Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 449-458
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65061

A Fourier-Cosine Method for Pricing Timer Options

Yanyan Xu, Youdong Zeng

Fuzhou University, Fuzhou Fujian
Email: 1344578098@qq.com, zengyd@fzu.edu.cn

Received: Sep. 10th, 2016; accepted: Sep. 24th, 2016; published: Sep. 28th, 2016

Abstract

Timer options have an uncertain expiration date of barrier style options. The finite-maturity timer option expires when the accumulated realized variance of the underlying asset has reached a pre-specified level. We construct the Fourier-cosine method for pricing discrete timer options under Heston model. Numerical results illustrate the accuracy of the Fourier-cosine method.

Keywords

Heston Model, Timer Options, Fourier-Cosine Method

定时器期权定价的Fourier-Cosine方法

徐艳妍，曾有栋

福州大学，福建 福州
Email: 1344578098@qq.com, zengyd@fzu.edu.cn

收稿日期：2016年9月10日；录用日期：2016年9月24日；发布日期：2016年9月28日

摘　要

定时器期权是有着不确定到期日的障碍类型期权。根据标的资产的累计实现方差达到预指定的水平就强制执行的特性，在随机波动模型(Heston model)下，提出Fourier-cosine方法定价有限到期日定时器期

文章引用: 徐艳妍, 曾有栋. 定时器期权定价的 Fourier-Cosine 方法[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 449-458.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65061

权，得到定价表达式。数值结果说明该方法的精确性。

关键词

Heston模型，定时器期权，Fourier-Cosine方法

1. 引言

隐含波动率决定标准期权定价，由于未来资产波动的不确定性,隐含波动率高于实际波动率。有限到期日定时器看涨期权是这样一张合约，买者有着在第一时间以预先设定的敲定价买入标的资产，当标的资产的价格过程的累计实现方差超过预先设定的方差预算，合约强制执行。动态交易策略是对预测未来的波动率和证券组合的诸多应用没有作出要求和说明，Bick [1]对动态交易策略作出了详细的分析。

在 Heston 模型下，利用方差和方差的联合分布的特征函数，Li [2]给出定时器看涨期权的解析表达式。Bernard 和 Cui [3]利用精确的模拟方法有效控制变量，证明定时器期权定价可以演化为一维模型。事实上，这两种方法都忽略强制执行的最大的到期日的特性。Liang *et al.* [4]给出永久定时器期权和有限到期日定时器期权的定价表达式。这算法包含被积函数的多维积分，计算复杂。为了减小计算复杂度，一些研究者探索渐近逼近定价表达式；即使解析表达式是已知的，但渐近扩展式的有效性要求相当大的回归系数。在均值回复的随机波动模型下，Saunders [5]考虑标的资产价格遵循扩散过程的遍历性；方差波动作为一个不定的参数，Li 和 Mercurio [6]给出更有效的永久定时器期权的渐近展开式，它类似于 Black-Scholes 形式，是可计算的。在 Heston 随机波动模型下，Li 和 Mercurio [7]给出有限到期日定时器期权定价的逼近技术。然而，在这些逼近中，要求方差的波动非常小，才能达到有效地精度。

本文主要研究在 Heston 随机波动模型下应用 Fourier-cosine 方法来定价定时器期权。文章的结构如下：在下一节我们讨论关于定时器期权模型的建立。第三节说明如何应用 Fourier-cosine 方法构造向后归纳法来定价有限到期日离散定时器期权。第四节，给出了在 Heston 随机波动模型上的数值结果，说明 Fourier-Cosine 方法的精确性。

2. 定时器期权

考虑有限到期日离散定时器期权，标的资产价格为 S_t，$[0,T], T>0$ 为定时器期权的生命区间，标的资产价格的监控时间点为 $\Gamma=\{t_0,t_1\cdots,t_N\}$，$t_N=T$。为简单起见，设监控区间长度一样为 Δ，标的资产价格过程的离散方差定义如下：

$$\gamma_{\text{realied}}=\frac{1}{(N-1)\Delta}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\left(S_{t_i}/S_{t_{i-1}}\right)\right)^2。\tag{1}$$

从而离散累计实现方差表达式为：

$$\Sigma_{\text{realized}}^2=N\Delta\gamma_{\text{realized}}\approx\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\left(S_{t_i}/S_{t_{i-1}}\right)\right)^2。\tag{2}$$

当 $N\to\infty$ 时，$T=N\Delta$ 有限，则连续累计实现方差 I_T 为

$$I_T=\lim_{N\to\infty}\Sigma_{\text{realized}}^2=\int_0^T\left(\mathrm{d}\ln S_t\right)^2=\left\langle\ln S_t\right\rangle_T。\tag{3}$$

