Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 418-426
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65057

Hans汉斯

Wronsky Determinant and Meromorphic Functions with Maximal Deficiency Sum

Jia Xie, Bingmao Deng, Jing Li

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: zyb-may@qq.com, dbmao2012@163.com, 570760755@qq.com

Received: Aug. 31st, 2016; accepted: Sep. 14th, 2016; published: Sep. 20th, 2016

Abstract

Let f be a transcendental meromorphic function satisfying $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$, and k is a positive integer; let $a_1=1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ be linearly independent small functions of f, and $W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$ is a constant; let $L(f)=W(a_1,\cdots,a_k,f)$. Then

$$\delta(0,L(f))=\Delta(0,L(f))=\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))},$$

$$\delta(\infty,L(f))=\Delta(\infty,L(f))=\frac{\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))},$$

$$\delta(b,L(f))=\Delta(b,L(f))=0,\quad b\neq 0,\infty.$$

Keywords

Meromorphic Function, Maximal Deficiency Sum, Wronsky Determinant

Wronsky行列式与具有最大亏量和的亚纯函数

谢　佳，邓炳茂，李　菁

华南农业大学应用数学研究所，广东 广州
Email: zyb-may@qq.com, dbmao2012@163.com, 570760755@qq.com

文章引用: 谢佳, 邓炳茂, 李菁. Wronsky 行列式与具有最大亏量和的亚纯函数[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 418-426.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65057

收稿日期：2016年8月31日；录用日期：2016年9月14日；发布日期：2016年9月20日

摘 要

设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，k 为正整数，$a_1=1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 是 f 的 $k+1$ 个线性独立的小函数，且满足 $W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$ 为常数，$L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_k,f)$，则有

$$\delta(0,L(f))=\Delta(0,L(f))=\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))},$$

$$\delta(\infty,L(f))=\Delta(\infty,L(f))=\frac{\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))},$$

$$\delta(b,L(f))=\Delta(b,L(f))=0,\quad b\neq 0,\infty.$$

关键词

亚纯函数，最大亏量和，Wronsky行列式

1. 引言及主要结果

本文采用 Nevanlinna 理论中的记号[1] [2]，如 $m(r,f)$，$N(r,f)$，$\bar{N}(r,f)$，$T(r,f)$ 及 $S(r,f)$ 等。

定义 1 设 f 是复平面上的一个非常数亚纯函数，b 为一个有穷复数(或 ∞)，

$$\delta(b,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-b}\right)}{T(r,f)},$$

$$\Delta(b,f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)}{T(r,f)}=1-\varliminf_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-b}\right)}{T(r,f)},$$

$$\Theta(b,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)}{T(r,f)}.$$

若 $\delta(b,f)>0$，则称 b 是 f 的一个 Nevanlinna 亏值，简称亏值，$\delta(b,f)$ 称为 Nevanlinna 亏量，简称亏量。若 $\Delta(b,f)>0$，则称 b 是 f 的一个 Valiron 亏值，$\Delta(b,f)$ 称为 Valiron 亏量。在值分布论中，f 的所有亏值至多为一个可数集，且

$$\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)\le 2.$$

定义 2 设 $a(z)$ 是复平面上的一个亚纯函数，如果 $T(r,a)=S(r,f)$，则称 $a(z)$ 为 f 的一个小函数。

定义 3 设亚纯函数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，记 $a_1,a_2,\cdots,a_k,f$ 所构成的 Wronsky 行列式表示为 $L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_k,f)$，即

$$L(f)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & f \\ a_1' & a_2' & \cdots & a_k' & f' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \cdots & a_k^{(k)} & f^{(k)} \end{vmatrix}$$

1990 年，杨乐[3]研究了 $f^{(k)}$ 的亏量和亏值与 f 的亏量和亏值之间的关系，证明了下面的定理。

定理 A [3] 设 f 是复平面上的有穷级超越亚纯函数，k 是一个正整数，则有

$$\sum_{b\in\hat{C}}\delta\left(b,f^{(k)}\right)\le\frac{2}{1+k\left(1-\Theta(\infty,f)\right)}.$$

