Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 459-463
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66062

Some Research on R-Semi-Topology Space

Minqian Jin, Peiyong Zhu

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: 812747388@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: Oct. 30th, 2016; accepted: Nov. 14th, 2016; published: Nov. 23rd, 2016

Abstract

Firstly, we explore the properties of point set on R-semi-topology space and then discuss the comparative theory of R-semi-topology. Finally separation properties of the R-semi-topology space are studied. Some theoretical results are obtained respectively in the above three aspects.

Keywords

R-Semi-Topology, R-Semi-Topology Base, Comparison of R-Semi-Topology

关于R-半拓扑空间的一些探究

靳敏倩，朱培勇

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 812747388@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期：2016年10月30日；录用日期：2016年11月14日；发布日期：2016年11月23日

摘　要

本文首先对R-半拓扑空间中点集的性质进行研究，然后对R-半拓扑的比较进行讨论，最后研究R-半拓扑空间的分离性质，并且在上述三个方面都分别获得了一些理论结果。

文章引用：靳敏倩，朱培勇．关于R-半拓扑空间的一些探究[J]．理论数学, 2016, 6(6): 459-463.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66062

关键词

R-半拓扑，R-半拓扑基，R-半拓扑的比较

1. 引言与预备知识

2002 年，匈牙利数学家 A. Csaszar 在文献[1]中引入了广义拓扑概念，他定义：集合 X 的一个子集族 λ 称为是一个广义拓扑，如果空集 $\phi\in\lambda$ 并且对于任何族 $\mathcal{G}\subset\lambda$ 有 $\bigcup\mathcal{G}\in\lambda$。不难看出：广义拓扑实际上是一个半拓扑。2015 年，文献[2]把广义拓扑称为上半拓扑，进而引入下半拓扑的概念，使得点集拓扑的一些性质得到了很好的推广。最近，文献[3]和文献[4]利用文献[2]的研究方法，将任意一个拓扑进行重新剖分为两个半拓扑，即左半拓扑与右半拓扑，并且分别记这两个半拓扑为 L-半拓扑与 R-半拓扑。同时，这两文献又从另一个角度推广了拓扑的概念，分别得到了 L-半拓扑空间和 R-半拓扑空间的一些研究结果。本文主要在文献[4]的基础上，对 R-半拓扑空间进行研究，主要讨论 R-半拓扑空间的点集性质、R-半拓扑基与 R-半拓扑的比较。

定义 1.1 [4]：设 X 是一个非空集合，λ 是 X 的一些子集构成的集族，如果下列条件被满足：

(O1) $\phi\in\lambda$；(O2) 若 $G_1,G_2\in\lambda$，则 $G_1\cap G_2\in\lambda$。

则称 λ 为集合 X 上的一个 R-半拓扑，并且称有序偶 (X,λ) 为一个 R-半拓扑空间，λ 中的每一个集合都称为 R-半拓扑空间 (X,λ) 的 R-开集。本文在不混淆的情况下，通常用 X 简记 (X,λ)。

定义 1.2 [4]：设 (X,λ) 为 R-半拓扑空间，$x\in X$，$U\subset X$，如果 $\exists G\in\lambda$，使得 $x\in G\subset U$，则称 U 为点 x 的一个 R-邻域。点 x 的邻域全体称为点 x 的 R-邻域系，记作 $\mathcal{U}(x)$，并称 $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}(x)\mid x\in X\}$ 为由拓扑 λ 导出的 X 的 R-邻域系。

定义 1.3 [4]：设 (X,λ) 为 R-半拓扑空间，$A\subset X$，$x\in A$，如果 $\exists U\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $U\subset A$，则称点 x 为点集 A 的 R-内点。点集 A 的 R-内点的全体称为 A 的 R-内部，记为 A_R^0 或 $\operatorname{int}A_R$。

此外，本文中所有没定义的关于 R-半拓扑空间的相关概念(例如子空间等)、术语和记号，如果没有特殊声明，都来自于文献[5]。

2. 关于 R-半拓扑空间的一些性质

根据文献[5]在一般拓扑空间中，有结论：A 为开集的充要条件是 $A=A^0$。但在 R-半拓扑空间中该结论不成立。

命题 2.1：设 X 是 R-半拓扑空间，$A\subset X$，若 A 为开集，则 $A=A^0$。反之，结论不成立。

证明：(1) 因为 A 为开集，对 $\forall x\in A$，$\exists G=A\in\lambda$，使得 $x\in G\subset A$，由 R-内点的定义可知 $x\in A^0$，所以 $A\subset A^0$；又显然有 $A^0\subset A$，故 $A=A^0$。

