Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 206-211
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63032

Hans汉斯

A Generalization of the Fresnel Integral

Jiajia Li, Xuefeng Mei*

School of Science and Technology, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *mxf6561@sina.com

Received: Apr. 30th, 2016; accepted: May 16th, 2016; published: May 19th, 2016

Abstract

The present paper gives a generalization of the Fresnel integral by using of Jordan integral and Cauchy integral theorem.

Keywords

Contour Integral, Jordan Inequality, Γ-Function, Cauchy Integral Theorem

Fresnel积分的推广

李佳佳，梅雪峰*

浙江外国语学院科学技术学院，浙江 杭州
Email: *mxf6561@sina.com

收稿日期：2016年4月30日；录用日期：2016年5月16日；发布日期：2016年5月19日

摘 要

利用Jordan不等式及Cauchy积分定理，给出一类广义的Fresnel积分的值，它是通常定义下Fresnel积分的一种推广。

关键词

围道积分，约当不等式，Γ函数，Cauchy积分定理

*通讯作者。

文章引用: 李佳佳, 梅雪峰. Fresnel 积分的推广[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 206-211.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63032

1. 引言

广义积分 $\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$ 称为 Fresnel 积分[1]，它是以法国土木工程师兼物理学家 Fresnel 命名。Fresnel 积分是物理光学衍射中常用的典型积分。它当今国际上的重大前沿基础科研领域－惯性约束聚变[2]、粒子场测试及在数字全息领域，如“形貌测量、变形测量、防伪、三维图像识别、医学诊断、数字全息显微[3]、去除数字全息零极像[4]”等方面有广泛的应用。因此对 Fresnel 积分进行推广是很有必要的。

定义 1.1 [5] 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数， J 是一个确定的实数。若对任给的正数 ε，总存在某一正数 δ，使得对 $[a,b]$ 的任意分割 T，以及在其上任意选取点集 $\{\xi_i\}$，只要 $\|T\| < \delta$，就有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \varepsilon ,$$

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积(或黎曼可积)；数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定可积(或黎曼积分)，记作

$$J = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x 。$$

其中被积函数为 f，积分变量为 x，积分区间为 $[a,b]$，定积分下限和上限分别为 a,b 。

定义 1.2 [5] 设定义在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上都可积。如果存在极限

$$\lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x) \mathrm{d}x = J ,$$

那么称此极限 J 为函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限反常积分(简称无穷积分)，记为

$$J = \int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x ,$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛。

定义 1.3 [6] 含参量积分 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x, s > 0$ 称为伽马函数(Γ 函数)。

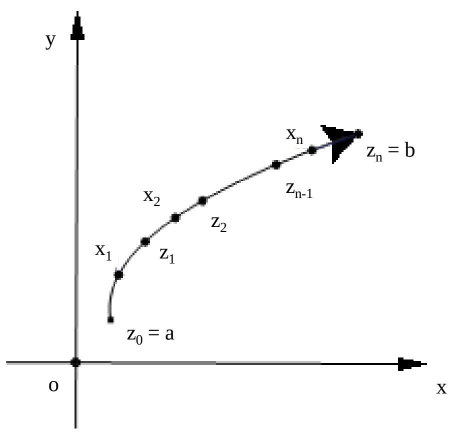
定义 1.4 [7] 设有曲线 C：

$$z = z(t) ,\quad (\alpha < t < \beta) 。$$

以 $a = z(\alpha)$ 为起点，$b = z(\beta)$ 为终点， $f(z)$ 沿 C 有定义。沿着 C 从起点 a 到终点 b 的方向在 C 上取分点：

$$a = z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = b 。$$

把曲线 C 分成若干个弧段



在 z_{k-1} 到 $z_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 的每一段弧上任取一点 x_k。作成和数

