Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 227-237
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63036

The Analyticity Properties of a Class of Holomorphic Matrix Functions

Chao Fu, Ningfang Song

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing
Email: chaofu2012@126.com, 1141406604@qq.com

Received: May 7th, 2016; accepted: May 23rd, 2016; published: May 26th, 2016

Abstract

In this paper, we prove an analogue Picard's little theorem for a special class of holomorphic matrix functions in $\mathbb{C}^{3\times3}$, and also study the relation between asymptotic values and Picard omitting value for holomorphic matrix functions. Moreover, we discuss the properties of complex dynamic system in $\mathbb{C}^{3\times3}$.

Keywords

Picard's Little Theorem, Holomorphic Matrix Functions, Asymptotic Values, Complex Dynamic System

一类全纯矩阵函数的解析性质

付　超，宋宁芳

北京邮电大学理学院，北京
Email: chaofu2012@126.com, 1141406604@qq.com

收稿日期：2016年5月7日；录用日期：2016年5月23日；发布日期：2016年5月26日

摘　要

本文把Picard定理推广到了一类$\mathbb{C}^{3\times3}$的全纯矩阵函数中，同时探讨了渐近值与Picard例外值之间的关系，

文章引用：付超，宋宁芳．一类全纯矩阵函数的解析性质[J]．理论数学, 2016, 6(3): 227-237.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63036

最后在$\mathbb{C}^{3\times3}$中讨论了一些复动力系统的性质。

关键词

Picard定理，全纯矩阵函数，渐近值，复动力系统

1. 引言和主要结果

整函数是在整个复平面$\mathbb{C}$上全纯的函数。众所周知，整函数的皮卡定理是全纯函数的一个重要性质，它告诉我们：整函数$f(z)$在$\mathbb{C}$中取到每个有穷复值，最多只有一个例外[1]。全纯函数的例外值、临界值、完全歧义值、渐近值等的性态一直是复变函数领域中引起人们兴趣的研究内容，在这些方面也有许多丰富的结果[2]-[4]。对高维的全纯函数考虑类似的问题是很有意义的，也是很复杂的[5] [6]。

本文中我们将整函数的 Picard 定理推广到一类全纯矩阵函数上，并考虑其例外值的相关性质。为后面叙述方便，下面先介绍一些所需的概念和符号[2]-[7]：

$\mathbb{C}^{3\times3}$表示所有的 3 阶复矩阵构成的集合；

设$A\in\mathbb{C}^{3\times3}$，若在$\mathbb{C}^{3\times3}$中矩阵$A$与一个对角矩阵相似，则称$A$是可对角化矩阵，否则称$A$为不可对角化矩阵，矩阵$A$的相似类指的是所有与$A$相似的矩阵构成的集合；

$\mathcal{A}$为$\mathbb{C}^{3\times3}$的子集，$\mathcal{L}^9(\mathcal{A})$表示$\mathcal{A}$的 9 维复勒贝格测度；

设$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$为整函数，$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k Z^k\left(Z\in\mathbb{C}^{3\times3}\right)$表示$f$在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓；

若$f^{-1}(w)=\varnothing(w\in\mathbb{C})$，则称$w$为$f$的例外值，记为$Omit(f)$，且记$Omit(F)=\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)$；

若存在$z\in\mathbb{C}$，使得$f(z)=w(w\in\mathbb{C})$并且$f'(z)=0$，则称点w为f在$\mathbb{C}$上的临界值；

若$w\in\mathbb{C}$的每一个原像至少是 2 重的，则称w为f在$\mathbb{C}$上的完全歧义值；

若存在一条趋于无穷的曲线$\gamma:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$，使得$\lim_{t\to\infty}f(\gamma(t))=a$成立，则称$a\in\mathbb{C}$是$f$的渐近值；

若存在一条趋于无穷的曲线$\Gamma:[0,+\infty)\to\mathbb{C}^{3\times3}$，使得$\lim_{t\to\infty}F(\Gamma(t))=A$成立，则称$A\in\mathbb{C}^{3\times3}$是$F$的渐近值；

运用复分析的知识和矩阵分析的技巧，我们研究了$\mathbb{C}^{3\times3}$上全纯矩阵函数的解析性质，得到下面的结果。

定理 1： 设f是$\mathbb{C}$上的非线性整函数，且F是f在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓，则$\mathcal{L}^9(Omit(F))=0$。