杨乐提出了该上界是否精确的问题。2013 年，仇惠玲等人[4]回答了这个问题，证明了如下定理。

定理 B [4] 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，则对于任意正整数 k，有

$$\delta\left(0,f^{(k)}\right)=\Delta\left(0,f^{(k)}\right)=\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k-k\delta(\infty,f)},$$

$$\delta\left(\infty,f^{(k)}\right)=\Delta\left(\infty,f^{(k)}\right)=\frac{\delta(\infty,f)}{1+k-k\delta(\infty,f)},$$

$$\delta\left(b,f^{(k)}\right)=\Delta\left(b,f^{(k)}\right)=0,b\ne0,\infty.$$

本文将 $f^{(k)}$ 换成 $L(f)$，推广了定理 B，证明了如下结果。

定理 1 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，$a_1=1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_k,f)$，则有

$$\delta(0,L(f))=\Delta(0,L(f))=\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k\left(1-\delta(\infty,f)\right)},\tag{1.1}$$

$$\delta(\infty,L(f))=\Delta(\infty,L(f))=\frac{\delta(\infty,f)}{1+k\left(1-\delta(\infty,f)\right)},\tag{1.2}$$

若存在 f 的一个小函数 a_{k+1} 使得 $W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$ 为非零常数，则有

$$\delta(b,L(f))=\Delta(b,L(f))=0,b\ne0,\infty.\tag{1.3}$$

例 1 设 f 是超越亚纯函数，$a_1=1,a_2=z,a_3=\frac{z^2}{2},\cdots,a_{k-1}=\frac{z^{k-2}}{(k-2)!},a_k=z^{2k}$，则

$$L(f)=W(a_1,\cdots,a_k,f)=W\left(1,z,\frac{z^2}{2},\cdots,\frac{z^{k-2}}{(k-2)!},z^{2k},f\right),$$

显然，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的小函数，且线性独立。通过行列式的计算可知，$L(f)=\frac{(2k)!}{(k+1)!}z^{k+1}f^{(k)}-\frac{(2k)!}{k!}z^kf^{(k-1)}\ne Af^{(k)}$，其中 A 为非零常数。令 $a_{k+1}=\frac{1}{z}$，则 a_{k+1} 为 f 的小函数，显然 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 线性独立，且 $W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})=(-1)^k(k+2)(2k)!/(k+1)!$ 为非零常数。

由此可知，定理 1 推广了定理 B。

注 显然，若 f 是满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，则有

$$\delta(\infty, f)=\Theta(\infty, f).$$

因此有下面的结论。

推论 1 设超级有穷的超越亚纯函数 f 满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, f)=2$，$a_1=1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ 是 f 的 $k+1$ 个线性独立的小函数，$L(f)=W(a_1, a_2, \cdots, a_k, f)$，且满足 $W(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1})$ 为常数，则有

$$\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, L(f))=\frac{2}{1+k(1-\Theta(\infty, f))}.$$

1973 年，Singh-Kulkarni [5]证明了下面的定理。

定理 C [5] 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, f)=2$ 的有穷级超越亚纯函数，则有

$$\frac{1-\delta(\infty, f)}{2-\delta(\infty, f)}\le K(f')\le\frac{2(1-\delta(\infty, f))}{2-\delta(\infty, f)},$$

其中

$$K(f')=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r, f')+N(r, 1/f')}{T(r, f')}.$$

2000 年，Fang [6]改进了定理 C，证明了如下定理。

定理 D [6] 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, f)=2$ 的有穷级超越亚纯函数，则对于任意正整数 k，有

$$K\left(f^{(k)}\right)=\frac{2k(1-\delta(\infty, f))}{1+k-k\delta(\infty, f)},$$

