**Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 217-222**
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63034

Hans汉斯

# Some Notes on R-Semi Topological Space

**Jian Zhong, Daofu Chen, Peiyong Zhu**

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: 1027150421@qq.com, 744163393@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: May 6th, 2016; accepted: May 18th, 2016; published: May 26th, 2016



## Abstract

**Firstly, the concepts of Right-semi topology (*i.e.*, R-semi-topological) are introduced by means of generalized topological spaces. Then, under the definition of Right-semi topology, nature that has been hereditary is explored, and nature that cannot be inherited is also illustrated combing with examples.**

## Keywords

**Generalized Topological Space, R-Semi Topology, R-Neighbourhood, R-Net**

# 关于R-半拓扑空间上的一些结果

**钟　健，陈道富，朱培勇**

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 1027150421@qq.com, 744163393@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期：2016年5月6日；录用日期：2016年5月18日；发布日期：2016年5月26日

## 摘　要

**类比A. Csaszar等人给出的广义拓扑空间关于一些性质的研究，引入R-半拓扑空间，在R-半拓扑的定义下，遗传了一般拓扑中的哪些性质，并且结合例子说明哪些性质不能被遗传。**

文章引用：钟健，陈道富，朱培勇．关于 R-半拓扑空间上的一些结果[J]．理论数学, 2016, 6(3): 217-222.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63034

## 关键词

**广义拓扑空间，R-半拓扑，R-领域，R-网**


## 1. 引言与预备

广义拓扑空间概念是有匈牙利数学家 A. Csaszar 于 2002 年在文献[1]中提出，并且对广义拓扑空间的性质进行了研究，得出了一些很好的结果(参见文献[1]-[6])。由于广义拓扑实际上是一个半拓扑，最近文献[7]把广义拓扑空间重新命名为上半拓扑空间。进而，引入下半拓扑与下半拓扑空间的概念，并且获得了关于下半拓扑的一系列结果；文献[8]类比的将拓扑空间剖分成左半拓扑与右半拓扑，并得到了关于左半拓扑的一系列结果。在此，一个自然的问题是：能否类比文献[8]，在右半拓扑上也得到一些类似的结果呢？本文就这个问题进行了部分研究。

## 2. R-半拓扑空间

首先给出 R-半拓扑空间的定义以及相关概念。

**定义 1.1** 设 $X$ 是一个非空集合，$\lambda$ 是 $X$ 的一些子集构成的集族，如果下列两个条件满足：

(1) $\varnothing \in \lambda$；

(2) 若 $G_1, G_2 \in \lambda$，则 $G_1 \cap G_2 \in \lambda$。

则称 $\lambda$ 为集合 $X$ 上的一个 R-半拓扑，并且称有序偶 $(X,\lambda)$ 为一个 R-半拓扑空间，集族 $\lambda$ 中的每一个集合都称为 R-半拓扑空间 $(X,\lambda)$ 的 R-开集。我们把 R-半拓扑空间中只含一个元素的集合称为单元集。

**定义 2.1** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$x \in X, U \subset X$，如果 $\exists G \in \lambda$，使得 $x \in G \subset U$，则称 $U$ 为点 $x$ 的一个 R-领域。$x$ 点的领域全体称为点 $x$ 的 R-领域系，记作 $u(x)$，并称 $u = u\{u(x) | x \in X\}$ 为由拓扑 $\lambda$ 导出的 $X$ 的 R-领域系。

**定理 2.1** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$u(x)$ 为由拓扑 $\lambda$ 导出的 $X$ 的 R-领域系，则满足下列条件：

(N1) 若 $U \in u(x)$, 则 $x \in U$；

(N2) 若 $U \in u(x), V \supset U$，则 $V \in u(x)$；

(N3) 若 $U_1, U_2 \in u(x)$，则 $U_1 \cap U_2 \in u(x)$；

(N4) 若 $U \in u(x)$，则 $\exists W \in u(x)$，使得 $W \subset U$, 并且对于 $\forall y \in W$，有 $W \in u(y)$。

**证明** 由 R-领域的定义，(N1)和(N2)成立时显然的。又设 $U_1, U_2 \in u(x)$，则 $\exists G_1, G_2 \in \lambda$，使得 $x \in G_1 \subset U_1$ 且 $x \in G_2 \subset U_2$。令 $G = G_1 \cap G_2$，则 $G \in \lambda$，并且 $x \in G \subset U_1 \cap U_2$。故 $U_1 \cap U_2 \in u(x)$。因此(N3)真。