(2) 反之，可取 $X=\{a,b,c,d\}$，$\lambda=\{\phi,\{a\},\{a,c\},\{d\},\{a,d\}\}$，则 (X,λ) 是 R-半拓扑空间。又取 $A=\{a,c,d\}\subset X$，则对 $\forall\ x\in A$，$\exists G\in\lambda$，使得 $x\in G\subset A$。由 R-内点的定义，有 $x\in A^0$。因此 $A\subset A^0$；又 $A^0\subset A$，所以有 $A=A^0$。但 $A\notin\lambda$，因此 A 不是开集。

下面是与拓扑空间类似的两个结果：

命题 2.2：设 X 是 R-半拓扑空间，$A\subset Y\subset X$，如果 Y 是 X 的开子集，则 A 开于 Y 当且仅当 A 开于 X。

证明：(必要性) 设 A 开于 Y，存在 X 中开集 G 使得 $A=G\cap Y$，又因 Y 是 X 的开子集，则 $G\cap Y\in\lambda$，因此 A 是 X 中开集。

(充分性) 设 A 开于 X，则 $A\cap Y$ 开于 Y。而 $A\cap Y=A$，因此，A 开于 Y。

命题 2.3： 设 X 是一个 **R**-半拓扑空间，$A\subset Y\subset X$，则 $\mathrm{int}_X(A)=\mathrm{int}_Y(A)\cap\mathrm{int}_X(Y)$。

证明： 对于 $\forall x\in\mathrm{int}_X(A)$，因 $\exists U\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $x\in U\subset A$ 并且 $A\subset Y$，则 $\exists V=U\cap Y\in\mathcal{U}_Y(x)$ 使得 $x\in V\subset U\subset A$，故 $x\in\mathrm{int}_Y(A)$。又因 $W\in\mathcal{U}(x)$ 且 $U\subset Y$，则 $x\in\mathrm{int}_X(Y)$。所以，$x\in\mathrm{int}_Y(A)\cap\mathrm{int}_X(Y)$。

反过来，对于 $\forall x\in\mathrm{int}_Y(A)\cap\mathrm{int}_X(Y)$，则存在 $U\in\mathcal{U}_Y(x)$ 使得 $x\in U\subset A$ 并且存在 $V\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $x\in V\subset Y$。对于 $U\in\mathcal{U}_Y(x)$，又存在 $W\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $U=W\cap Y$，则存在 $O=V\cap W\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $O=(V\cap Y)\cap W=V\cap(W\cap Y)=V\cap U\subset A$。因此，$x\in\mathrm{int}_X(A)$。

从而，$\mathrm{int}_X(A)=\mathrm{int}_Y(A)\cap\mathrm{int}_X(Y)$。

3. 关于 R-半拓扑的比较

定义 3.1： 设 λ_1，λ_2 是 X 上的两个 **R**-半拓扑，如果 $\lambda_1\subset\lambda_2$，则称 λ_1 是比 λ_2 更粗的 **R**-半拓扑，或称 λ_2 是比 λ_1 更细的 **R**-半拓扑。

命题 3.1： 设 λ_1，λ_2 是 X 上的两个 **R**-半拓扑，$\mathcal{F}_{\lambda_1}$ 和 $\mathcal{F}_{\lambda_2}$ 分别是关于 λ_1 与 λ_2 的全体闭集构成的集族，则 λ_1 是比 λ_2 更粗的 **R**-半拓扑当且仅当 $\mathcal{F}_{\lambda_1}\subset\mathcal{F}_{\lambda_2}$。

证明： (必要性) $\forall F\in\mathcal{F}_{\lambda_1}$，有 $X-F\in\lambda_1$，因 $\lambda_1\subset\lambda_2$，则 $X-F\in\lambda_2$，故 $X-(X-F)=F\in\mathcal{F}_{\lambda_2}$，从而，$\mathcal{F}_{\lambda_1}\subset\mathcal{F}_{\lambda_2}$。

