Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 166-171
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63025

Hans汉斯

Induced Maps Preserving Multiplicative Matrices over Fields

Jun Zhang, Chongguang Cao

Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang
Email: 910960796@qq.com

Received: Apr. 25th, 2016; accepted: May 9th, 2016; published: May 12th, 2016

Abstract

Let F be a field, $S_n(F)$ be the set of all $n\times n$ matrices over F. If a map $f:S_n(F)\to S_n(F)$ is defined by

$$f:B=(b_{ij})\mapsto\left(f_{ij}(b_{ij})\right),\forall B\in S_n(F).$$

where $\left\{f_{ij}\middle|i\le j\in\{1,2,\cdots,n\}\right\}$ is the set of functions on F, then f is called a map induced by $\{f_{ij}\}$ on $S_n(F)$. If $A,B\in S_n(F)$ implies $f(AB)=f(A)f(B)$, then f is called preserving multiplicative matrices. In this paper, we characterize induced maps preserving multiplicative matrices over fields.

Keywords

Field, Preserving Multiplicative, Induced Map

域上矩阵保乘积的诱导映射

张　隽，曹重光

黑龙江大学，黑龙江 哈尔滨
Email: 910960796@qq.com

收稿日期：2016年4月25日；录用日期：2016年5月9日；发布日期：2016年5月12日

文章引用：张隽，曹重光．域上矩阵保乘积的诱导映射[J]．理论数学, 2016, 6(3): 166-171.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63025

摘　要

令F是一个域，$S_n(F)$是F上所有$n\times n$对称矩阵的集合。如果一个映射$f:S_n(F)\to S_n(F)$被定义如下，

$$f:B=(b_{ij})\mapsto\left(f_{ij}(b_{ij})\right),\forall B\in S_n(F)。$$

其中，$\left\{f_{ij}\middle|i\le j\in\{1,2,\cdots,n\}\right\}$是关于$F$的函数集，则称$f$是$S_n(F)$的由$\{f_{ij}\}$诱导的映射。如果对于$A,B\in S_n(F)$有$f(AB)=f(A)f(B)$，则$f$被称为保矩阵乘积。本文我们刻画域上矩阵保乘积的诱导映射。

关键词

域，保乘积，诱导映射

1. 引言

刻画矩阵集合保持某些性质的映射称为矩阵保持问题研究。近年来，这种研究更感兴趣于映射没有线性和加法假定的情形，例如[1]-[5]。本文研究的诱导映射，其实也是这类问题的一种，又如[6]及[7]。

设F是一个域，$S_n(F)$记F上所有n阶对称矩阵的集合。设f是$S_n(F)$到自身的映射，f_{ij}是F上的函数，其中$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。如果定义

$$f(B)=f(b_{ij})=\left(f_{ij}(b_{ij})\right),\forall B=(b_{ij})\in S_n(F)$$

则称f是由$\{f_{ij}\}$诱导的映射。简称$S_n(F)$的诱导映射。

在本文中令f是$S_n(F)$到自身的诱导映射，如果$A,B\in S_n(F)$意味着$f(AB)=f(A)f(B)$则称f保乘积。本文目的是刻画$S_n(F)$的保乘积的诱导映射。

在本文中记I为单位矩阵，用F^*记F中所有非0元的集合，E_{ij}表示(i,j)位置是1，其余位置是零的矩阵。记$[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$。

容易证明，若$A,B\in S_n(F)$，则$AB\in S_n(F)$当且仅当$AB=BA$。

2. 主要结果

在$f(0)=0$的情况下，对于f为$S_n(F)$的保乘积的诱导映射的充要条件，我们有如下的重要结果。

定理1.1. 设F为一个域，n为整数且$n\ge3$。f是$S_n(F)$的诱导映射，则f保乘积当且仅当存在一个可逆对角阵$P\in M_n(F),P^2=I$及F上的单自同态δ使得

$$f(A)=PA^{\delta}P^{-1},\forall A\in S_n(F)\tag{1}$$

其中$A^{\delta}=\left(\delta(a_{ij})\right)$。

证明：充分性显然，下证必要性。假设$i,j,k\in[1,n]$且互不相等，令

$A=E_{ii}+E_{jj}+bE_{ik}+bE_{jk}+bE_{ki}+bE_{kj}$，$B=aE_{ij}+aE_{ji}+abE_{ik}+abE_{jk}+abE_{ki}+abE_{kj}$