在定时器期权合约中，方差预算为 $B=\gamma_0T_0$，其中 T_0 为期望投资水平，γ_0 为目标波动率。

假设 τ_B 为首次离散累计实现方差超过方差预算 B 的时间点，即

$$\tau_B = \min\left\{ d \mid \sum_{i=1}^{d} \left(\ln\left(S_{t_i} / S_{t_{i-1}} \right) \right)^2 \geq B \right\} \Delta 。 \tag{4}$$

则有限到期日离散定时器看涨期权定价表达式为两个因子的总和：

$$C_t = E_t\left[\mathrm{e}^{-r(\tau_B - t)} \max\left(S_{\tau_B} - K, 0 \right) \right] 1_{\{\tau_B < T\}} + \mathrm{e}^{-r(T-t)} \max\left(S_T - K, 0 \right) 1_{\{\tau_B \geq T\}}， \tag{5}$$

其中 K 为敲定价，r 为常数利率，E_T 为在风险中性测度 Q 下的期望。当 $B \to \infty$ 时，有限到期日离散定时器期权演变为欧式标准看涨期权。

标的资产过程和即时方差遵循随机波动方程：

$$\left(\mathrm{d}S_t / S_t \right) = \left(r - q \right) \mathrm{d}t + \sqrt{v_t}\, \mathrm{d}W_t^S，\quad \mathrm{d}v_t = \lambda\left(\bar{v} - v_t \right) \mathrm{d}t + \eta \sqrt{v_t}\, \mathrm{d}W_t^v， \tag{6}$$

其中 $E_t\left[\mathrm{d}W_t^S \mathrm{d}W_t^v \right] = \rho \mathrm{d}t$，$\rho$ 为一对布朗运动的相关系数，$q, \lambda, \bar{v}, \eta$ 分别为红利，均值回复的速率，方差平均水平，波动率过程的波动。对于随机波动模型(6)，我们定义连续实现方差为

$$I_t = \int_0^t v_s \mathrm{d}s， \tag{7}$$

为简化计算过程，设监控时间点为连续的。应用连续实现方差可得到相关变量的联合特征函数的显式表达。当前时间 $t_0 = 0$，定义 $\sigma_t = \ln v_t$ 和对数资产回报为 $x_t = \ln\left(S_t / K \right)$（$K$ 为敲定价）。在监控时间 $t_m, m = 0, 1, \cdots, N$，令 $V_{t_m}\left(x_{t_m}, \sigma_{t_m}, I_{t_m} \right)$ 为有限到期日离散定时器看涨期权的定价，其中 $x_{t_m}, \sigma_{t_m}, I_{t_m}$ 分别为对数资产回报、对数方差和实现方差，之所以选择对数方差而不是方差，是因为相应的条件密度函数具有两个优点相对于方差的条件密度函数：第一，对数方差的条件密度函数左尾衰减到零更快；第二，对数方差的条件密度函数的一些参数更对称。为了符号便利，$x_{t_m}, \sigma_{t_m}, I_{t_m}$ 分别写作 x_m, σ_m, I_m。定时器期权定价问题终值条件是

$$V_{t_N}\left(x_N, \sigma_N, I_N \right) = K\left(\mathrm{e}^{x_N} - 1 \right)^+ 1_{\{I_N \geq 0\}}。 \tag{8}$$

记作：

$$U_{t_m}\left(x_m, \sigma_m, I_m \right) = E_{t_m}\left(V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1}, \sigma_{m+1}, I_{m+1} \right) \right)， \tag{9}$$

则

$$V_{t_m}\left(x_m, \sigma_m, I_m \right) = \mathrm{e}^{-r\Delta} U_{t_m}\left(x_m, \sigma_m, I_m \right) 1_{\{I_m < B\}} + K\left(\mathrm{e}^{x_m} - 1 \right)^+ 1_{\{I_m \geq B\}}， \tag{10}$$

其中 $m = 1, 2, \cdots, N-1$。当连续实现方差不超过方差预算，期权定价为第一项，当连续实现方差超出方差预算，期权定价为收益函数 $K\left(\mathrm{e}^{x_m} - 1 \right)^+$，即第二项。

应用全期望公式，得到

$$U_{t_m}\left(x_m, \sigma_m, I_m \right) = E\left[E\left[V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1}, \sigma_{m+1}, I_{m+1} \right) \mid F_{t_m}, I_{m+1} \right] \mid F_{t_m} \right]。$$

外部期望积分是在条件密度函数 $p\left(I_{m+1} \mid I_m \right)$ 上的积分，在随机波动模型下有解析表达式。为了计算三重期望积分，本文内部积分应用 Fourier-cosine 方法。