其中

$$K\left(f^{(k)}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r, f^{(k)}\right)+N\left(r, 1/f^{(k)}\right)}{T\left(r, f^{(k)}\right)}.$$

2013 年，仇惠玲等[4]将定理 D 中的“有穷级”改成“超级有穷”，结论仍成立。

定理 E [4] 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，则对于任意正整数 k，有

$$K\left(f^{(k)}\right)=\frac{2k(1-\delta(\infty, f))}{1+k-k\delta(\infty, f)},$$

其中

$$K\left(f^{(k)}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r, f^{(k)}\right)+N\left(r, 1/f^{(k)}\right)}{T\left(r, f^{(k)}\right)}.$$

本文将定理 E 中的 $f^{(k)}$ 换成 $L(f)$，推广了上述结果。由定理 1 即得下面的推论。

推论 2 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b, f)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，$a_1=1, a_2, \cdots, a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W(a_1, a_2, \cdots, a_k, f)$，则有

$$K(L(f))=\frac{2k(1-\delta(\infty, f))}{1+k-k\delta(\infty, f)},$$

其中

$$K\left(L(f)\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r,L(f)\right)+N\left(r,1/L(f)\right)}{T\left(r,L(f)\right)}.$$

由亏量关系和定理 1 即得如下结果。

定理 2 设 f 是复平面上的超级有穷的超越亚纯函数，k 为一个正整数，$a_1=1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 是 f 的 $k+1$ 个线性独立的小函数，$L(f)=W\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,f\right)$，且满足 $W\left(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\right)$ 为常数，则

$$\sum_{b\in\hat{C}}\delta\left(b,f\right)+\sum_{d\in\hat{C}}\delta\left(d,L(f)\right)=4 \tag{1.4}$$

成立的充分必要条件是

$$\delta\left(\infty,f\right)=1，\ \sum_{b\in C}\delta\left(b,f\right)=1 \tag{1.5}$$

成立。

2. 一些引理

引理 1 [4] 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta\left(b,f\right)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，则有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)}=0.$$

引理 2 [7] 设 f 是一个超越亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,f\right)$，则对任意的 $\varepsilon(>0)$，有

$$k\bar{N}\left(r,f\right)\le N\left(r,\frac{1}{L(f)}\right)+\left(1+\varepsilon\right)N\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).$$

引理 3 [8] 设 f 是超越亚纯函数，$a_1=1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,f\right)$，$b_1,b_2,\cdots,b_q$ 是判别的有穷复数，则

$$\sum_{v=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-b_v}\right)\le m\left(r,\frac{1}{L(f)}\right)+S\left(r,f\right).$$

引理 4 设 f 是超越亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,f\right)$，则有

$$T\left(r,L(f)\right)\le T\left(r,f\right)+k\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).$$

证明 由 Nevanlinna 基本理论得

$$\begin{aligned}T\left(r,L(f)\right)&=m\left(r,L(f)\right)+N\left(r,L(f)\right)\\&\le m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right)+k\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)\\&=T\left(r,f\right)+k\bar{N}\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).\end{aligned}$$

引理 5 设 f 是复平面上满足 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta\left(b,f\right)=2$ 的超级有穷的超越亚纯函数，$a_1=1,a_2,\cdots,a_k$ 是 f 的 k 个线性独立的小函数，$L(f)=W\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,f\right)$，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T\left(r,L(f)\right)}{T\left(r,f\right)}=1+k-k\delta\left(\infty,f\right).$$

证明 不妨设 f 有无穷多个有穷亏值 $b_1,b_2,\cdots$，则由引理 3，

$$\sum_{v=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-b_v}\right) \le m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f)$$
$$\le T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

由引理 1，

$$\sum_{v=1}^{q} \delta(b_v, f) \le 1 + \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r, f)}{T(r, f)} \le 1 + \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} \le 2 - \delta(\infty, f).$$