易见$A,B\in S_n(F),AB=BA$，由f保乘积知$f(A)f(B)=f(B)f(A)$，看(i,k)位置得

$$f_{ii}(1)f_{ik}(ab)=f_{ij}(a)f_{jk}(b)。\tag{2}$$

下面分两种情况讨论。

1) 对于任意不同的 $i \ne j \in [1,n]$ 及任意 $a \in F^*$ 均有 $f_{ij}(a) \ne 0$。由此情形条件可知

$$f_{ij}(a) \ne 0, \forall a \in F^*, i,j \in [1,n], i \ne j\,, \tag{3}$$

$$f_{ij}(x) = f_{ji}(x), \forall x \in F\,。 \tag{4}$$

令 $A_1 = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \ne i,j} E_{kk}$， $B_1 = E_{ii} + E_{jj} + \sum_{k \ne i,j} E_{kk}$， 易见 $A_1^2 = B_1$ 得 $\left(f(A_1)\right)^2 = f(B_1)$，

看 (i,i) 位置且由(4)得

$$\left(f_{ij}(1)\right)^2 = f_{ii}(1), \forall i,j \in [1,n]\,, \tag{5}$$

易推出 $f_{ii}(1) \ne 0$。由 $f(I_n) = f(I_n)f(I_n)$ 得到 $\left(f_{ii}(1)\right)^2 = f_{ii}(1)$ 得 $f_{ii}(1) = 0$ 或 1，易得

$$f_{ii}(1) = 1, \forall i \in [1,n]\,, \tag{6}$$

故由(2)得

$$f_{ik}(ab) = f_{ij}(a) f_{jk}(b)\,, \tag{7}$$

令 $A_2 = aE_{ii} + aE_{jj}, B_2 = bE_{ii} + cE_{jj} + dE_{ij} + dE_{ji}$， 易见 $A, B \in S_n(F), AB = BA,$

由 f 保乘积知 $f(A)f(B) = f(B)f(A)$，看 (i,j) 位置得 $f_{ii}(a) f_{ij}(d) = f_{ij}(d) f_{jj}(a)$，又由可得

$$f_{ii}(a) = f_{jj}(a), \tag{8}$$

由 $A_3 = E_{ii} + E_{ij} + E_{ji}, B_3 = xE_{ii} + xE_{ij} + xE_{ji,}$ 易见 $f(A)f(B) = f(B)f(A)$, 看 (i,j) 位置得

$$f_{ii}(1) f_{ij}(x) = f_{ii}(x) f_{ij}(1)\,, \tag{9}$$

令 $f_{12}(x) = \phi(x) f_{12}(1), \forall x \in F$， 由(7)可知，当 $j \ge 3$ 时，有

$$f_{1j}(x) = f_{12}(x) f_{2j}(1) = \phi(x) f_{12}(1) f_{2j}(1) = \phi(x) f_{1j}(1)\,,$$

又对 $i \ne j \ne 1$ 有

$$f_{1i}(1) f_{ij}(x) = f_{1j}(x) = \phi(x) f_{1j}(1)\,,$$

因此有

$$f_{ij}(x) = \left(f_{1i}(1)\right)^{-1} \phi(x) f_{1j}(1)\,, \tag{10}$$

由 $f_{21}(x) f_{13}(1) = f_{23}(x)$ 得 $f_{21}(x) = \left(f_{13}(1)\right)^{-1} f_{23}(x)$，又由(10)得

$$f_{21}(x) = \left(f_{13}(1)\right)^{-1} \left(f_{12}(1)\right)^{-1} \phi(x) f_{13}(1) = \left(f_{12}(1)\right)^{-1} \phi(x)\,,$$

满足(10)。当 $i \ge 3$ 时， 由 $f_{i1}(x) f_{12}(1) = f_{i2}(x)$ 可推出

$$f_{i1}(x) = \left(f_{12}(1)\right)^{-1} f_{i2}(x) = \left(f_{12}(1)\right)^{-1} \left(f_{1i}(1)\right)^{-1} \phi(x) f_{12}(1) = \left(f_{1i}(1)\right)^{-1} \phi(x)\,,$$

仍然满足(10)。总之(10)对所有情形成立。

令 $\delta(x) = \phi(x)$， 则由(7)计算可得 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$， 则有

$$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b), \forall a,b \in F\,, \tag{11}$$