现在验证(N4)。设 $U \in u(x)$,，则 $\exists G \in \lambda$，使 $x \in G \subset U$. 令 $W = G$, 故 $W \in u(x)$, 并且 $W \subset U$。另外，对于 $\forall y \in W$, 因为 $G = W \in \lambda$，使得 $y \in G \subset W$。再由 R-领域的定义，$W \in u(y)$。从而(N4)真。□

**定义 2.2** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$F \subset X$, 若 $F^c = X - F \in \lambda$，则称 $F$ 为 $X$ 的 R-闭集。

由 R-半拓扑空间的定义和 *de Morgan* 公式可以直接得到：

**定理 2.2** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$\boldsymbol{F}$ 为 $X$ 的 R-闭集的全体，则 $\lambda$ 满足条件：

(F1) $X \in F$；

(F2) 若 $F_1, F_2 \in F$，$F_1 \cup F_2 \in F$。

**定义 2.3** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A \subset X$，若 $x \in A \in u(x)$ (即 $\exists G \in \lambda$, 使得 $x \in G \subset A$)，则称点 $x$ 为点集 $A$ 的 R-内点。点集 $A$ 的 R-内点的全体称为 $A$ 的 R-内部，记为 $A_R^0$ 或 $\operatorname{int} A_R$。

**定义 2.4** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A \subset X, x \in X$，如果 $\forall U \in u(x)$，有 $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ 或 $u(x) = \varnothing$，

则称 $x$ 为 $A$ 的 R-聚点。点集 $A$ 的 R-聚点的全体称为 $A$ 的 R-导集，记为 $A'_R$ 。□

根据 R-内点和 R-聚点的定义，显然有 $A$ 的 R-内点不一定是 $A$ 的 R-聚点，下面给出例子。

**例 1** 设 $X=\{a,b\},\lambda=\{\{a\},\{a,b\},\varnothing\},A=\{a\}$，显然有 $a\in A\in u(a)$，即点 $a$ 是 $A$ 的 R-内点，并且易知点 $a$ 不是 $A$ 的 R-聚点。

其实，我们从 R-聚点的定义也可以看出，点 $a$ 是不是集合 $A$ 的 R-聚点，与 $A$ 本身并无直接联系，只需看 R-半拓扑空间中有没有包含点 $a$ 的单元集.就如上面的例子，把 $A=\{a\}$ 改成 $A=\{b\}$，虽然点 $a$ 不在 $A$ 中，但点 $a$ 仍是 $A$ 的 R-聚点。

由定义 2.4 可以直接得出：

设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$x\in X$，若 $u(x)=\varnothing$，则 $\forall A\subset X$，点 $x$ 是 $A$ 的聚点。

**定义 2.5** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A\subset X$，记 $\bar{A}_R=A\cup A'_R$，则称 $\bar{A}_R$ 为 $A$ 的 R-闭包。

**定理 2.3** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A\subset X$。

(1) $\forall U\in u(x),U\cap A\neq\varnothing\Rightarrow x\in\bar{A}_R$

(2) $u(x)\neq\varnothing,x\in\bar{A}_R\Rightarrow\forall U\in u(x),U\cap A\neq\varnothing$

**证明：**(1) 若 $x\notin\bar{A}_R$，则 $x\notin A'_R$。故 $\exists\varnothing\neq U\in u(x)$，使得 $U\cap(A\setminus\{x\})=\varnothing$。又因为 $x\notin A$，故 $U\cap A=U\cap(A\setminus\{x\})=\varnothing$。这与已知矛盾，因此 $x\in\bar{A}_R$。

(2) 设 $x\in\bar{A}_R=A\cup A'_R$，则 $x\in A$ 或者 $x\in A'_R$。若 $x\in A$，则 $\forall U\in u(x),x\in U\cap A\neq\varnothing$；若 $x\notin A$，则 $x\in A'_R$，由 R-聚点的定义，并且 $u(x)\neq\varnothing$，则对 $\forall U\in u(x),U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$。从而也有 $U\cap A\neq\varnothing$。□

但是 $x\in\bar{A}_R\nRightarrow\forall U\in u(x),U\cap A\neq\varnothing$，下面给出例子：

**例 2** 设 $X=\{a,b\},\lambda=\{\{a\},\varnothing\},A=\{a,b\}$，则 $\bar{A}_R=\{a,b\}$，$b\in\bar{A}$，但 $u(b)=\varnothing,\forall U\in u(b)$，有 $U\cap A=\varnothing$。