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta z_k,$$

其中 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$。当分点无限增加时，这些弧段长度的最大值趋于 0，如果和数 S_n 的极限存在且等于 J，那么称 $f\left(z\right)$ 沿 C (从 a 到 b)可积，并称 J 为 $f\left(z\right)$ 沿 C (从 a 到 b)的积分，并用记号 $\int_c f\left(z\right)\mathrm{d}z$ 来表示：

$$J=\int_c f\left(z\right)\mathrm{d}z。$$

其中 C 称为积分路径。

定义 1.5 [7] 整函数是指在整个复平面上都解析的函数。

定理 1.

$$\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}}{n},$$

$$\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}}{n}。$$

2. 引理

为了证明定理 1，需要如下引理。

引理 3.1 (约当不等式) [8] 当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{2}{\pi}\theta<\sin\theta<\theta$。

引理 3.2 [5] 若 $\int_a^{+\infty}f_1\left(x\right)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}f_2\left(x\right)\mathrm{d}x$ 都收敛，k_1,k_2 为任何常数，则

$$\int_a^{+\infty}k_1f_1\left(x\right)+k_2f_2\left(x\right)\mathrm{d}x$$

也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}k_1f_1\left(x\right)+k_2f_2\left(x\right)\mathrm{d}x=k_1\int_a^{+\infty}f_1\left(x\right)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty}f_2\left(x\right)\mathrm{d}x。$$

引理 3.3 [5] 若函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，那么 $\left|f\left(x\right)\right|$ 在 $\left[a,b\right]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x。$$

引理 3.4 [7] 设 $f\left(z\right)$ 沿曲线 C 连续，

$$\int_c f\left(z\right)\mathrm{d}z=\int_{c_1}f\left(z\right)\mathrm{d}z+\int_{c_2}f\left(z\right)\mathrm{d}z,$$

其中 C 由曲线 C_1 和 C_2 衔接而成。

引理 3.5 [7] 设(1) $f\left(z\right)$ 在单连通区域 D 内连续；(2)在区域 D 内 $\int f\left(\zeta\right)\mathrm{d}\zeta$ 沿任一围线的积分值都为 0。若 $\phi\left(z\right)$ 为 $f\left(z\right)$ 在单连通区域 D 内的任一原函数，则有

$$\int_{z_0}^{z}f\left(\zeta\right)\mathrm{d}\zeta=\Phi\left(z\right)-\Phi\left(z_0\right)\ \left(z,z_0\in D\right)。$$

引理 3.6 (柯西积分定理) [9] 被积函数 $f\left(z\right)$ 在单连通区域 z 平面上处处解析，它沿 z 平面上任何闭曲线的积分为 0。

引理 3.7 (Gamma 函数的递推公式) [6] $\Gamma\left(s+1\right)=s\Gamma\left(s\right)$，$s>0$。

引理 3.8 (余元公式) [10] $0<s<1,\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$。

特别的，

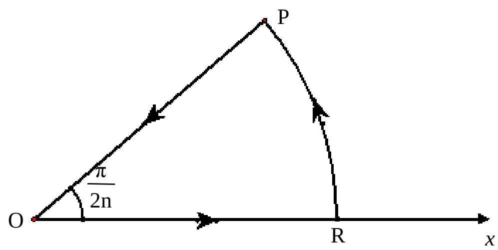
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\text{。}$$

3. 定理的证明

证明 设辅助函数

$$f(z)=\mathrm{e}^{-z^n}\text{，}$$

它是一个整函数。并取如下图的辅助积分路径 C_R。



记 $C_R=\boldsymbol{OR}+\boldsymbol{\Gamma}_R+\boldsymbol{PO}$， $\Gamma_R=\boldsymbol{RP}$ 由引理 1 (柯西积分定理)，得

$$0=\int_{C_R}\mathrm{e}^{-z^n}\mathrm{d}z=\int_0^R\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\mathrm{e}^{-z^n}\mathrm{d}z+\int_{\boldsymbol{PO}}\mathrm{e}^{-z^n}\mathrm{d}z\text{。}\tag{1}$$