3. Fourier-Cosine 方法

3.1. 应用 Fourier-Cosine 方法获得密度函数

随机波动方程(6)暗示了方差在未来时间是不依赖于当前时间的对数资产，因此有

$$p\left(x_t,v_t\mid x_s,v_s\right)=p\left(x_t\mid v_t,x_s,v_s\right)\cdot p\left(v_t\mid v_s\right),$$

记 $p(x,v)$ 为对数资产和方差的联合概率分布， $p(x)$ 为对数资产过程的概率密度函数，等价于

$$p\left(x_t,\sigma_t\mid x_s,\sigma_s\right)=p\left(x_t\mid \sigma_t,x_s,\sigma_s\right)\cdot p\left(\sigma_t\mid \sigma_s\right),$$

在 Heston 模型下，已知对数方差的概率密度函数 $p\left(\sigma_t\mid\sigma_s\right)$，还需知道 $p\left(x_t\mid\sigma_t,x_s,\sigma_s\right)$。它的特征函数为：

$$\begin{aligned}\varphi\left(\omega;x_s,\sigma_t,\sigma_t\right)&:=E_s\left[\exp\left(i\omega x_t\mid\sigma_t\right)\right]\\&=\exp\left(i\omega\left[x_s+\left(r-q\right)\left(t-s\right)+\frac{\rho}{\eta}\left(\mathrm{e}^{\sigma_t}-\mathrm{e}^{\sigma_s}-\lambda\overline{v}\left(t-s\right)\right)\right]\right)\\&\quad\cdot\Phi\left(\omega\left(\frac{\lambda\rho}{\eta}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}iw\left(1-\rho^2\right);\mathrm{e}^{\sigma_t},\mathrm{e}^{\sigma_s}\right)\end{aligned},\tag{11}$$

其中 $\Phi\left(u;v_t,v_s\right)$ 是方差时间的积分函数，后文将给出它的表达式。

COS 方法是建立在 Fourier-cosine 展开式之上，对于重新得到相应的特征函数的概率密度函数是非常有效的方法。COS 方法[8]的核心思想就是通过 Fourier-cosine 展开式，逼近标的资产概率密度函数。

首先，我们定义截断积分区域 $[a,b]\subset R$，有

$$\int_a^b p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\mathrm{d}y\le TOL_x\tag{12}$$

TOL_x 是预先设定的误差方差。在文献[6]中区间定义如下

$$[a,b]=\left[\xi_1-12\sqrt{\left|\xi_2\right|},\xi_1+12\sqrt{\left|\xi_2\right|}\right],\tag{13}$$

其中 ξ_n 为对数资产过程的 n 重累积量，在积分区域 $[a,b]$ 上满足(12)，通过 Fourier-cosine 展开式重新得到概率密度函数：

$$p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'P_n\left(\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\cos\left(n\pi\frac{x_{m+1}-a}{b-a}\right),\tag{14}$$

$\sum{}'$ 表示总和的第一个元素要乘以 $1/2$，系数 P_n 为 Fourier-Cosine 系数，定义如下：

$$P_n\left(\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right):=\frac{2}{b-a}\int_a^b p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\cos\left(n\pi\frac{x_{m+1}-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x_{m+1},\tag{15}$$

序列系数又与特征函数有直接的关系，可写为

$$P_n\left(\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\approx\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\left\{\varphi\left(\frac{2}{b-a};x_m,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)\mathrm{e}^{-in\pi\frac{a}{b-a}}\right\},\tag{16}$$

其中 $\varphi\left(\theta;x,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)$ 由(11)给出。

文献[7]中在区间 $[a,b]$ 足够宽， P_n 逼近式准确度高的条件下分析了逼近式的误差与 TOL_x 相关联。

根据傅里叶理论，cosine 序列函数属于 $\mathbb{C}^\infty\left([a,b]\subset R\right)$，有着非零导数、指数收敛。因此，序列系数截断 N 项，得到概率密度函数的逼近表达式：

$$p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)=\sum_{n=0}^{N-1}{}'\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\left\{\varphi\left(\frac{2}{b-a};0,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)\mathrm{e}^{-in\pi\frac{a}{b-a}}\right\}\cos\left(n\pi\frac{x_{m+1}-a}{b-a}\right)\tag{17}$$

其中 $\varphi\left(\omega;x_m,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)=\mathrm{e}^{i\omega x_m}\varphi\left(\omega;0,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)$。

3.2. 离散定价公式

利用高斯型积分公式计算外部期望积分，得到

$$U_{t_m}\left(x_m,\sigma_m,I_m\right)\approx\sum_{d=0}^{D-1}\alpha_d\,p\left(\delta_d\mid I_m\right)E\left[V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},I_{m+1}\right)\mid I_{m+1}=\delta_d\right] \tag{18}$$