**定理 2.4** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，则 $X$ 的任意子集 $A,B$ 与其 R-闭包满足下列条件：

(C1) $A\subset\bar{A}_R$；

(C2) $\overline{A\cup B}_R=\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$；

(C3) $\bar{\bar{A}}_R=\bar{A}_R$。

**证明** (C1) $A\subset A\cup A'_R=\bar{A}_R$；

(C2) 设 $x\in\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$，不妨设 $x\in\bar{A}_R$，若 $u(x)=\varnothing$，则 $x\in(A\cup B)'_R\subset\overline{A\cup B}_R$；若 $u(x)\neq\varnothing,\varnothing\neq U\cap A\subset U\cap(A\cup B)$，即 $x\in\overline{A\cup B}_R$。从而 $\bar{A}_R\cup\bar{B}_R\subset\overline{A\cup B}_R$。

反过来，设 $x\in\overline{A\cup B}_R$，若 $u(x)=\varnothing$，则 $x\in A'_R\subset\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$；若 $u(x)\neq\varnothing$，如果 $x\notin\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$，则 $\exists U_1,U_2\in u(x)$，使得 $U_1\cap A=\varnothing$，并且 $U_2\cap B=\varnothing$。所以 $W=U_1\cap U_2\in u(x)$，有 $W\cap(A\cup B)=(W\cap A)\cup(W\cap B)\subset(U_1\cap A)\cup(U_2\cap B)=\varnothing$。这与 $x\in\overline{A\cup B}_R$ 矛盾，即 $x\in\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$，从而 $\overline{A\cup B}_R\subset\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$。

从而 $\overline{A\cup B}_R=\bar{A}_R\cup\bar{B}_R$。

(C3) 只要证 $\bar{\bar{A}}_R\subset\bar{A}_R$ 即可。事实上，$\forall x\in\bar{\bar{A}}_R$，若 $u(x)=\varnothing$，则 $x\in\bar{A}_R$；若 $u(x)\neq\varnothing$，则由定理 2.3，$\forall U\in u(x)$，有 $U\cap\bar{A}\neq\varnothing$. 因为 $U$ 是 $x$ 的 R-领域，则存在 R=开集 $G\subset X$，使得 $x\in G\subset U$，又因 $G\in u(x)$，则 $G\cap\bar{A}_R\neq\varnothing$。取 $y\in G\cap\bar{A}_R$，则再由定理 2.3，$G\cap A\neq\varnothing$。从而 $U\cap A\neq\varnothing$。于是 $x\in\bar{A}_R$。故 $\bar{\bar{A}}_R=\bar{A}_R$。□

**推论 2.2** 与一般拓扑空间比较，R-半拓扑空间 $\bar{\varnothing}_R$ 并不一定为空集。

**例 3** 设 $X=\{a,b\},\lambda=\{\{a\},\varnothing\}$，点 $b$ 是 $\varnothing$ 的 R-聚点，即 $b\in\varnothing'_R\subset\bar{\varnothing}_R\neq\varnothing$。

**定理 2.5** $A$ 为 R-闭集 $\Rightarrow\bar{A}_R=A$。

**证明** 设 $A$ 为 R-闭集，则 $A^{C}$ 为 R-开集.为证 $\overline{A}_R = A$，我们只需证 $\overline{A}_R \subset A$。事实上，若 $\overline{A}_R \not\subset A$，则 $\exists x \in \overline{A}_R \setminus A \subset X \setminus A = A^{C} \in u(x)$，即，使得 $U \cap A = A^{C} \cap A = \varnothing$。这与 $x \in \overline{A}_R$ 矛盾。所以 $\overline{A}_R \subset A$，故 $\overline{A}_R = A$。□

**例 4** 设 $X = \{a,b,c\}, \lambda = \{\{a\},\{b\},\varnothing\}, A = \{c\}$。显然 $\overline{A}_R = A$。但 $A$ 不是 R-闭集.即 $\overline{A}_R = A$。$\not\Rightarrow A$ 为 R-闭集。

## 3. R-可分拓扑空间的相关概念与简单性质

**定义 3.1** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，若 $\overline{A}_R = X$，则称 $A$ 为 $X$ 的稠密子集。如果 $X$ 中存在一个可列集 $A = \{x_n\}_{n\in N}$，使得 $\overline{A}_R = X$，则称 $X$ 为 R-可分拓扑空间。