定理 2： 设f是$\mathbb{C}$上的非线性整函数，且F是f在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓，如果$Omit(f)=\varnothing$并且

$$Omit(f')=\{0\}，则 F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)=\mathbb{C}^{3\times3}。$$

定理 3： 设f是$\mathbb{C}$上的非线性整函数，且F是f在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓，如果$Omit(f)=\varnothing$并且f不存在完全歧义值，则$F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)=\mathbb{C}^{3\times3}$。

更进一步，我们发现上述定理中的条件亦是$F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)=\mathbb{C}^{3\times3}$成立的必要条件。

定理 4： 设f是$\mathbb{C}$上的非线性整函数，且F是f在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓，如果$F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)=\mathbb{C}^{3\times3}$，则$Omit(f)=\varnothing$，$Omit(f')=\{0\}$或$f$不存在完全歧义值。

渐近值理论是复分析中重要的理论，我们知道整函数f的 Picard 例外值是渐近值。考虑自由延拓F的渐近性，我们有类似的结论。

定理 5： 设f是$\mathbb{C}$上的非线性整函数，且F是f在$\mathbb{C}^{3\times3}$上的自由延拓，如果$\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)\neq\varnothing$，则

$F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)$ 在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中的每一个例外值都是一个渐近值。

另一方面，我们进一步讨论了 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 上自由延拓的整函数F的动力学性质。令

$$Per_n\left(F\right)=\left\{Z\in\mathbb{C}^{3\times3}:F^n\left(Z\right)=Z\right\},$$

及 $\mathcal{F}\left(f\right)=\left\{z:\left\{f^n\right\}_{n=1}^{\infty}\text{是z的某个邻域内的正规族}\right\}$，$\mathcal{J}\left(f\right)=\mathbb{C}\setminus\mathcal{F}\left(f\right)$，$\mathcal{F}\left(f\right)$ 称为 Fatou 集，$\mathcal{F}\left(f\right)$ 称为 Julia 集。

Misiurewicz [8]证明了 $f\left(z\right)=e^z$ 的 Julia 集为复平面 $\mathbb{C}$。我们受 Misiurewicz 的启发得到了下面两个结论。

定理 6：设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的非线性整函数，且 F 是 f 在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 上的自由延拓，如果 $\mathcal{J}\left(f\right)=\mathbb{C}$，则

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}Per_n\left(F\right)}=\mathbb{C}^{3\times3}。$$

定理 7：设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的非线性整函数，且 F 是 f 在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 上的自由延拓，如果 $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}Per_n\left(F\right)}=\mathbb{C}^{3\times3}$，则 $\mathcal{J}\left(f\right)=\mathbb{C}$。

2. 引理

为了证明定理，我们需要下面的引理。

引理 1：如果 $\mathcal{A}=\left\{A\in\mathbb{C}^{3\times3}:\det A=0\right\}$，则 $\mathcal{L}^9\left(\mathcal{A}\right)=0$。

证明：因为集合 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}^9$ 中是有限个低维复子流形的并集，并且每一个复子流形最多是在 8 维的复空间中，所以我们可以得到 $\mathcal{L}^9\left(\mathcal{A}\right)=0$。

引理 2：如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中所有可对角化矩阵构成的集合，则 $\mathcal{L}^9\left(GL\left(3,\mathbb{C}\right)\setminus\mathcal{B}\right)=0$，其中 $GL\left(3,\mathbb{C}\right)$ 是所有 3 阶非奇异复矩阵构成的集合。

证明：设 $\mathcal{C}$ 是 $GL\left(3,\mathbb{C}\right)$ 中所有不可对角化矩阵构成的集合，表示集合中的每一个矩阵至少有两个相同的特征值，我们可以得到 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$。因为 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{C}^9$ 中是有限个低维复子流形的并集，并且每一个复子流形最多是在 8 维的复空间中。从而可以得到 $\mathcal{L}^9\left(\mathcal{D}\right)=0$，故 $\mathcal{L}^9\left(GL\left(3,\mathbb{C}\right)\setminus\mathcal{B}\right)=0$。

