Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 162-165
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63024

Hans汉斯

The Number of Hall π-Subgroups of a π-Separable Group

Shuzhen Fang, Xin Li, Fang Zhou

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: tysyFangShuzhen@163.com, 471721622@qq.com, fangzhou20@.aliyun.com

Received: Apr. 20th, 2016; accepted: May 6th, 2016; published: May 9th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

Let G be a π-separable finite group, K and H respectively a subgroup and any Hall π-subgroup of G. Alexandre Turull gets the divisibility relation between the number of Hall π-subgroups of G and that of K by using the calculation formula about the number of Hall π-subgroup. It is obtained the form of certificate by using the elementary method.

Keywords

Hall π-Subgroup, π-Separable Finite Group, Divisibility

π-可分群的Hall π-子群的个数

方树珍，李　欣，周　芳

太原师范学院数学系，山西　晋中
Email: tysyFangShuzhen@163.com, 471721622@qq.com, fangzhou20@.aliyun.com

收稿日期：2016年4月20日；录用日期：2016年5月6日；发布日期：2016年5月9日

摘　要

设G是有限π-可分群，H是G的任意$Hall$ π-子群，K是G的子群。Alexandre Turull利用$Hall$ π-子群的计算公式得到G的$Hall$ π-子群H的个数可以被其子群K的$Hall$ π-子群的个数整除这一关系。本文用初等方法证

文章引用: 方树珍, 李欣, 周芳. π-可分群的 Hall π-子群的个数[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 162-165.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63024

明了该结论。

关键词

Hall π-子群，有限π-可分群，整除

1. 引言

设G是有限群，π-是素数集，H是G的任意$Hall\ \pi$-子群，K是G的子群。本文的符号是标准的，见[1]，记G的$Hall\ \pi$-子群个数为$\nu_\pi(G)$，K的$Hall\ \pi$-子群个数为$\nu_\pi(K)$。当G是π-可分群时，有$\nu_\pi(G)=|G:N_G(H)|$，且$\nu_\pi(G)$为非负整数，其中$N_G(H)$是H在G中的稳定子群，很显然有不等关系$\nu_\pi(K)\le\nu_\pi(G)$，另由文[1]可知$\nu_\pi(K)|\nu_\pi(G)$。为了更清楚的反映这一整除关系，本文用初等方法证明了该结论。

2. 主要结果

定理 1 设π为素数集，G为有限π-可分群，K是G的子群，则$\nu_\pi(K)|\nu_\pi(G)$。

为了完成定理 1 的证明，我们需要下面的引理。

引理 1 设G，A均为有限群，且A互素作用在G上，K为G的A-不变子群，令$C=C_G(A)$，则$|C:C\cap K|\,\big|\,|G:K|$。

文[2]引理 2.1 中对π中仅有一个素数的情形进行了证明，该结论推广到由有限多个素数构成的集合π上也是成立的，见[2]。

引理 2 设N是有限π-可分群G的正规子群，H是N的$Hall\ \pi$-子群，则$G=N_G(H)N$。

证明： 设群G通过共轭作用在集合$\Omega=Hall_\pi(N)$上，由于$H\le N$，则对任意$g\in G$，有$H^g\subseteq N^g=N$，于是$H^g\in Hall_\pi(N)$。对于有限π-可分群，所有的$Hall\ \pi$-子群均共轭，同时，有限π-可分群的子群仍是π-可分群，见[3]。因此，存在$n\in N$满足$H^{gn}=H$，从而$gn\in N_G(H)$，即$g\in N_G(H)n^{-1}\subseteq N_G(H)N$，因此$G=N_G(H)N$。

引理 3 设G是有限π-可分群，$H\in Hall_\pi(G)$。若$H\subseteq M\subseteq G$，则$|N_G(H):N_M(H)|\,\big|\,|G:M|$。

证明： 对G的阶进行归纳。

一方面，设G的非平凡正规子群是N，满足G/N为π'-群，记$V=M\cap N$。由$N\lhd G$及$(|G:N|,|H|)=1$，则有H含于N，见[4]，因而$H\le V=M\cap N\le N<G$，根据归纳假设得$|N_N(H):N_V(H)|\,\big|\,|N:V|$。因为$N$是$G$的正规子群及$H$为$N$的$Hall\ \pi$-子群，由引理 2 可得$G=N_G(H)N$，同理有$M=(M\cap N)N_M(H)$，因此$NM=NN_M(H)$。

又因为$N_{NM}(H)=N_{NM}(H)\cap NM$，且$NM=NN_M(H)$，可得$N_{NM}(H)=N_N(H)N_M(H)$，于是$|N_G(H):N_M(H)|=|N_G(H):N_{NM}(H)||N_N(H):N_V(H)|$，而对于$G$，有$G=(NM)N_G(H)$，于是$NM$在$G$中的指数等于$|N_G(H):N_{NM}(H)|$，因此

$$|N_G(H):N_M(H)|=|G:NM||N_N(H):N_V(H)|$$

由归纳假设所得的整除关系可知$|N_G(H):N_M(H)|\,\big|\,|G:NM||N:V|$，而$|N:V|=|NM:M|$，故有

$$|N_G(H):N_M(H)|\,\big|\,|G:M|。$$

另一方面，设G的非平凡正规子群是N，满足G/N为π-群，记$W = M \cap N$。由于$H \cap N$为N的$Hall\ \pi$-子群及$H \cap N \le W \le N < G$，根据归纳假设得

$$\left|N_N\left(H \cap N\right):N_W\left(H \cap N\right)\right|\,\big|\,\left|N:W\right|$$