(充分性) 对于 $\forall G\in\lambda_1$，有 $X-G\in\mathcal{F}_{\lambda_1}$，因 $\mathcal{F}_{\lambda_1}\subset\mathcal{F}_{\lambda_2}$，则 $X-G\in\mathcal{F}_{\lambda_2}$。故 $X-(X-G)=G\in\lambda_2$，因此，$\lambda_1\subset\lambda_2$，$\lambda_1$ 是比 λ_2 更粗的 **R**-半拓扑。

众所周知，在一般拓扑学中有定理[5]：如果 $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，则 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$ 当且仅当 $\forall x\in X$，有 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。下面证明：这定理在 **R**-半拓扑空间中不成立：

命题 3.2： :设 λ_1，λ_2 是 X 上的两个 **R**-半拓扑，若 $\lambda_1\subset\lambda_2$，则 $\forall x\in X$，有 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。反之，结论不真。

证明： (1) 设 $\lambda_1\subset\lambda_2$，对于 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_1(x)$，$\exists G\in\lambda_1$，使得 $x\in G\subset U$。因为 $\lambda_1\subset\lambda_2$，则 $G\in\lambda_2$ 并且 $x\in G\subset U$，故 $U\in\mathcal{U}_2(x)$，所以 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。

(2) 反之，可取 $X=\{a,b\}$，$\lambda_1=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，$\lambda_2=\{\phi,\{a\},\{b\}\}$，则 λ_1，λ_2 是 X 上的两个 R-半拓扑，由 R-邻域的定义，有

$$\mathcal{U}_1(a)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\mathcal{U}_2(a),\quad \mathcal{U}_1(a)=\{\{b\},\{a,b\}\}=\mathcal{U}_2(b)$$

因此，对于 $\forall x\in X$，有 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。但是，$\lambda_1\not\subset\lambda_2$。

4. R-半拓扑基

定义 4.1： 设 (X,λ) 是 R-半拓扑空间，$\mathcal{B}\subset\lambda$，如果 $\forall G\in\lambda$，存在 $\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{B}$，使得 $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，则称 $\mathcal{B}$ 为 R-半拓扑 λ 的一个基，也称 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个 R-半拓扑基。

命题 4.1： 设 (X,λ) 是 R-半拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 R-半拓扑 λ 的一个基当且仅当 $\forall G\in\lambda$，$\forall x\in G$，$\exists B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset G$。

证明： (必要性) 设 $\mathcal{B}$ 为 R-半拓扑 λ 的一个基，即 $\forall G\in\lambda$，存在 $\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{B}$，使得 $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，故 $\forall x\in G$，$\exists\lambda_0\in\Lambda$，使得 $x\in B_{\lambda_0}\subset G$。

(充分性) $\forall G\in\lambda$，若 $G=\phi$，则 $\exists B_G=\phi\subset\mathcal{B}$，使 $G=\bigcup B_G$；若 $G\neq\phi$，因为 $\forall x\in G$，$\exists B_x\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$。故 $G=\bigcup_{x\in\Lambda}B_x$。由 R-半拓扑基的定义知：$\mathcal{B}$ 为 λ 的一个基。

在一般拓扑空间中，有如下结论：

设 (X,λ) 是拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 λ 的一个基，则 $\mathcal{B}$ 满足下面两个条件：(1) $\bigcup\mathcal{B}=X$；(2) $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}$，

$\forall x \in B_1 \cap B_2$，$\exists B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$。但在 R-半拓扑空间中，上述条件（1）$\bigcup \mathcal{B} = X$ 不一定成立。

例如：可取 $X = \{a,b,c,d\}$，则 $\lambda = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$，$\mathcal{B} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，但 $\bigcup \mathcal{B} \neq X$。

5. R-半拓扑空间的分离性质

现在，类比一般拓扑空间的分离性质引入 R-半拓扑空间的分离性质：

定义 5.1： 设 (X,λ) 是一个 R-半拓扑空间，且 X 中的任意一点都有包含它的邻域存在。

(1) 称 X 是 R-T_0 的，如果 $\forall x,y \in X$，$x \neq y$，$\exists U \in \mathcal{U}(x)$ 使得 $y \notin U$，或者 $\exists V \in \mathcal{U}(y)$ 使得 $x \notin V$。