下面引理 3 是关于矩阵谱的连续性结果。

引理 3：[9]**:**设 $A,B\in\mathbb{C}^{3\times3}$，$\sigma\left(A\right)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right\}$ 为 A 的谱集，$\sigma\left(B\right)=\left\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\right\}$ 为 B 的谱集，两个谱集之间的距离定义为 $d\left(\sigma\left(A\right),\sigma\left(B\right)\right)=\min\limits_{\tau\in S_3}\max\limits_i\left\{\left|\lambda_i-\mu_{\tau(i)}\right|\right\}$，其中 S_3 是 3 元置换群，则 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 上的距离函数 d 是连续的。

除此之外，我们还需要复动力系统中的几个重要结论。

引理 4：[10] [11]**：**设 f 为整函数，则 $\mathcal{J}\left(f\right)$ 为斥性周期点的闭包。

引理 5：[10] [11]**：**设 f 为整函数，则 $\mathcal{F}\left(f\right)$ 的任一连通分支为以下类型之一：吸引周期分支、超吸引周期分支、抛物周期分支、Siegel 盘、Baker 分支、预周期分支、游荡分支。

3. 定理 1 的证明

证明：设 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$，且 A 可以对角化，则存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda_i\in\mathbb{C}$，其中 $i=1,2,3$，使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}。$$

如果 f 的每一个像都有原像，则对于 $\mathbb{C}$ 中的 λ_i，我们有 $f\left(u_i\right)=\lambda_i$，其中 $i=1,2,3$。从而对于 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中

的所有可对角化矩阵 A，存在矩阵

$$B=P\begin{pmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{pmatrix}P^{-1},$$

使得 $F(B)=A$ 成立。

如果 f 中有一个像没有原像，不妨设 $f^{-1}(\nu)=\varnothing$，$\nu\in\mathbb{C}$，则对于 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中的一类可对角化矩阵

$$C=P\begin{pmatrix}\nu&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}P^{-1},\lambda,\mu\in\mathbb{C}$$

不存在 $D\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 使得 $F(D)\in C$。

因为 C 在所有可对角化矩阵构成的集合中是零测的，所以 $F(\mathbb{C}^{3\times3})$ 在所有可对角化矩阵构成的集合中稠密。由引理 1 和引理 2 可得所有可对角化矩阵构成的集合在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 稠密，则 $F(\mathbb{C}^{3\times3})$ 在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中稠密，所以 $\mathcal{L}^9(Omit(F))=0$。

4. 定理 2 和定理 3 的证明

定理 2 的证明 (1) 如果 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 是可以对角化的矩阵，则存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda_i\in\mathbb{C}$，其中 $i=1,2,3$，使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}。$$

由于 $Omit(f)=\varnothing$，所以存在 $\mu_i\in\mathbb{C}$，$i=1,2,3$，使得 $f(\mu_i)=\lambda_i$。令

$$B=P\begin{pmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{pmatrix}P^{-1},$$

把 B 代入 F 中可得

$$F(B)=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}=A。$$

(2) 否则，A 与一个 Jordan 标准型相似，即存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}P^{-1} \tag{1}$$

或

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}P^{-1} \tag{2}$$

对于(1)式，因为 $Omit(f)=\varnothing$，所以存在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $f(\alpha)=\lambda$。由 $Omit(f')=\{0\}$，可得 $f'(\alpha)\neq0$。

现在考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \dfrac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) \\ 0 & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix},$$

它的线性无关的特征向量只有一个即 $X=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，所以上述矩阵不可对角化，从而存在非奇异矩阵 Q 使得

$$Q\begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \dfrac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) \\ 0 & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix} f(\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & f(\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}。$$

令

$$B=PQ\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}Q^{-1}P^{-1}$$

可得 $F(B)=A$。

对于(2)式，因为 $Omit(f)=\varnothing$，所以存在 $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ 使得 $f(\beta)=\lambda$，$f(\gamma)=\mu$ 又由 $Omit(f')=\{0\}$ 可知 $f'(\beta)\neq 0$。由于矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\beta) & f'(\beta) & 0 \\ 0 & f(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & f(\gamma) \end{pmatrix}$$

它的线性无关的特征向量只有两个即 $X_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$X_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，所以上述矩阵不可对角化。从而存在非奇异矩阵 Q 使得

$$Q\begin{pmatrix} f(\beta) & f'(\beta) & 0 \\ 0 & f(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & f(\gamma) \end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}。$$