**定义 3.2** 设 $A \subset X, x_0 \in A$，若 $\exists U \in u(x_0)$，使得 $U \cap (A \setminus \{x_0\}) = \varnothing$，则称 $x_0$ 为集合 $A$ 的 R-孤立点。

**推论 3.1** 设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A \subset X$，$x \in A$，点 $x$ 是 R-孤立点或 R-聚点。

(由 R-聚点和 R-孤立点的定义可以直接得到)

设 $(X,\lambda)$ 为 R-半拓扑空间，$A$ 是 $X$ 中的任意非空子集，记 $\lambda|_A = \{G \cap A | G \in \lambda\}$. 则不难验证，$\lambda|_A$ 为 $A$ 上的一个 R-半拓扑。

**定义 3.3** R-半拓扑 $\lambda|_A = \{G \cap A | G \in \lambda\}$. 称为 $X$ 上 R-半拓扑 $\lambda$ 的一个 R-子拓扑。R-半拓扑空间 $(A,\lambda|_A)$ 称为是 $(X,\lambda)$ 的 R-半拓扑子空间.为了方便，常常简称 $A$ 为 $X$ 的子空间。

**定理 3.1** 设 $A$ 为 $X$ 的子空间，$B$ 为 $A$ 的子空间，则 $B$ 为 $X$ 的子空间。

**证明** 设 $\lambda$ 是 $X$ 上拓扑并且 $B \subset A \subset X$，我们只需证 $(\lambda|_A)|_B = \lambda|_B$。事实上，$\forall U \in (\lambda|_A)|_B, \exists V \in \lambda|_A$，使得 $U = A \cap B$。又对于 $V \in \lambda|_A, \exists W \in \lambda$，使得 $V = W \cap A$。从而

$U = V \cap B = (W \cap A) \cap B = W \cap (A \cap B) = W \cap A \in \lambda|_B$。所以 $(\lambda|_A)|_B = \lambda|_B$。

反过来，$\forall U \in \lambda|_B, \exists W \in \lambda$，使得 $U = W \cap B = (W \cap A) \cap B$，即 $\exists V = W \cap A \in \lambda|_A$，使得 $U = V \cap B$，即 $U \in (\lambda|_A)|_B$。从而 $\lambda|_B \subset (\lambda|_A)|_B$。因此 $(\lambda|_A)|_B = \lambda|_B$，即 $(B,(\lambda|_A)|_B) = (B,\lambda|_B)$ 是 $(X,\lambda)$ 的子空间。□

**定理 3.2** 设 $y \in Y \subset X$，并且 $Y$ 是 R-半拓扑空间 $X$ 的一个子空间，则

(1) 如果分别记 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 为 $X$ 与 $Y$ 上的全体 R-闭集构成的集族，则 $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}|_Y$；

(2) 如果分别记 $u(y)$ 和 $u_Y(y)$ 为 $X$ 与 $Y$ 上点 $y$ 的领域系，则 $u_Y(y) = u(y)|_Y$。

**证明** 设 $X$ 上的 R-半拓扑为 $\lambda$，则子空间 $Y$ 上的 R-半拓扑为 $\lambda|_Y$。

(1) $\forall F \in \mathcal{F}_Y$，因 $Y \setminus F = F^c \in \lambda|_Y$，则 $\exists G \in \lambda$，使得 $Y \setminus F = G \cap Y$，故 $F = Y \setminus G \cap Y = Y \cap (X \setminus G)$。又因 $X \setminus G \in \mathcal{F}$。因此 $F = Y \cap (X \setminus G) \in \mathcal{F}|_Y$。

反过来，$F \in \mathcal{F}|_Y$，$\exists A \in \mathcal{F}$，使得 $F = A \cap Y$。故 $Y \setminus F = Y \setminus A \cap Y = Y \cap (X \setminus A) \in \lambda|_Y$。

因此 $F \in \mathcal{F}_Y$。从而 $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}|_Y$ 成立。