(2) 称 X 是 R-T_1 的，如果 $\forall x,y \in X$，$x \neq y$，$\exists U \in \mathcal{U}(x)$，$\exists V \in \mathcal{U}(y)$ 使得 $y \notin U$ 并且 $x \notin V$。

(3) 称 X 是 R-T_2 的，如果 $\forall x,y \in X$，$x \neq y$，$\exists U \in \mathcal{U}(x)$，$\exists V \in \mathcal{U}(y)$ 使得 $U \cap V = \phi$。

定理 5.1： R-半拓扑空间 X 为 R-T_0 空间当且仅当任意 $x,y \in X$，若 $x \neq y$，则 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$。

证明： (必要性) 设 X 为 R-T_0 空间，任意 $x,y \in X$，$x \neq y$。由 T_0 公理，不妨设存在 $U \in \mathcal{U}(x)$，使得 $y \notin U$，即 $y \in U^c$ 闭于 X，故 $\overline{\{y\}} \subset U^c = X \setminus U$，因此 $x \notin \overline{\{y\}}$，从而 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$。

(充分性) 任意 $x,y \in X$，$x \neq y$，因 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$，则 $\overline{\{x\}} \not\subset \overline{\{y\}}$ 或 $\overline{\{y\}} \not\subset \overline{\{x\}}$。不失一般性，设 $\overline{\{x\}} \not\subset \overline{\{y\}}$，即存在 $z \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$。下证 $x \notin \overline{\{y\}}$。从而存在 $U = X \setminus \overline{\{y\}} \in \mathcal{U}(x)$，有 $y \notin U$。事实上，若 $x \in \overline{\{y\}}$，则 $\{x\} \subset \overline{\{y\}}$，因此 $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$，于是 $z \in \overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$。这与 $z \notin \overline{\{y\}}$ 矛盾。

定理 5.2： 若 **R**-半拓扑空间 X 中每个单点集都是闭集，则 X 是 R-T_1 空间。

证明： 任意 $x,y \in X$，$x \neq y$。因为 $\{x\}$ 是闭集，则 $X \setminus \{x\}$ 为开集，并且

$$x \notin X \setminus \{x\} = V \in \mathcal{U}(y),$$

又因为 $y \notin X \setminus \{y\} = U \in \mathcal{U}(x)$。故 X 为 T_1 空间。 □

在一般拓扑学中，定理 5。2 的逆命题也成立，但在 **R**-半拓扑中却不成立，反例如下:

取 $X = \{a,b,c\}$，$\lambda = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\}\}$。容易验证 (X,λ) 是一个 R-T_1 空间，但存在 X 中的单点集 $\{a\}$ 不是闭集。

定理 5.3： R-半拓扑空间 X 是 R-T_2 空间当且仅当 X 中每个收敛网有唯一极限。

证明： (必要性)反证。若 X 中存在一个收敛网 $\{x_\delta\}_{\delta \in S}$ 有两个极限点 x_0 与 y_0 并且 $x_0 \neq y_0$。由 X 的 T_2 性，存在 $U \in \mathcal{U}(x_0)$，存在 $V \in \mathcal{U}(y_0)\arcsin\theta$，使得 $U \cap V = \phi$。因为 $x_\delta \to x_0$，故存在 $\delta_U \in S$，使得任意 $\delta \succ \delta_U$，有 $x_\delta \in U$。又因 $x_\delta \to y_0$，故存在 $\delta_V \in S$，使得任意 $\delta \succ \delta_V$，有 $x_\delta \in V$。再由 S 的定向性，存在 $\delta^* \in S$，使得 $\delta^* \succ \delta_U$ 且 $\delta^* \succ \delta_V$。因此，任意 $\delta \succ \delta^*$，有 $x_\delta \in U \cap V$。这与 $U \cap V = \phi$ 矛盾。从而 $\{x_\delta\}_{\delta \in S}$ 有唯一的极限点。