令

$$B=PQ\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}Q^{-1}P^{-1},$$

可得 $F(B)=A$。

定理 3 的证明 (1) 对于 $\mathbb{C}^{3\times 3}$ 中可对角化矩阵的证明与定理 2 的证明相同。

(2) 否则，A 与一个 Jordan 标准型相似，即存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，使得(1)或(2)成立。对于(1)式，因为 $Omit(f)=\varnothing$，所以 λ 的原像为 $w_i\in\mathbb{C}$，$i=1,2,3\cdots$，又因为 f 不存在完全歧义值，所以存在 $w_1\in\mathbb{C}$ 使得 $f'(w_1)\neq 0$。令

$$B=P\begin{pmatrix} w_1 & \frac{1}{f'(w_1)} & -\frac{f''(w_1)}{2\left(f'(w_1)\right)^3} \\ 0 & w_1 & \frac{1}{f'(w_1)} \\ 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

把 B 代入 F 中可得

$$F(B)=P\begin{pmatrix} f(w_1) & 1 & 0 \\ 0 & f(w_1) & 1 \\ 0 & 0 & f(w_1) \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}=A。$$

对于(2)式，因为 $Omit(f)=\varnothing$，所以 λ 的原像为 $z_i\in\mathbb{C}$，$i=1,2,3,\cdots$，μ 的原像为 $z\in\mathbb{C}$ 又因为 f 不存在完全歧义值，所以存在 $z_1\in\mathbb{C}$ 使得 $f'(z_1)\neq 0$。令

$$B=P\begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{f'(z_1)} & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}P^{-1},$$

把 B 代入 F 中可得

$$F(B)=P\begin{pmatrix} f(z_1) & 1 & 0 \\ 0 & f(z_1) & 0 \\ 0 & 0 & f(z) \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}=A。$$

5. 定理 4 的证明

证明：(1) 首先，假设 $Omit(f)=\varnothing$，则存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $Omit(f)=\{\lambda\}$。等式 $F(Z)=\lambda Id_3$ 在 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 中没有解，与 $F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)=\mathbb{C}^{3\times3}$ 相矛盾，故 $Omit(f)=\varnothing$。

(2) 其次，假设 $Omit(f')\neq\{0\}$ 且存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 λ 是 f 的一个完全歧义值。如果 A 可以对角化，因为 $Omit(f)=\varnothing$，则存在矩阵 B 使得 $F(B)=A$。否则，A 与一个 Jordan 标准型相似，即存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，使得(1)或(2)成立。

对于(1)式，如果存在非奇异矩阵 Q 及 $\alpha\in\mathbb{C}$，使得 $F(B)=A$，则

$$B=Q\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}Q^{-1}。$$

因为 λ 是 f 的一个完全歧义值, 则 $f'(\alpha)=0$。把 B 代入到 F 中得

$$F(B)=Q\begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \frac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) \\ 0 & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}Q^{-1},$$

整理得

$$Q\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \frac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}Q^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}。$$

从而

$$Q\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{f''(\alpha)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=P\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

可知上述等式矛盾。

对于(2)式，如果存在非奇异矩阵 Q 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，使得 $F(B)=A$，则

$$B=Q\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}Q^{-1}。$$

因为 λ 是 f 的一个完全歧义值，则 $f'(\alpha)=0$。进一步得

$$F(B)=Q\begin{pmatrix}f(\alpha) & f'(\alpha) & 0 \\ 0 & f(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & f(\beta)\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}Q^{-1},$$

整理得

$$Q\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}Q^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}。$$

从而

$$0=P\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1},$$

可知上述等式也是矛盾的。

当 A 不可对角化时，$Omit(F)\neq\varnothing$，所以假设不成立，故 $Omit(f')=\{0\}$ 或 f 不存在完全歧义值。

6. 定理 5 的证明

证明：(1) 假定 $Omit(f)=\varnothing$，设 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F(\mathbb{C}^{3\times3})$，由定理 4 的证明可知 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F(\mathbb{C}^{3\times3})$ 中的矩阵都不可对角化，所以 A 不可对角化。则存在非奇异矩阵 P 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ 使得(1)或(2)成立。