令 $q \to \infty$，及 $\sum_{v=1}^{\infty} \delta(b, f) = 2 - \delta(\infty, f)$，得

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r, f)}{T(r, f)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} = 1 - \delta(\infty, f). \tag{2.1}$$

由引理 3，可得

$$\sum_{v=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-b_v}\right) \le m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f) \le T(r, L(f)) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f).$$

再由引理 2，得

$$\sum_{v=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-b_v}\right) \le T(r, L(f)) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f)$$
$$\le T(r, L(f)) + (1+\varepsilon) N(r, f) - k\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

应用引理 1 及(2.1)得

$$\sum_{v=1}^{q} \delta(b_v, f) \le \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{T(r, L(f))}{T(r, f)} + (1+\varepsilon-k)(1-\delta(\infty, f)).$$

令 $q \to \infty$，$\varepsilon \to 0$ 得

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{T(r, L(f))}{T(r, f)} \ge 1 + k(1-\delta(\infty, f)). \tag{2.2}$$

另一方面，由引理 4

$$T(r, L(f)) \le T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

再应用引理 1 及(2.1)得

$$\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{T(r, L(f))}{T(r, f)} \le 1 + k(1-\delta(\infty, f)). \tag{2.3}$$

于是，由(2.2)和(2.3)得

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, L(f))}{T(r, f)} = 1 + k(1-\delta(\infty, f)).$$

证毕。

引理 6 [7] 设 $h_1, \cdots, h_k, g_1, \cdots, g_n$ 为线性独立的函数，则有

$$W(h_1, \cdots, h_k, g_1, \cdots, g_n)(W(h_1, \cdots, h_k))^{n-1} = W(W(h_1, \cdots, h_k, g_1), \cdots, W(h_1, \cdots, h_k, g_n)).$$

3. 定理的证明

定理 1 的证明 不妨设 f 有无穷多个有穷亏值 $b_1, b_2, \cdots$，则由引理 3，

$$\sum_{v=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-b_v}\right) \le m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f).$$

应用引理 1 得

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} \ge \sum_{v=1}^{q} \delta(b_v, f),$$

令 $q \to \infty$ 得

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} \ge 2 - \delta(\infty, f). \tag{3.1}$$

另一方面，由引理 2 和引理 4 得

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) &= T(r, L(f)) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, L(f)) \\ &\le T(r, f) + k\bar{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f) \\ &\le T(r, f) + (1+\varepsilon) N(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，并应用引理 1 及(2.1)得

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} \le 2 - \delta(\infty, f). \tag{3.2}$$

因此，由(3.1)和(3.2)，我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} = 2 - \delta(\infty, f). \tag{3.3}$$

由引理 5 和(3.3)得

$$\begin{aligned} \delta(0, L(f)) = \Delta(0, L(f)) &= \lim_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right)}{T(r, f)} \lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{T(r, L(f))} = \frac{2-\delta(\infty, f)}{1+k(1-\delta(\infty, f))}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

于是(1.1)得证。下面证明(1.2)。

由引理 1，引理 5 及(2.1)得

$$\begin{aligned}\delta(\infty,L(f))=\Delta(\infty,L(f))&=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,L(f))}{T(r,L(f))}\\&=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f)}{T(r,f)}\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T(r,L(f))}\\&=1-\frac{(k+1)(1-\delta(\infty,f))}{1+k(1-\delta(\infty,f))}=\frac{\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

于是(1.2)得证。下面证明(1.3)。

记 $L_k(f)=L(f)=W(a_1,\cdots,a_k,f)$，且存在 f 的一个小函数 a_{k+1} 使得 $W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$ 为非零常数，记 $L_{k+1}(f)=W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1},f)$。则由引理 6 可知，

$$L_{k+1}(f)=\frac{W(W_{k+1},L_k(f))}{W_k},$$

其中 $W_{k+1}=W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$，$W_k=W(a_1,\cdots,a_k)$。