再由 $A_4 = aE_{ii} + cE_{jj} + (a-c)E_{ij} + (a-c)E_{ji}, B_4 = E_{ii} + E_{ij} + E_{ji}$，易见 $f(A)f(B) = f(B)f(A)$，看 (i,j) 位置得 $f_{ii}(a)f_{ij}(1) = f_{ii}(1)f_{ij}(a-c) + f_{ij}(1)f_{jj}(c)$，由和(9)可得

$$f_{ij}(a) = f_{ij}(a-c) + f_{ij}(c), \tag{12}$$

从而有

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y), \forall x, y \in F, \tag{13}$$

式意味着 $\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$，故 δ 为 F 的单自同态。

令 $f_{ii}(x) = \varphi(x)$，则 $f_{12}(x) = \phi(x)f_{12}(1)$ 中，$x = 1$ 时，有 $f_{12}(1) = \phi(1)f_{12}(1)$，则

$$\phi(1) = 1 = \varphi(1), \tag{14}$$

由(9)得 $\varphi(1)(f_{1i}(1))^{-1}\phi(x)f_{1j}(1) = \varphi(x)(f_{1i}(1))^{-1}\phi(1)f_{1j}(1)$，可推出 $\varphi(1)\phi(x) = \varphi(x)\phi(1)$，又由(14)可得 $\varphi(x) = \phi(x)$。

由(4)和(10)，设 $P = diag\left(1, (f_{12}(1))^{-1}, \cdots, (f_{1n}(1))^{-1}\right)$，易见

$$f(A) = P\begin{pmatrix} \delta(a_{11}) & \delta(a_{12}) & \cdots & \delta(a_{1n}) \\ \delta(a_{12}) & \delta(a_{22}) & \cdots & \delta(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta(a_{1n}) & \delta(a_{2n}) & \cdots & \delta(a_{nn}) \end{pmatrix} P^{-1},$$

注意到由(5)和(6)易得 $f_{ij}(1) = \pm 1$，显然有 $P^2 = I$，这样结论 1)被证明。

2) 若存在某 $a \in F^*$ 及某 $i \neq j$ 使 $f_{ij}(a) = 0$，

令 $A_5 = aE_{ij} + aE_{ji}, B_5 = bE_{ij} + bE_{ji}, C_5 = abE_{ii} + abE_{jj}, \forall i, j \in [1, n]$，由 $AB = C$，看 (i,i) 和 (j,j) 位置得

$$f_{ij}(a)f_{ji}(b) = f_{ii}(ab), \forall b \in F, i, j \in [1, n], \tag{15}$$

$$f_{ji}(a)f_{ij}(b) = f_{jj}(ab), \forall b \in F, i, j \in [1, n], \tag{16}$$

令 $A_6 = aE_{ij} + aE_{ji} + bE_{jj}, B_6 = a^2E_{ii} + (a^2 + b^2)E_{jj} + abE_{ij} + abE_{ji}, \forall i, j \in [1, n]$，

由 $A^2 = B$，看 (i,j) 位置，得

$$f_{ij}(ab) = f_{ij}(a)f_{jj}(b), \forall b \in F, i, j \in [1, n], \tag{17}$$

由(17)可得 $f_{ij}(x) = 0, \forall x \in F, i \neq j \in [1, n]$ 即得 $f_{ij} = 0$，又由(15)和(16)可得 $f_{ii} = f_{jj} = 0$。由(15)可得 $f_{ik}(a)f_{ki}(b) = f_{ii}(ab), \forall k \neq i, j, k \in [1, n]$，

由 $f_{ii} = 0$ 可得 $f_{ik} = 0$。由(16)可得，$f_{ki}(a)f_{ik}(b) = f_{kk}(ab)$，由 $f_{ik} = 0$，得到 $f_{kk} = 0, \forall k \neq i, j, k \in [1, n]$。同理，$f_{ll} = 0, \forall l \neq i, j, l \in [1, n]$。由(17)易得 $f_{kl}(ab) = f_{kl}(a)f_{ll}(b)$，由 $f_{ll} = 0$，可得 $f_{kl} = 0, \forall k, l \neq i, j, k, l \in [1, n]$ 因此，推出 $f = 0$，证毕。