因为 $Omit(f)=\varnothing$，则存在 $a,b\in\mathbb{C}$ 使得 $f(a)=\lambda$，$f(b)=\mu$ 又因为 $A\in\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F(\mathbb{C}^{3\times3})$，则 $f'(a)=0$。

对于(1)式，我们考虑充分大的 $t\in\mathbb{C}$，并且定义曲线 $\Gamma:[1,+\infty)\to\mathbb{C}^{3\times3}$ 即

$$\Gamma(t)=P\begin{pmatrix} a+\frac{1}{t} & \frac{1}{f'(a+1/t)} & -\frac{f''(a+1/t)}{2\left(f'(a+1/t)\right)^3} \\ 0 & a+\frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 0 & a+\frac{1}{t} \end{pmatrix}P^{-1}。$$

把$\Gamma(t)$代入到F中可得

$$F(\Gamma(t))=P\begin{pmatrix} f\left(a+\frac{1}{t}\right) & 1 & 0 \\ 0 & f\left(a+\frac{1}{t}\right) & 1 \\ 0 & 0 & f\left(a+\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}P^{-1},$$

进一步取极限得

$$\lim_{t\to\infty}F(\Gamma(t))=\lim_{t\to\infty}P\begin{pmatrix} f\left(a+\frac{1}{t}\right) & 1 & 0 \\ 0 & f\left(a+\frac{1}{t}\right) & 1 \\ 0 & 0 & f\left(a+\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}P^{-1}=A。$$

利用上述的证明方法，类似地可以证明(2)式也是满足的。

(2) 假定$Omit(f)=\{a\}$，其中$a\in\mathbb{C}$。设$A\in\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)$，根据一维单复变函数中的渐近值理论可知对于充分大的$t\in\mathbb{C}$存在曲线$\gamma:[1,+\infty)\to\mathbb{C}$使得$\lim_{t\to\infty}f(\gamma(t))=a$。下面分4种情形讨论。

情形1：如果A是可对角化矩阵且a不是矩阵A的谱，则$A\notin\mathbb{C}^{3\times3}\setminus F\left(\mathbb{C}^{3\times3}\right)$。

情形2：如果A是可对角化矩阵且a是矩阵A的谱，则存在非奇异矩阵P及$a,b,c\in\mathbb{C}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$

且$a\neq b$，$a\neq c$。因为$Omit(f)=\{a\}$，则存在$z_1,z_2\in\mathbb{C}$使得$f(z_1)=b$，$f(z_2)=c$。我们考虑充分大的$t\in\mathbb{C}$，并且定义曲线$\Gamma:[1,+\infty)\to\mathbb{C}^{3\times3}$即

$$\Gamma(t)=P\begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix}P^{-1}。$$

把$\Gamma(t)$代入到F中可得

$$F(\Gamma(t))=P\begin{pmatrix} f(\gamma(t)) & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1},$$

进一步取极限得

$$\lim_{t\to\infty} F\left(\Gamma(t)\right) = \lim_{t\to\infty} P\begin{pmatrix} f\left(\gamma(t)\right) & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = A \text{。}$$

对于其它类型的

$$A = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} \text{和 } A = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

证明与上述证明类似。

情形 3：如果 A 不可对角化且 a 不是矩阵 A 的谱，则此情形的证明与(1)相同。

情形 4：如果 A 不可对角化且 a 是矩阵 A 的谱，则存在非奇异矩阵 P 使得

$$A = P\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} \text{。}$$

通过对渐近曲线 $\gamma(t)$ 做细微的改变使得 $\gamma(t)$ 上没有临界点。我们考虑充分大的 $t\in\mathbb{C}$，并且定义曲线 $\Gamma:[1,+\infty)\to\mathbb{C}^{3\times3}$ 即

$$\Gamma(t) = P\begin{pmatrix} \gamma(t) & \dfrac{1}{f'\left(\gamma(t)\right)} & -\dfrac{f''\left(\gamma(t)\right)}{2\left(f'\left(\gamma(t)\right)\right)^3} \\ 0 & \gamma(t) & \dfrac{1}{f'\left(\gamma(t)\right)} \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix} P^{-1} \text{。}$$

把 $\Gamma(t)$ 代入到 F 中可得

$$F\left(\Gamma(t)\right) = P\begin{pmatrix} f\left(\gamma(t)\right) & 1 & 0 \\ 0 & f\left(\gamma(t)\right) & 1 \\ 0 & 0 & f\left(\gamma(t)\right) \end{pmatrix} P^{-1},$$