α_d 为求积节点 $\delta_d\left(d=0,1,\cdots,D-1\right)$ 的权重，下一步，利用 Fourier-cosine 展开式来计算内部积分。$E\left[V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},I_{m+1}\right)\mid I_{m+1}=\delta_d\right]$ 是关于 x_{m+1},σ_{m+1} 的两重积分，联合密度函数为：

$$p\left(x_{m+1},\sigma_{m+1}\mid x_m,\sigma_m\right)=p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\cdot p\left(\sigma_{m+1}\mid\sigma_m\right)$$

则

$$\begin{aligned}&E\left[V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},I_{m+1}\right)\mid I_{m+1}=\delta_d\right]\\&=\iint_{R^2}V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},\delta_d\right)p\left(x_{m+1},\sigma_{m+1}\mid x_m,\sigma_m\right)\mathrm{d}x_{m+1}\mathrm{d}\sigma_{m+1}\\&=\iint_{R^2}V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},\delta_d\right)p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)p\left(\sigma_{m+1}\mid\sigma_m\right)\mathrm{d}x_{m+1}\mathrm{d}\sigma_{m+1}\end{aligned}$$

文献[10]给出了对数方差密度函数的适当截断区域，截断区域边界 $\left[a_v,b_v\right]$ 为

$$\left[a_v,b_v\right]=\left[\ln\left(E\left(v_t\right)\right)-\frac{5}{1-q},\ln\left(E\left(v_t\right)\right)+\frac{2}{1-q}\right]。 \tag{19}$$

令 $c\left(x_m,\sigma_m,t_m\right)=E\left[V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},\delta_d\right)\right]$，则

$$c\left(x_m,\sigma_m,t_m\right)=\int_{a_v}^{b_v}\int_a^b V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\sigma_{m+1},\delta_d\right)p\left(x_{m+1}\mid\sigma_{m+1},x_m,\sigma_m\right)\mathrm{d}x_{m+1}p\left(\sigma_{m+1}\mid\sigma_m\right)\mathrm{d}\sigma_{m+1}$$

因为 $p\left(\sigma_{m+1}\mid\sigma_m\right)$ 已知，对外部积分采用高斯型积分公式，则有

$$c\left(x_m,\sigma_m,t_m\right)=\sum_{j=0}^{N-1}w_j\,p\left(\zeta_j\mid\sigma_m\right)\int_a^b V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\zeta_j,\delta_d\right)p\left(x_{m+1}\mid\zeta_j,x_m,\sigma_m\right)\mathrm{d}x_{m+1} \tag{20}$$

其中 w_j 为求积节点 $\zeta_j,\left(j=0,1,\cdots,J-1\right)$ 的权重。

下一步，应用 COS 逼近式替代 $p\left(x_{m+1}\mid\zeta_j,x_m,\sigma_m\right)$，交换关于 x_{m+1} 的 n 个总和，得到：

$$c\left(x_m,\sigma_m,t_m\right)=\sum_{j=0}^{J-1}w_j{\sum_{n=0}^{\infty}}'\hat{V}_{n,j}\left(t_{m+1}\right)\mathrm{Re}\left\{\tilde{\varphi}\left(\frac{n\pi}{b-a},\zeta_j,\sigma_m\right)\mathrm{e}^{in\pi\frac{x_m-a}{b-a}}\right\}, \tag{21}$$

其中

$$\hat{V}_{n,j}\left(t_m\right):=\frac{2}{b-a}\int_a^b V_{t_{m+1}}\left(x_{m+1},\zeta_j,\delta_d\right)\cos\left(n\pi\frac{x_{m+1}-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x_{m+1}, \tag{22}$$

$$\tilde{\varphi}\left(\omega,\sigma_{m+1},\sigma_m\right)=p\left(\sigma_{m+1}\mid\sigma_m\right)\cdot\varphi\left(\omega,0,\mathrm{e}^{\sigma_{m+1}},\mathrm{e}^{\sigma_m}\right), \tag{23}$$

最后，交换(21)式中的总和，得到：

$$c\left(x_m,\sigma_m,t_m\right)=\mathrm{Re}\left\{{\sum_{n=0}^{N-1}}'\beta_n\left(\sigma_m,t_m\right)\mathrm{e}^{in\pi\frac{x_m-1}{b-a}}\right\}, \tag{24}$$

其中

$$\beta_n = \sum_{j=0}^{J-1} w_j \hat{V}_{n,j}\left(t_{m+1}\right)\tilde{\varphi}\left(\frac{n\pi}{b-a},\zeta_j,\sigma_m\right)。 \tag{25}$$