(2) 若 $u_Y(y) = \varnothing$，显然 $u(y)|_Y = \varnothing$，若 $u_Y(y) \neq \varnothing$，对于 $\forall U \in u_Y(y)$，令 $W = U \cup (X \setminus Y)$，则 $U = W \cap Y$。接着证 $W \in u(y)$。因为 $U \in u_Y(y)$，则 $\exists V \in \lambda|_Y$，使得 $y \in V \subset U$。又 $\exists G \in \lambda$，使得 $V = G \cap Y$，故 $y \in G \cap Y \subset U$。这是必有 $y \in G \subset W$。这是因为对于 $\forall z \in G$，若 $z \in Y$，则 $z \in G \cap Y \subset U \subset W$；若 $z \notin Y$，则 $z \in X \setminus Y \subset W$。因此 $G \subset W$。故 $U = W \cap Y \in u(y)|_Y$。

反过来，若 $u(y)|_Y = \varnothing$，显然 $u_Y(y) = \varnothing$，若 $u(y)|_Y \neq \varnothing$, $\forall U \in u(y)|Y, \exists V \in u(y)$，使得 $U = V \cap Y$。故 $\exists G \in \lambda$ 有 $y \in G \subset V$。所以 $y \in G \cap Y \subset V \cap Y = U$，即 $U \in u_Y(y)$。于是 $u_Y(y) = u(y)|_Y$。□

在一般拓扑空间中有：

设 $Y$ 是拓扑空间 $X$ 的子空间，$A \subset Y$，则

(1) $A'_Y = A' \cap Y$；

(2) $cl_Y A = clA$，$A'_Y$ 和 $cl_Y A$ 分别表示点集 $A$ 在子空间 $Y$ 中导集和闭包。

这两条性质在一般拓扑空间中成立，但在 R-半拓扑空间并不成立。下面举例说明：

(注意：下面的符号表示采用的是拓扑空间中的符号表示)

(1) 设 $X=\{a,b,c\}$，$\lambda=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}$， $Y=\{b,c\},A=\{b\}$。则 $\lambda|_Y=\{b,\varnothing\},A'_Y=\{a,c\},A'=\{c\}$。显然 $A'_Y\neq A'\cap Y$。

(2) 依然采用(1)中例子，这时 $cl_Y A=\{a,b,c\},clA=\{b,c\}$。显然 $cl_Y A\neq clA$。

## 4. R-网与其收敛

**定义 4.1** 设 $(S,\prec)$ 为半序集，若 $\forall x,y\in S,\exists z\in S$，使得 $x\prec z$ 且 $y\prec z$，则称 $(S,\prec)$ 为一个定向集。

**定义 4.2** 设 $(X,\lambda)$ 为一个 R-半拓扑空间，$(S,\prec)$ 为一个定向集，则映射 $f:S\to X$ 称为是 $X$ 上的一个 R-网（或者 R-定向点列），记为 $\{f(\alpha)\}_{\alpha\in S}$ 或记为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$，其中 $x_\alpha=f(\alpha)\in X$。为书写方便，在不发生混淆时，通常把 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 简写成 $\{x_\alpha\}$。

**定义 4.3** 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 是 R-半拓扑空间 $X$ 中点的一个 R-网， $x_0\in X$。

(1) 称 R-网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 终在 $U$ 内，如果 $\forall U\in u(x_0),\exists\alpha_0\in S$，使得 $\forall\alpha\in S,\alpha\succ\alpha_0$ 恒有 $\alpha_0\in U$；

(2) 称 R-网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 收敛于 $x_0$ 或称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 以 $x_0$ 为极限。记为 $x_\alpha\to x_0(\alpha\in S)$ 或 $\lim\limits_{\alpha\in S}=x_0$，如果 R-网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 终在点 $x_0$ 的每一个领域内。

**例 4.1** 设 $(X,\lambda)$ 为一个 R-半拓扑空间，$x\in X,u(x)$ 为 $X$ 中 $x$ 点的领域系，$(u(x),\supset)$ 为一个定向集(证明略)。$U\in u(x)$，取 $x_U\in U$，则 $\{x_U\}_{U\in u(x)}$ 是一个网，其中 $x_U\in U$ 的取法是任意的。

**例 4.2** 上面的网 $\{x_U\}_{U\in u(x)}$ 收敛于 $x_0$。

**证明** $\forall W\in u(x_0),\exists U_0=W\in u(x_0)$，使得 $\forall U\in u(x_0)$，当 $U_0\supset U$ 时，有 $x_U\in U\subset U_0\subset W$。故 $x_U\to x_0$。□