因为 $W(W_{k+1},L_k(f))=W_{k+1}L_k'(f)-W_{k+1}'L_k(f)$，则

$$m\left(r,\frac{L_{k+1}(f)}{L_k(f)}\right)=m\left(r,\frac{W_{k+1}L_k'(f)-W_{k+1}'L_k(f)}{W_kL_k(f)}\right)\le S(r,f)。\tag{3.6}$$

任取有穷复数 $b(\ne 0)$，由条件可知，存在 a_{k+1} 使得 $W_{k+1}=W(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})$ 为非零常数，即 $W_{k+1}'=0$，则

$$m\left(r,\frac{L_{k+1}(f)}{L_k(f)-b}\right)=m\left(r,\frac{W_{k+1}L_k'(f)}{W_k(L_k(f)-b)}\right)\le S(r,f).\tag{3.7}$$

因此，由(3.6)，(3.7)和引理 3 得

$$m\left(r,\frac{1}{L_k(f)}\right)+m\left(r,\frac{1}{L_k(f)-b}\right)\le m\left(r,\frac{1}{L_{k+1}(f)}\right)+S(r,f).$$

则由引理 1，引理 5 和(3.3)，(3.4)得

$$\begin{aligned}\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))}&\le\delta(0,L_k(f))+\delta(b,L_k(f))\le\delta(0,L_k(f))+\Delta(b,L_k(f))\\&\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{L_{k+1}(f)}\right)}{T(r,L_k(f))}+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,L_k(f))}\\&\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{L_{k+1}(f)}\right)}{T(r,f)}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T(r,L_k(f))}+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T(r,L_k(f))}\\&\le\frac{2-\delta(\infty,f)}{1+k(1-\delta(\infty,f))}.\end{aligned}$$

即 $\delta(b,L(f))=\Delta(b,L(f))=0$. 定理 1 证毕。

定理 2 的证明 若(1.4)成立，则有

$$\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2，\sum_{d\in\hat{C}}\delta(d,L(f))=2。$$

于是，由 $\sum_{b\in\hat{C}}\delta(b,f)=2$ 及定理 1 得

$$2=\sum_{d\in\hat{C}}\delta(d,L(f))=\frac{2}{1+k(1-\delta(\infty,f))}.$$

即得 $\delta(\infty,f)=1$，$\sum_{b\in C}\delta(b,f)=1$。

反过来，若(1.5)成立，则由定理 1 即得

$$\delta(0,L(f))=\delta(\infty,L(f))=1.$$

于是(1.4)成立。定理 2 证毕。

致　谢

作者衷心感谢方明亮教授的指导和帮助！

基金项目

本文由国家自然科学基金资助(基金号：11371149)。

参考文献 (References)

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[3] Yang, L. (1990) Precise Estimate of Total Deficiency of Meromorphic Derivatives. *Journal d'Analyse Mathematique*, **55**, 287-296. http://dx.doi.org/10.1007/BF02789206

[4] 仇惠玲，曾翠萍，方明亮. 导函数具有最大亏量和的杨乐问题[J]. 中国科学：数学, 2013, 43(12): 1177-1184.

[5] Singh, S.K. and Kulkarni, V.N. (1973) Characteristic Function of a Meromorphic Function and Its Derivatives. *Annales Polonici Mathematici*, **28**, 123-133.

[6] Fang, M.L. (2000) A Note on a Result of Singh and Kulkarni. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **23**, 285-288. http://dx.doi.org/10.1155/S016117120000082X

[7] Frank, G. and Weissenborn, G. (1989) On the Zeros of Linear Differential Polynomials of Meromorphic Functions. *Complex Variables*, *Theory and Application*, **12**, 77-81. http://dx.doi.org/10.1080/17476938908814355

[8] Lahiri, I. and Banerjee, A. (2004) Value Distribution of a Wronskian. *Portugaliae Mathematica* (*Nova Série*), **61**, 161-175.