表达式(24)说明序列的参数只依赖于方差，不依赖对数资产。

对于固定的方差值 ζ_p，在任意的时间点，$c\left(x_m,\zeta_p,t_m\right)$ 表达式为

$$c\left(x_m,\zeta_p,t_m\right) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}{}' \beta_n\left(\zeta_p,t_m\right)\mathrm{e}^{in\pi\frac{x_m-1}{b-a}}\right\}, \tag{26}$$

其中

$$\beta_n\left(\zeta_p,t_m\right) = \sum_{j=0}^{J-1} w_j \hat{V}_{n,j}\left(t_{m+1}\right)\tilde{\varphi}\left(\frac{n\pi}{b-a},\zeta_j,\zeta_p\right)。 \tag{27}$$

对于 x_m，定价由 cosine 基本函数的线性联合，序列相关系数不依赖于 x_m 本身，所以，x_m 是可以从其它变量分离出来，保证得到序列系数的解析形式。

对于任意的 $x_m \in \mathbb{R}$，表达式(24)都成立。因此，我们可以应用牛顿法，通过提前实施，利用 $c\left(x_m,\zeta_j,t_m\right) - g\left(x_m\right) = 0, j = 0,1,\cdots,J-1$。其中 $g\left(x\right) = K\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^+$ 为终值条件。

首先，讨论终值点 t_M，期权定价在到期日等价于收益函数(不依赖于时间) $g\left(x\right) = K\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^+$，可得到 $\hat{V}_{n,j}\left(t_M\right)$ 的解析表达式(22)：

$$\hat{V}_{n,j}\left(t_M\right) = G_n\left(0,b\right) = \frac{2}{b-a}\int_0^b g\left(y\right)\cos\left(n\pi\frac{y-a}{b-a}\right)\mathrm{d}y \tag{28}$$

其中 G_n 函数为收益函数 $g\left(y\right)$ 的 cosine 系数，

$$G_n\left(l,u\right) = \frac{2}{b-a}K\left[\chi_k\left(l,u\right) - \psi_k\left(l,u\right)\right], \tag{29}$$

其中

$$\chi_k\left(l,u\right) = \int_l^u \mathrm{e}^x \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x, \tag{30}$$

$$\psi_k\left(l,u\right) = \int_l^u \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{d}x, \tag{31}$$

χ_k,ψ_k 有下列的解析表达式：

$$\begin{aligned}\chi_k\left(l,u\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2}\Bigg[&\cos\left(n\pi\frac{u-a}{b-a}\right)\mathrm{e}^u - \left[\cos\left(n\pi\frac{l-a}{b-a}\right)\mathrm{e}^l\right. \\ &\left.+\frac{n\pi}{b-a}\sin\left(n\pi\frac{u-a}{b-a}\right)\mathrm{e}^u - \frac{n\pi}{b-a}\sin\left(n\pi\frac{l-a}{b-a}\right)\mathrm{e}^l\right]\Bigg],\end{aligned} \tag{32}$$

$$\psi_k\left(l,u\right) = \begin{cases}\left[\sin\left(n\pi\frac{u-a}{b-a}\right) - \sin\left(n\pi\frac{l-a}{b-a}\right)\right]\frac{b-a}{n\pi}, n \neq 0 \\ u-l, n=0\end{cases} \tag{33}$$

COS 方法不仅仅用于标准期权，在文献[9]中，二元期权的 Fourier-cosine 解析解已经得到。因此，连续的收益函数也可以采用。

下一步，在时间点 t_{M-1}，$\hat{V}_{n,j}$ 代入到式(27)中，得到式子 $\beta_n\left(\zeta_p,t_{M-1}\right), p = 0,1,\cdots,J-1$。在时间点 t_{M-1}，

(26)式为$c\left(x_{M-1},\zeta_p,t_{M-1}\right)$。应用牛顿法，通过$c\left(y,\zeta_p,t_{M-1}\right)-g\left(y\right)=0$决定提早实施的点，相应的 cosine 的系数为：

$$\hat{V}_{k,p}\left(t_{M-1}\right)=\frac{2}{b-a}\int_0^b c\left(x_{M-1},\zeta_p,t_{M-1}\right)\cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right)\mathrm{d}y\text{，}\tag{34}$$

通过 COS 逼近式，(26)代入到(34)，交换积分和总和，得到：

$$\hat{V}_{k,p}\left(t_{M-1}\right)=\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}{}' M_{k,n}\left(0,b\right)\beta_n\left(\zeta_p,t_{M-1}\right)\right\},\tag{35}$$

其中

$$M\left(l,u\right)=\int_l^u \exp\left(in\pi\frac{y-a}{b-a}\right)\cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right)\mathrm{d}y\text{。}\tag{36}$$