**定理 4.1** 设 $(X,\lambda)$ 为一个 R-半拓扑空间， $A\subset X$，则

(1) $x\in A'_R$， $u(x)\neq\varnothing$ 当且仅当存在网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}\subset A\setminus\{x\}$，使得 $x_\alpha\to x_0$；

(2) $x\in\bar{A}_R$， $u(x)\neq\varnothing$ 当且仅当存在 $A$ 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$，使得 $x_\alpha\to x(\alpha\in S)$；

(3) $A$ 位 R-开集当且仅当不存在 $A^c$ 中网收敛 $A$ 中的点。

**证明** (1) 设 $x\in A''_R,u(x)\neq\varnothing$，则 $\forall U\in u(x)$，又 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$。取定 $x_U\in U(A\setminus\{x\})$，故 $\{x_U\}_{U\in u(x)}$ 是 $A\setminus\{x\}$ 中的一个网，并且 $x_U\to x$。

反过来，设网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}\subset A\setminus\{x\}$，使得 $x_\alpha\to x$。则 $\forall U\in u(x),\exists\alpha_U\in S$，使得 $\forall\alpha\in S$，当 $\alpha\succ\alpha_U$ 时，有 $x_\alpha\in U$。故 $x_\alpha\in U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$。因此 $x\in A'$。

(2) $\forall x\in\bar{A}_r=A\cup A'_R$，若 $x\in A'_R$，且 $u(x)\neq\varnothing$，又(1)的必要性，$\exists$ 网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}\subset A\setminus\{x\}\subset A$，使得 $x_\alpha\to x$。若 $x\in A$，取常值网 $x_\alpha=x(\forall\alpha\in S)$，则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 为 $A$ 中网并且 $x_\alpha\to x$。

反过来，设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}\subset A$ 并且 $x_\alpha\to x$。则 $\forall U\in u(x),\exists\alpha_0\in S$，当 $\alpha\succ\alpha_0$ 时，有 $x_0\in U$，故 $x_\alpha\in U\cap A\neq\varnothing$。由定理 2.3，有 $x\in\bar{A}_R$。

(3) 设 $A$ 为 $X$ 中 R-开集。如果存在网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}\subset A^c$，使得 $x_\alpha\to x\in A$，则 $\exists\alpha_0\in S$，当 $\alpha\succ\alpha_0$ 时，$x_\alpha\in A$。这与 $x_\alpha\in A^c$ 矛盾。

反过来，若 $A$ 不为 $X$ 中开集，则 $\exists x_0\in A$，使得 $\forall U\in u(x_0)$，有 $U\not\subset A$。即 $U\cap A\neq\varnothing$。取 $x_U\in U\cap A^c$，则 $\{x_U\}_U\in u(x_0)$ 是 $A^c$ 中网，并且 $x_U\to x_0\in A$。则与 $A^c$ 中不存在网收敛于 $A$ 中的点矛盾。□

## 5. 小结

本文类比文献[7]引入上、下半拓扑空间的方法，根据文献[8]定义的左半拓扑(L-半拓扑)与右半拓扑(R-半拓扑)的概念。类比 L-半拓扑空间，在 R-半拓扑空间上建立了点集的基本概念与理论，得到其开集、

闭集、导集、网与网收敛的一些基本结果。从而，使得拓扑空间的相应结论得到推广。在此基础上，通过一些反例来说明在 R-半拓扑空间中一些拓扑性质的不成立。

## 致　谢

感谢电子科技大学科研实训创新项目基金的经费资助。

## 参考文献 (References)

[1] Csaszar, A. (2002) Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, **96**, 351-357. http://dx.doi.org/10.1023/A:1019713018007

[2] Csaszar, A. (2005) Generalized Open Sets in Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **106**, 53-66. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-005-0005-5

[3] Csaszar, A. (1997) Generalized Open Sets. *Acta Mathematica Hungarica*, **75**, 65-87. http://dx.doi.org/10.1023/A:1006582718102

[4] Csaszar, A. (2009) Products of Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **123**, 127-132. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-008-8074-x

[5] Csaszar, A. (2004) Separation Axioms for Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **104**, 63-69. http://dx.doi.org/10.1023/B:AMHU.0000034362.97008.c6

[6] 朱培勇，雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京：科学出版社, 2009: 44-50.

[7] 胡西超，朱培勇. 一类新型半拓扑空间及其分离性质[J]. 理论数学, 2015, 5(4): 129-135.

[8] 陈道富，钟健，朱培勇. 关于 L-半拓扑空间的一些注记[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 272-277.