由题设条件知$G/M \le G/H$，于是$\left|G:M\right|\,\big|\,\left|G:H\right|$，其中$H$在$G$中的指数为$\pi'$-数，故$M$在$G$中的指数也为$\pi'$-数，于是$\left|G:M\right|$与$\left|G:N\right|$互素，进而$G = MN$。由同构定理有$N/W \cong G/M$，于是$M$在$G$中的指数能被$\left|N_N\left(H \cap N\right):N_W\left(H \cap N\right)\right|$整除。

现设$G_0 = N_G\left(H \cap N\right)$，$M_0 = G_0 \cap M$，显然$H$在$G$中的稳定子含于$G_0$。假设$1 < G_0 < G$，有$\left|N_{G_0}\left(H\right):N_{M_0}\left(H\right)\right|\,\big|\,\left|G_0:M_0\right|$，因$N \le N_G\left(N\right) \le N_G\left(H \cap N\right)$，有$G = G_0M$，进而有

$$\left|N_{G_0}\left(H\right):N_{M_0}\left(H\right)\right| = \left|N_{G_0}\left(H\right)N_M\left(H\right):N_M\left(H\right)\right| = \left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right|$$

故$\left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right|\,\big|\,\left|G_0:M_0\right|$。由于$H$含于$N_M\left(H \cap N\right)$及$G = HN$，有

$$\left|G_0:M_0\right| = \left|N_G\left(H \cap N\right):N_M\left(H \cap N\right)\right| = \left|N_N\left(H \cap N\right):N_W\left(H \cap N\right)\right|$$

因此$\left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right|\,\big|\,\left|G:M\right|$。

现设$\bar{N} = N/N \cap H$，其中$N \cap H$为G的正规子群，则$\bar{H}$在$\bar{N}$上互素作用。令$N \cap N_G\left(H\right) = C$，则$\bar{C} = C_{\bar{N}}\left(\bar{H}\right)$，而$C \cap W = N_W\left(H\right)$，于是$\left|N_N\left(H\right):N_W\left(H\right)\right| = \left|\bar{C}:\bar{C} \cap \bar{W}\right|$。

又因为$G = MN$，由前一种情形可得$N_G\left(H\right) = N_M\left(H\right)N_N\left(H\right)$，因此，根据同构定理可得到

$$\left|N_N\left(H\right):N_W\left(H\right)\right| = \left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right|$$

进而有$\left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right| = \left|\bar{C}:\bar{C} \cap \bar{W}\right|$，同理$\left|G:M\right| = \left|\bar{N}:\bar{W}\right|$。对于$\bar{W}$，它是$\bar{N}$的$\bar{H}$-不变子群，由引理1可得$\left|\bar{C}:\bar{C} \cap \bar{W}\right|\,\big|\,\left|\bar{N}:\bar{W}\right|$，因此$\left|N_G\left(H\right):N_M\left(H\right)\right|\,\big|\,\left|G:M\right|$。

定理1的证明：对K在G中的指数$\left|G:K\right|$进行归纳。

设$K < H < G$，其中H为有限π-可分群。由归纳假设可知$\nu_\pi\left(K\right) \mid \nu_\pi\left(H\right)$。现不妨设$K$为$G$的极大子群，对于$\pi$-可分群$G$来讲，任取$p \in \pi$，$K$在$G$中的指数有两种情形，或为$p$的方幂数或不能被$p$整除。

若$\left|G:K\right| = p^r$，这里的r是正自然数。设T为G的$Hall\ \pi$-子群，Q为K与T的交集，则$K \cap T$在K中的指数等于T在G中的指数，由此可知$\left|K:K \cap T\right|$为π'-数，于是$Q \in Hall_\pi\left(K\right)$，而其中的$G = KT$是因为$\left(\left|G:K\right|,\left|G:T\right|\right) = 1$。由于$N_G\left(T\right) \le G$及$T \le N_G\left(T\right)$，可得$G = KN_G\left(T\right)$，于是有$\left|G:N_G\left(T\right)\right| = \left|K:N_K\left(T\right)\right|$，而对于$\left|K:N_K\left(T\right)\right|$可被$\left|K:N_K\left(Q\right)\right|$整除，这是因为$N_K\left(T\right) \le N_K\left(Q\right)$。因此$\left|K:N_K\left(Q\right)\right|\,\big|\,\left|G:N_G\left(T\right)\right|$，即$\nu_\pi\left(K\right) \mid \nu_\pi\left(G\right)$。

若$p \nmid \left|G:K\right|$，设$S \in Hall_\pi\left(K\right) \subseteq Hall_\pi\left(G\right)$，此时$S \subseteq K \subseteq G$，$S$为$G$的$Hall\ \pi$-子群，由引理3可知$\left|N_G\left(S\right):N_K\left(S\right)\right|\,\big|\,\left|G:K\right|$，从而$\left|K:N_K\left(S\right)\right|\,\big|\,\left|G:N_G\left(S\right)\right|$，即$\nu_\pi\left(K\right) \mid \nu_\pi\left(G\right)$。

基金项目

国家自然科学基金(11401424)和山西省自然科学基金(2013011001-3)资助项目资助。

参考文献 (References)

[1] Turull, A. (2004) The Number of Hall π-Subgroups of a π-Separable Group. *Proceedings of the American Mathemati-*

cal Society, **132**, 2563-2565. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07412-X

[2] Navarro, G. (2003) Number of Sylow Subgroups in p-Solvable Groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 3019-3020. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-03-06884-9

[3] Isaacs, I.M. (2008) Finite Group Theory. American Mathematical Society, Providence. http://dx.doi.org/10.1090/gsm/092

[4] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2013.