表达式(36)可解析得到。

表达式$\hat{\boldsymbol{V}}\left(t_{M-1}\right)$可利用矩阵或向量的概念计算：

$$\hat{\boldsymbol{V}}\left(t_{M-1}\right)=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{M}\left(0,b\right)\boldsymbol{B}'\left(t_{M-1}\right)\right\},\tag{37}$$

其中B'表示矩阵B第一行元素乘以1/2。矩阵$\boldsymbol{M}\left(0,b\right)$是$N\times N$阶矩阵，元素$M_{k,n}\left(0,b\right)$组成，矩阵$\boldsymbol{B}\left(t_{M-1}\right)$是$N\times J$阶矩阵，$J$个列向量为：

$$\boldsymbol{B}\left(t_{M-1}\right)=\left[\boldsymbol{\beta}_0\left(t_{M-1}\right),\boldsymbol{\beta}_1\left(t_{M-1}\right),\cdots,\boldsymbol{\beta}_{J-1}\left(t_{M-1}\right)\right].\tag{38}$$

列向量$\boldsymbol{\beta}_\pi\left(t_{M-1}\right)$与系数$\hat{\boldsymbol{V}}\left(t_M\right)$相关联，表达如下：

$$\boldsymbol{\beta}_p\left(t_{M-1}\right)=\left[\hat{\boldsymbol{V}}\left(t_{M-1}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(\zeta_p\right)\right]\boldsymbol{w}\text{。}\tag{39}$$

其中$\boldsymbol{w}$为J维列向量，元素是积节点权重，矩阵$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(\zeta_p\right)$是$N\times J$阶矩阵，元素是$\tilde{\varphi}\left(\frac{n\pi}{b-a},\zeta_j,\zeta_p\right)$。算子“•”定义为矩阵与矩阵相乘。

从文献[11]可知矩阵$M\left(0,b\right)$可以写作汉克尔矩阵$\boldsymbol{M}_c\left(0,b\right)$和托普利茨矩阵$\boldsymbol{M}_s\left(0,b\right)$的和。

重复相同的计算过程，关于时间向后归纳，得到$\hat{\boldsymbol{V}}_{t_m}$到$\hat{\boldsymbol{V}}_{t_{m-1}}$的联系，对于

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_j\left(t_{m-1}\right)=\left[\hat{\boldsymbol{V}}\left(t_m\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(\zeta_j\right)\right]\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{B}\left(t_{m-1}\right)=\left[\boldsymbol{\beta}_0\left(t_{m-1}\right),\boldsymbol{\beta}_1\left(t_{m-1}\right),\cdots,\boldsymbol{\beta}_{J-1}\left(t_{m-1}\right)\right]\\ \hat{\boldsymbol{V}}\left(t_{m-1}\right)=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{M}\left(0,b\right)\boldsymbol{B}'\left(t_{m-1}\right)\right\}\end{cases}\tag{40}$$

$$m=M-1,M-2,\cdots,2\text{。}$$

继续此过程直到得到$\hat{V}\left(t_1\right)$，再代入(21)和(24)，得到期权定价$c\left(x_0,\zeta_p,t_0\right),j=0,1,\cdots,J-1$。再代入(18)，得到：

$$U_{t_0}\left(x_0,\zeta_p,I_0\right)=\sum_{d=0}^{D-1}\alpha_d p\left(\delta_d\mid I_0\right)c\left(x_0,\zeta_p,t_0\right)\text{。}\tag{41}$$

现在我们可以用样条插值得到$U_{t_0}\left(x_0,\sigma_0,t_0\right)$，则期权定价为：

$$V_{t_0}\left(x_0,\sigma_0,I_0\right)=\mathrm{e}^{-r\Delta}U_{t_0}\left(x_0,\sigma_0,I_0\right)\text{。}\tag{42}$$

下面总结向后归纳算法。

预备：

- 通过牛顿法找到 a_v 和 b_v （文献[9]）。
- 计算 $\hat{\boldsymbol{V}}(t_M)$，有着解析表达式(28).
- 预备矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\zeta_j), j=0,1,\cdots,J-1$。(由 $\tilde{\varphi}\left(\frac{n\pi}{b-a},\zeta_j,\zeta_p\right)$，定义如(23))