定理 1.2. 令 F 为一个域，设 $f : S_2(F) \to S_2(F)$ 为一个由函数 $f_{ij} : F \to F, i, j \in [1, 2]$ 导出的映射，满足 $f(0) = 0$, f 保乘积当且仅当存在一个可逆对角阵 $P \in M_2(F), P^2 = I_2$ 的且 η 为 F 上的单自同态，那么有

$$f(A) = PA^{\eta}P^{-1}, \forall A \in S_2(F)。 \tag{18}$$

证明：下面分两种情况讨论。

1) 对于任意不同的 $i \neq j \in [1,2]$ 及任意 $a \in F^*$ 均有 $f_{ij}(a) \neq 0$。

充分性显然，下证必要性。令 $A_7 = abE_{12} + abE_{21} + bE_{22}, B_7 = aE_{12} + aE_{21} + E_{22}$，易得 $f(A_5) f(B_5) = f(B_5) f(A_5)$，看(1,2)位置且由(6)得到

$$f_{12}(ab) = f_{12}(a) f_{22}(b), \forall a,b \in F, \tag{19}$$

由(4)~(6)可得

$$f_{12}(1) f_{21}(1) = 1, \tag{20}$$

由(8)，令 $f_{11}(a) = f_{22}(a) = \eta(a)$，在(21)中，令 $a = 1$，得到 $f_{12}(b) = f_{12}(1)\eta(b)$，又由(20)得到 $\eta(b) = f_{21}(1) f_{12}(b)$，故

$$\eta(ab) = f_{21}(1) f_{12}(ab) = f_{21}(1) f_{12}(a)\eta(b) = \eta(a)\eta(b), \forall a,b \in F, \tag{21}$$

又由(12)可得

$$\eta(a+b) = \eta(a) + \eta(b), \forall a,b \in F, \tag{22}$$

又由(4)，因此得到

$$f(A) = \begin{pmatrix} f_{11}(a_{11}) & f_{12}(a_{12}) \\ f_{21}(a_{21}) & f_{22}(a_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_{21}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(a_{11}) & \eta(a_{12}) \\ \eta(a_{12}) & \eta(a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_{12}(1) \end{pmatrix}，令 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_{21}(1) \end{pmatrix},$$

显然有 $P^2 = I_2$ 且

$$f(A) = PA^{\eta}P^{-1}, \forall A \in S_2(F)。 \tag{23}$$

2) 对于某 $a \in F^*$ 有 $f_{12}(a) = f_{21}(a) = 0$。

令 $A_8 = aE_{12} + aE_{21}, B_8 = bE_{12} + bE_{21}, C_8 = abE_{11} + abE_{22}, \forall k,l \in [1,n]$ 由 $AB = C$ 看(1,1)位置得

$$f_{12}(a) f_{21}(b) = f_{11}(ab), \forall b \in F, \tag{24}$$

看其(2,2)位置得

$$f_{21}(a) f_{12}(b) = f_{22}(ab), \forall b \in F, \tag{25}$$

由 $f_{12}(a) = f_{21}(b) = 0$ 可得 $f_{11}(ab) = f_{22}(ab) = 0, \forall b \in F$, 即

$$f_{11}(x) = f_{22}(x) = 0, \forall x \in F, \tag{26}$$

令 $A_9 = bE_{12} + bE_{21}, B_9 = b^2E_{11} + b^2E_{22}, \forall b \in F$，由 $A^2 = B$，看(1,1)位置，又由(4)得

$$\left(f_{12}(b)\right)^2 = f_{11}(b^2), \forall b \in F, \tag{27}$$

$$\left(f_{21}(b)\right)^2 = f_{11}(b^2), \forall b \in F, \tag{28}$$

又由(26)得

$$f_{12}(b) = f_{21}(b) = 0, \forall b \in F, \tag{29}$$

综上所述，由(26)和(29)得到 $f = 0$。

参考文献 (References)

[1] Li, C.K., Plevnik, L. and Semrl, P. (2012) Preservers of Matrix Pairs with a Fixed Inner Product Value. *Operators and Matrices*, **6**, 433-464.

[2] Cao, C.G., Ge, Y.L. and Yao, H.M. (2013) Maps Preserving Classical Adjoint of Products of Two Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **61**, 1593-1604. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2012.753592

[3] Huang, L.P. (2006) Geometry of Matrices over Ring. Science Press.

[4] You, H. and Wang, Z.Y. (2007) k-Potence Preserving Maps without the Linearty and Surjectivity Assumptions. *Linear Algebra and Its Applications*, **426**, 238-254. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2007.04.024

[5] Chooi, W.L. and Ng, W.S. (2010) On Classical Adjoint-Commuting Mappings between Matrix Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 2589-2599. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2009.12.001

[6] Liu, S.W. and Zhang, G.D. (2006) Maps Preserving Rank 1 Matrices over Fields. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, **23**, 138-140.

[7] Yang, L., Ben, X.Z., Zhang, M. and Cao, C.G. (2014) Induced Maps on Matrices over Fields. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 596796.