首先考虑 Γ_R 上的积分，记

$$a=\left|\int_{\Gamma_R}\mathrm{e}^{-z^n}\mathrm{d}z\right|\text{，}$$

因而

$$a=\left|\int_{\Gamma_R}\mathrm{e}^{-\left(R\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n}\mathrm{d}R\mathrm{e}^{i\varphi}\right|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\mathrm{e}^{-R^n\cos n\varphi-iR^n\sin n\varphi}iR\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right|\text{。}$$

由引理 3.3，得

$$a=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\mathrm{e}^{-R^n\cos n\varphi-iR^n\sin n\varphi}iR\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right|\le R\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\mathrm{e}^{-R^n\cos n\varphi}\mathrm{d}\varphi\text{。}$$

令

$$n\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta\text{，}$$

则

$$a=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\mathrm{e}^{-R^n\cos n\varphi-iR^n\sin n\varphi}iR\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right|\le R\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\mathrm{e}^{-R^n\cos n\varphi}\mathrm{d}\varphi\text{。}$$

由引理 3.1 和引理 3.5，得

$$a\le\frac{R}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R^n\sin\theta}\mathrm{d}\theta\le\frac{R}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R^n\frac{2\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2nR^{n-1}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}R^n\theta}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2nR^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-R^n}-1\right)\text{。}$$

当 $R \to \infty$ 时，有

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{e}^{-R^n} = 1,$$

因而

$$\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2nR^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-R^n}-1\right)\right] = 0。$$

因此当 $R \to \infty$ 时，有

$$a = \left|\int_{\Gamma_R} \mathrm{e}^{-z^n}\mathrm{d}z\right| \to 0。$$

令 $x^n = u$，有

$$x = u^{\frac{1}{n}}, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u。$$

得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$$

由定义 1.3，得

$$\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)。$$

令

$$z = x\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}},$$

则

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\mathrm{d}x, z^n = x^n\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, -z^n = x^n i,$$

有

$$\int_{PO}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_R^0\mathrm{e}^{-ix^n}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\int_R^0\mathrm{e}^{-ix^n}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\int_R^0\left(\cos x^n - i\sin x^n\right)\mathrm{d}x,$$

当 $R \to \infty$ 时，(1)式变成

$$\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}\int_{\infty}^0\left(\cos x^n - i\sin x^n\right)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

整理得

$$\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x - i\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{n}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}}{n} - i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}}{n},$$

两个代数形式相同的复数，它们的实部和虚部都要对应相等，即得

$$\int_0^{\infty}\cos x^n \mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}}{n},$$

$$\int_0^{\infty}\sin x^n \mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}}{n}。$$

注：当 $n=2$ 时，结论变为

$$\int_0^{\infty}\cos x^2 \mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{\infty}\sin x^2 \mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

这就是熟知的 Fresnel 积分，因此本结论 Fresnel 积分的一种推广。

参考文献 (References)

[1] 张光明. 菲涅尔积分的计算[J]. 工科数学, 1990, 6(2): 177-178.

[2] 邓亚红, 罗斌, 柳红英. 光束在级联非线性介质中的传输规律研究影响[C]. 中国西部青年通信学术会议: 通信与信息技术, 2006.

[3] Liu, W.W., Kang, X., Dai, Y.Q. and He, X.Y. (2009) Method for Eliminating Zero-Order Image in Digital Holography. *Journal of Southeast University* (*English Edition*), **25**, 113-116.

[4] 李纪. 菲涅尔全息图计算方法研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 昆明理工大学, 2010.

[5] 华东师范大学数学系编. 数学分析: 下册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[6] 李超, 刘端森, 王念良. 关于 Γ 函数的一些性质[J]. 纺织高校基础科学学报, 2004, 17(2): 100-101.

[7] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[8] 何灯, 沈志军. Jordan 不等式的新型拓广及应用[J]. 广东第二师范学院学报, 2011, 31(5): 23-30.

[9] Brown, J.W. and Churchill, R.V. Complex Variable Function and Its Application [M]. 第 3 版. 北京: 机械工业出版社, 2008.

[10] 同济大学数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2002.