主要循环过程 为了得到 $\hat{\boldsymbol{V}}(t_m), m=M-1$到1。

- 通过牛顿法决定提前实施的点即 $c(y,\zeta_p,t_m)-g(y)=0$。
- 计算 M_s, M_c 的第一行和第一列。(如文献[10]中给出)
- 计算 $\boldsymbol{\beta}_j(t_m)=\left[\hat{\boldsymbol{V}}(t_{m+1})\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\zeta_j)\right]\boldsymbol{w}, j=0,1,\cdots,J-1$。
- $\boldsymbol{\beta}_j(t_m)$ 的第一个元素乘以1/2，得到 $\boldsymbol{\beta}'_j(t_m)$。
- 用 FFT 方法计算 $\hat{\boldsymbol{V}}(t_m)$ 的列向量，为 $\mathrm{Re}\{(\boldsymbol{M}_s+\boldsymbol{M}_c)\boldsymbol{\beta}'_j(t_{m-1})\}$

最后一步：计算 $c(x_0,\zeta_p,t_0)$，代入(18)得到 $U_{t_0}(x_0,\zeta_p,I_0)$。利用样条插值得到 $U_{t_0}(x_0,\sigma_0,I_0)$ 也就是 $V_{t_0}(x_0,\sigma_0,I_0)=\mathrm{e}^{-r\Delta}U_{t_0}(x_0,\sigma_0,I_0)$。

4. 数值模拟

4.1. Heston 模型

在 Heston 随机波动模型下，方差的动态定义如下：

$$\mathrm{d}v_t=\lambda(\bar{v}-v_t)\mathrm{d}t+\eta\sqrt{v_t}\mathrm{d}W_t^v$$

引入下列参数：

$$\nu=\frac{2\lambda\bar{v}}{\eta^2}-1,\ \xi=\frac{2\lambda}{\left[1-\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\eta^2\right]}。$$

$2\xi v_t\sim\chi^2\left(\nu,2\xi\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\right), 0<s<t$ 是卡方分布，因此 v_t 在 v_s 的条件下，概率密度函数为：

$$p(v_t\mid v_s)=\xi\,\mathrm{e}^{-\xi\left(v_s\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}+v_t\right)}\left(\frac{v_t}{v_s\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}\right)^{\frac{\nu}{2}}I_\nu\left(2\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda(t-s)}\sqrt{v_sv_t}\right), \tag{43}$$

其中 $I_\nu(\bullet)$ 是第一类贝塞尔函数，对数方差条件密度函数左尾相对于方差衰减更快。通过变量替换可以得到对数方差过程 σ_t 的条件密度函数：

$$p(\sigma_t\mid\sigma_s)=\xi\,\mathrm{e}^{-\xi\left(\mathrm{e}^{\sigma_s}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}+\mathrm{e}^{\sigma_t}\right)}\left(\mathrm{e}^{\sigma_t-\sigma_s}\,\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\right)^{\frac{\nu}{2}}\mathrm{e}^{\sigma_t}\,I_\nu\left(2\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda(t-s)}\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma_t}\,\mathrm{e}^{\sigma_s}}\right)。 \tag{44}$$

同样的，通过变量替换可得到累计方差过程 I_t 条件密度函数：

$$p(I_t\mid I_s)=\xi\,\mathrm{e}^{-\xi\left(I'_s\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}+I'_t\right)}\left(\frac{I'_t}{I'_s\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}\right)^{\frac{\nu}{2}}I''_tI_\nu\left(2\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda(t-s)}\sqrt{I'_sI'_t}\right), \tag{45}$$

Scott [11]利用傅里叶逆变换技术得到关于时间积分方差过程的条件特征函数的解析式：

Table 1. Parameter values in the Heston model and finite-maturity discrete timer options
表 1. 有限到期日离散定时器看涨期权的参数值

S_0	M	r	q	B	N	λ	η	$\bar{v}$	v_0	ρ
100	1.5	0.015	0	0.087	300	2	0.375	0.09	0.087	0

Table 2. Comparison of the numerical results for finite-maturity discrete timer call options for varying strike prices
表 2. 有限到期日离散定时器看涨期权对应不同的敲定价之间的比较

K	COS	$MC1$	$RE(\%)$	路径积分	$MC2$
90	17.5261	17.5551	−0.0320	17.5351	17.5330
100	12.2789	12.2909	−0.0120	12.2675	12.2678
110	8.3806	8.3634	0.0172	8.3393	8.3405