(充分性) 反证。若 X 不是 T_2 空间，即存在 $x,y \in X : x \neq y$，使得任意 $U \in \mathcal{U}(x)$，任意 $V \in \mathcal{U}(y)$，有 $U \cap V \neq \phi$。取 $x_{(U,V)} \in U \cap V$，并且定义 $\Delta = \{(U,V) \mid U \in u(x), V \in u(y)\}$。

又在 Δ 中定义半序"$\prec$"：$(U_1,V_1) \prec (U_2,V_2)$ 当且仅当 $U_1 \supset U_2$ 且 $V_1 \supset V_2$。则 $(\Delta,\prec)$ 是一个定向集。$\{x_{(U,V)}\}_{(U,V)\in\Delta}$ 为 X 中的一个网。

现在证：$x_{(U,V)} \to x$ 并且 $x_{(U,V)} \to y$。

事实上，$\forall U^* \in \mathcal{U}(x)$，取 $V^* \in \mathcal{U}(y)$，则 $(U^*,V^*) \in \Delta$。对于 $\forall (U,V) \in \Delta$，当 $(U,V) \succ (U^*,V^*)$ 时，有 $x_{(U,V)} \in U \cap V \subset U \subset U^*$。因此 $x_{(U,V)} \to x$。同理可证，$x_{(U,V)} \to y$。

定义 5.2： 设 (X,λ) 是一个 R-半拓扑空间，且 X 中的任意一点都有包含它的邻域存在。

(1) 称 X 是 R-半正则的，如果 $\forall x \in X$，$\forall F$ 闭于 X，若 $x \notin F$，则 $\exists U \in \mathcal{U}(x)$，$\exists V \in \mathcal{U}(F)$，使得

$U\cap V=\phi$。

(2) 称 X 是 R-半正规的，如果 $\forall F_1,F_2$ 闭于 X，若 $F_1\cap F_2=\phi$，则 $\exists U\in\mathcal{U}(F_1)$，$\exists V\in\mathcal{U}(F_2)$ 使得 $U\cap V=\phi$。

定理 5.4：R-半拓扑空间 X 是正则的当且仅当 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}(x)$，使得 $\bar{V}\subset U$。

证明：(必要性)设 $x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}(x)$，存在开集 $G\subset X$，使得 $x\in G\subset U$。记 $F=G^c$，则 F 闭于 X 并且 $x\notin F$。由 X 的正则性，$\exists$ 开集 $V_1\in\mathcal{U}(x)$，$\exists$ 开集 $V_2\in\mathcal{U}(F)$，使得 $V_1\cap V_2=\phi$。则 $V_1\subset V_2^c$。因而，$\exists V=V_1\in\mathcal{U}(x)$，使得 $x\in V\subset\bar{V}\subset V_2^c\subset X\setminus F=G\subset U$

(充分性) 设 $x\in X$，F 闭于 X 并且 $x\notin F$。令 $U=F^c$，则开集 $U\in\mathcal{U}(x)$。由假设，$\exists V\in\mathcal{U}(x)$ 使得 $x\in V\subset\bar{V}\subset U=F^c=X\setminus F$。令 $W=\bar{V}^c$，则

$$F=X\setminus(X\setminus F)\subset X\setminus\bar{V}=W$$

因此 $V\in\mathcal{U}(x)$，$W\in\mathcal{U}(F)$ 且 $W\cap V=(X\setminus\bar{V})\cap V=\phi$。从而 X 是正则的。

6. 小结

本文在文献[4]的基础上进一步探究右半拓扑即 R-半拓扑空间的性质，得到了 R-半拓扑空间的一些结论以及 R-半拓扑的比较与 R-半拓扑基的一些结果。进而，丰富了 R-半拓扑空间理论。同时，给出反例说明有些在一般拓扑中成立的命题在 R-半拓扑中却不成立。

参考文献 (References)

[1] Csaszar, A. (2002) Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, **96**, 351-357. http://dx.doi.org/10.1023/A:1019713018007

[2] 胡西超，朱培勇. 一类新型半拓扑空间及其分离性质[J]. 理论数学, 2015, 5(4): 129-135.

[3] 陈道富，钟建，朱培勇. 关于 L-半拓扑空间的一些注记[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 272-277.

[4] 钟健，陈道富，朱培勇. 关于 R-半拓扑空间的一些结果[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 217-222.

[5] 朱培勇，雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京：科学出版社, 2009: 33-43.