进一步取极限得

$$\lim_{t\to\infty} F\left(\Gamma(t)\right) = \lim_{t\to\infty} P\begin{pmatrix} f\left(\gamma(t)\right) & 1 & 0 \\ 0 & f\left(\gamma(t)\right) & 1 \\ 0 & 0 & f\left(\gamma(t)\right) \end{pmatrix} P^{-1} = A \text{。}$$

对于另一种类型的

$$A = P\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}, \quad c\in\mathbb{C}$$

证明是类似的。

7. 定理 6 和定理 7 的证明

定理 6 的证明 设 $U = \left\{A : \lambda_i(A) \neq \lambda_j(A), i\neq j, \lambda_i(A)\notin Omit(f), i=1,2,3, j=1,2,3\right\}$。由引理 1 和引理 2，

我们只需要证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(F)$ 在 U 中稠密即可。设 $A\in U$，则存在非奇异矩阵 P 使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2(A) & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3(A)\end{pmatrix}P^{-1}。$$

由引理 4 可知 $\mathcal{J}(f)$ 是 f 的所有斥性周期点的闭包，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在周期为 n_i 的周期点 μ_i，其中 $i=1,2,3$，使得 $|\mu_i-\lambda_i(A)|<\varepsilon$。进行迭代得

$$\left|f^{n_1n_2n_3}(\mu_i)-\lambda_i(A)\right|=|\mu_i-\lambda_i(A)|<\varepsilon$$

令

$$B=P\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}P^{-1},$$

则

$$F^{n_1n_2n_3}(B)=P\begin{pmatrix}f^{n_1n_2n_3}(\mu_1) & 0 & 0\\ 0 & f^{n_1n_2n_3}(\mu_2) & 0\\ 0 & 0 & f^{n_1n_2n_3}(\mu_3)\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}P^{-1}=B。$$

定理 7 的证明 假设 $\mathcal{J}(f)\neq\mathbb{C}$，则 $\mathcal{F}(f)\neq\varnothing$。如果 V 是周期 Fatou 分支里的吸性域，由引理 1 和引理 2 我们只考虑可对角化情形。令

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

其中 $A\in V$，$\lambda_i\neq\lambda_j$，$i=1,2,3$，$j=1,2,3$。由 $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(F)}=\mathbb{C}^{3\times3}$ 可知，在 A 的 $\varepsilon>0$ 邻域内存在周期为 n 的周期矩阵 B。由 A 的矩阵结构可得 B 的谱 μ_1,μ_2,μ_3 是互不相同的且 B 是可对角化矩阵，则存在非奇异矩阵 P 使得

$$B=P\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}P^{-1}$$

根据引理 3 矩阵谱的连续性结果可得 $\mu_i\in V$。又由吸性域的性质可知 B 不是周期矩阵，矛盾。对于其它类型的 Fatou 周期分支和游荡分支的证明类似。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11571049)。

参考文献 (References)

[1] Ahlfors, L.V. (1978) Complex Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 307.

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford, 78.

[3] Eremenko, A. and Yu Lyubich, M. (1992) Dynamical Properties of Some Classes of Entire Functions. *Annales De L'Institut Fourier*, **42**, 4. http://dx.doi.org/10.5802/aif.1318

[4] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[5] Rosay, J.-Pi. and Rudin, W. (1988) Holomorphic Maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$. *Transactions of the American Mathematical Society*, **310**, 47-86.

[6] Fu, C., Li, Y.Z. and Yao, X. (2016) A Note for Picard Theorem for Holomorphic Matrix-Value Maps in $\mathbb{C}^{2\times 2}$. *Complex Analysis and Operator Theory*.

[7] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139020411

[8] Misiurewicz, M. (1981) On Iterates of e^z. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **1**, 103-106. http://dx.doi.org/10.1017/S014338570000119X

[9] Zhan, X.Z. (2002) Matrix Inequalities. Springer-Verlag, Berlin. http://dx.doi.org/10.1007/b83956

[10] Schleicher, D. (2010) “Dynamics of Entire Functions” Holomorphic Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 295-339. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-13171-4_5

[11] 任福尧. 复解析动力系统[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997: 183-202.