$$\Phi(\varsigma;\sigma_t,\sigma_s)=E\left[e^{i\varsigma\int_s^t v_\tau d\tau}\mid\sigma_t,\sigma_s\right]$$
$$=\frac{I_v\left(\sqrt{e^{\sigma_t}e^{\sigma_s}}\dfrac{4\tilde{\gamma}(\varsigma)e^{-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(\varsigma)(t-s)}}{\eta^2\left[1-e^{-\tilde{\gamma}(\varsigma)(t-s)}\right]}\right)}{I_v\left(\sqrt{e^{\sigma_t}e^{\sigma_s}}\dfrac{4\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda(t-s)}}{\eta^2\left[1-e^{-\lambda(t-s)}\right]}\right)}\frac{\tilde{\gamma}(\varsigma)e^{-\frac{1}{2}\left[\tilde{\gamma}(\varsigma)-\lambda\right](t-s)}\left[1-e^{-\lambda(t-s)}\right]}{\lambda\left[1-e^{-\tilde{\gamma}(\varsigma)(t-s)}\right]}$$
$$\times\exp\left(\frac{e^{\sigma_s}+e^{\sigma_t}}{\eta^2}\left\{\frac{\lambda\left[1+e^{-\lambda(t-s)}\right]}{1-e^{-\lambda(t-s)}}-\frac{\tilde{\gamma}(\varsigma)\left[1+e^{-\tilde{\gamma}(\varsigma)(t-s)}\right]}{1-e^{-\tilde{\gamma}(\varsigma)(t-s)}}\right\}\right), \tag{46}$$

其中 $\tilde{\gamma}(\varsigma)=\sqrt{\lambda^2-2i\eta^2\varsigma}$ 。

4.2. 数值结果

在 Heston 模型下，有限到期日离散定时器看涨期权的参数列在表 1。我们建立与[4]中相类似的数据，监控点 N 为离散定时器期权的参数，方差预算与 v_0 等价。

表 2 说明了建立在 Fourier-cosine 展开式上的数值结果与不同的敲定价来对比，同时与 Monte Carlo 方法($MC1$)的结果进行比较。文献[12]给出了有限到期日看涨定时器期权定价可以通过路径积分和相应的 Monte Carlo ($MC2$)得到的结果。

5. 总结

我们应用 Fourier-cosine 方法定价有限到期日离散定时器期权，定价过程的难度在于累计实现方差，而不是标的资产碰触到某一界限就执行。通过应用 Fourier-cosine 方法，定时器期权定价的数值结果与 Monte Carlo 方法的结果相差不大。Fourier-cosine 方法可以作为引用技术，它可以用于别的随机波动方程，比如像 Heston 随机波动模型，只要可以得到特征函数或变量的联合概率密度函数即可。

基金项目

国家自然基金面上项目(60875085)。

参考文献 (References)

[1] Bick, A. (1995) Quadratic-Variation-Based Dynamic Strategies. *Management Science*, **41**, 722-732. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.41.4.722

[2] Li, C. (2016) Bessel Processes, Stochastic Volatility, and Timer Options. *Mathematical Finance*, **26**, 122-148. http://dx.doi.org/10.1111/mafi.12041

[3] Bernard, C. and Cui, Z.Y. (2011) Pricing Timer Options. *Journal of Computational Finance*, **15**, 69-104. http://dx.doi.org/10.21314/JCF.2011.228

[4] Liang, L.Z.J., Lemmens, D. and Tempere, J. (2011) Path Integral Approach to the Pricing of Timer Options with the Duru-Kleinert Time Transformation. *Physical Review E*, **83**, 1-12. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056112

[5] Saunders, D. (2009) Pricing Timer Options under Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **17**, 737-753.

[6] Li, M. and Mercurio, F. (2014) Closed-Form Approximation of Perpetual Timer Option Prices. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **17**, Article ID: 1450026. http://dx.doi.org/10.1142/S0219024914500265

[7] Li, M. and Mercurio, F. (2015) Analytic Approximation of Finite-Maturity Timer Option Prices. *Journal of Futures Markets*, **35**, 245-273. http://dx.doi.org/10.1002/fut.21659

[8] Fang, F. and Oosterlee, C.W. (2008) A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 826-848. http://dx.doi.org/10.1137/080718061

[9] Fang, F. and Oosterlee, C.W. (2011) A Fourier-Based Valuation Method for Bermudan and Barrier Options under Heston's Model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **2**, 439-463. http://dx.doi.org/10.1137/100794158

[10] Fang, F. and Oosterlee, C.W. (2009) Pricing Early-Exercise and Discrete Barrier Options by Fourier-Cosine Series Expansions. *Numerische Mathematik*, **114**, 27-62. http://dx.doi.org/10.1007/s00211-009-0252-4

[11] Scott, L.O. (1996) Simulating a Multi-Factor Term Structure Model over Relatively Long Discrete Time Periods. *Proceedings of the IAFE First Annual Computational Finance Conference*, Graduate School of Business, Stanford University, Stanford.

[12] Zeng, P., Kwok, Y.K. and Zheng, W. (2015) Fast Hilbert Transform Algorithms for Pricing Discrete Timer Options under Stochastic Volatility Models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **18**, 1-25. http://dx.doi.org/10.1142/S0219024915500466