}\right) \end{aligned}$$

对 $0<\beta\le 1$，有

$$\begin{aligned} E\left(X_j^{Ma_j}\right)^2 &\le 6\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{\left(Ma_j\right)^\beta + \left|X_j\right|^\beta} + 6\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{2\left(Ma_j\right)^\beta} \\ &\le 12\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{\left(Ma_j\right)^\beta + \left|X_j\right|^\beta} \end{aligned}$$

对 $1\le\beta\le 2$，有

$$\begin{aligned} E\left(X_j^{Ma_j}\right)^2 &\le 6\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{Ma_j\left|X_j\right|^{\beta-1} + \left(Ma_j\right)^\beta} + 6\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{2\left(Ma_j\right)^\beta} \\ &\le 12\left(Ma_j\right)^2 E\frac{\left|X_j\right|^\beta}{Ma_j\left|X_j\right|^{\beta-1} + \left(Ma_j\right)^\beta} \end{aligned}$$

所以当(1)式或(2)式成立时，均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

又由(7)式知

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} E\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\frac{X_k^{Ma_k}}{a_k} < \infty \tag{8}$$

从(6)式和(8)式可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left(\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\right) + \sum_{j\ne k=1}^{\infty}\mathrm{Cov}\left(\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j},\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\right) \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty}\mathrm{Cov}\left(\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j},\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} E\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\frac{X_k^{Ma_k}}{a_k} - \sum_{j,k=1}^{\infty}\left(E\frac{X_j^{Ma_j}}{a_j}\right)\left(E\frac{X_k^{Ma_k}}{a_k}\right) < \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

由(5)，(6)，(9)式及引理 2 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}X_n < \infty \quad a.s.$。证毕。

推论 1：设$\{X_n, n\ge 1\}$为零均值的 PA 列，$\{a_n\}$是常数列且满足$0\le a_n\uparrow\infty$，$0<\beta\le 2$，若$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty$，则$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0\quad a.s.$。

证明：由定理可见结论是显然的。

说明：推论 1 给出了与独立情形相类似的强大数律，由此可见，定理是推广的 PA 列的极限定理，它可使相关的问题更方便简洁。

推论 2：设$\{X_n, n\ge 1\}$为零均值的 PA 列，$0<\beta\le 2$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(E|X_k|^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$，$0<S_n\uparrow\infty$，若存在单调增函数$f:R_+\to R_+$，使得$\int_0^{\infty}f^{-\beta/2}(x)dx<\infty$，则$\frac{1}{f(S_n)}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0\quad a.s.$。

证明：由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{f(S_n)}\right|^{\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{S_n-S_{n-1}}{f^{\beta/2}(S_n)}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{dx}{f^{\beta/2}(x)}<\infty$$

及推论 1 即得。

推论 3：设$\{X_n, n\ge 1\}$为零均值的 PA 列，$\{a_n\}$是常数列且满足$0\le a_n\uparrow\infty$，$0<\beta\le 2$，$\{b_n\}$是正实数序列且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$，若存在$r\ge\beta$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{1-\frac{r}{\beta}}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty$$

则$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0\quad a.s.$。

证明：当$r=\beta$时，由推论 1 知结论成立。现设$r>\beta$，记

$$h_n=\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2r}}$$

于是有

$$\{h_n>b_n\}=\left\{\left(\frac{h_n}{b_n}\right)^{1-\frac{r}{\beta}}<1\right\}=\left\{\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2r}-\frac{1}{2}}<b_n^{1-\frac{r}{\beta}}\right\}$$

从而有

$$h_n=h_nI_{(h_n\le b_n)}+h_nI_{(h_n>b_n)}\le b_n+\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2r}-\frac{1}{2}}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}I_{(h_n>b_n)}\le b_n+b_n^{1-\frac{r}{\beta}}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

由假设可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2r}}=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{1-\frac{r}{\beta}}\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

又因为

$$\left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{\beta}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{E\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|^{r}\right)\right\}^{\frac{\beta}{2r}},$$

故由推论 1 知结论成立。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No.11471153)。

参考文献 (References)

[1] Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W. (1967) Associated of Random Variables, with Applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1466-1474. http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177698701

[2] Newman, C.M. and Wright, A.L. (1981) An Invariance Principle for Certain Dependent Sequences. *The Annals of Probability*, **9**, 671-675. http://dx.doi.org/10.1214/aop/1176994374

[3] Prakasa Rao, B.L.S. (2002) Hajek-Renyi-Type Inequality for Associated Sequences. *Statistics & Probability Letters*, **57**, 139-143. http://dx.doi.org/10.1016/S0167-7152(02)00025-1

[4] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率论极限理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.