Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(2), 68-71
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72010

A Strong Limit Theorem of M-Value Random Sequences on Moving Average

Honghong Qu, Aihua Fan*

School of Mathematics & Physics Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: *fah@ahut.edu.cn

Received: Mar. 4th, 2017; accepted: Mar. 20th, 2017; published: Mar. 23rd, 2017

Abstract

By using the classical Borel-Cantelli lemma, we obtain a general founded strong limit theorem for M-value random sequences on moving average. It is noticeable that the conclusion in this paper has no requirement of the random variables.

Keywords

M-Value Random Sequence, Strong Limit Theorem

M值随机序列滑动平均的一个强极限定理

屈红红，范爱华

安徽工业大学数理科学与工程学院，安徽 马鞍山
Email: *fah@ahut.edu.cn

收稿日期：2017年3月4日；录用日期：2017年3月20日；发布日期：2017年3月23日

摘 要

利用***Borel-Cantelli***引理得到一个对**M-**值随机序列普遍成立的滑动平均的强极限定理。值得注意的是，本文中的结论对随机变量的相依性无任何要求。

关键词

M-值随机序列，强极限定理

*通讯作者。

文章引用：屈红红，范爱华. M 值随机序列滑动平均的一个强极限定理[J]. 理论数学, 2017, 7(2): 68-71.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72010

1. 引言

强极限定理是概率论极限理论中一个极其重要的方向。二十世纪六十年代，独立随机序列的极限理论在 Gnegenko 和 Kolmogrove 等学者的共同努力下获得了完善的发展。此后，各种混和随机序列、相依随机序列，以及鞅的理论有了很大发展，其主要成果可参考文献[1] [2] [3]及其序列文献。我国学者在这方面也做出了许多出色的工作，在国际上也有一定的影响，参见[4]。本文得到一个对 M 值随机序列滑动平均普遍成立的强极限定理，推广了[5]中的结果。值得注意的是，本文中的结论对随机变量的相依性没有任何要求。

定义 设$\{X_n, n\ge 1\}$是定义在概率空间(Ω, F, P)上的一随机序列，其联合分布为

$$P(X_1 = x_1,\cdots,X_n = x_n) = p(x_1,\cdots,x_n), x_i \in S = \{1,\cdots,m\}, \tag{1}$$

称$\{X_n, n\ge 1\}$为 M 值随机序列。

2. 主要结论

引理[6] 设$g(x_1,\cdots,x_n), h(x_1,\cdots,x_n)$是概率空间$(\Omega,F,P)$上的两个概率函数，$f(n), n\ge 1$是列单调递增的取整数值序列，且$f(n)=O(n)$。令

$$R_{n,f(n)}(\omega) = \frac{g\left(x_n,\cdots,x_{n+f(n)}\right)}{h\left(x_n,\cdots,x_{n+f(n)}\right)},$$

则

$$\limsup_n \frac{1}{f(n)} \log R_{n,f(n)}(\omega) \le 0 \quad \text{a.s.}$$

定理 设$\{X_n, n\ge 1\}$是由(1)定义的 r.v.序列，$f(n), n\ge 0$满足引理的条件。记$S_{n,f(n)} = \sum_{k=n+1}^{n+f(n)} X_k$，则

$$\limsup_n \frac{S_{n,f(n)}}{f(n)} \le \limsup_n \sum_{k=n+1}^{n+f(n)} \frac{1}{f(n)} E\left(X_k \middle| X_n,\cdots,X_{k-1}\right) \quad \text{a.s.} \tag{2}$$

$$\liminf_n \frac{S_{n,f(n)}}{f(n)} \ge \liminf_n \sum_{k=n+1}^{n+f(n)} \frac{1}{f(n)} E\left(X_k \middle| X_n,\cdots,X_{k-1}\right) \quad \text{a.s.} \tag{3}$$

证 设$\lambda \ne 0$，定义函数如下：

$$r\left(x_n, x_{n+1},\cdots,x_{n+f(n)}\right) = \frac{\exp\left\{\lambda \sum_{k=n+1}^{n+f(n)} x_k\right\} p(x_n,\cdots,x_{n+f(n)})}{\prod_{k=n+1}^{n+f(n)} \sum_{l=1}^{m} e^{\lambda x_k} p\left(l \middle| x_n,\cdots,x_{k-1}\right)} \tag{4}$$

易知，$\sum_{x_n,\cdots,x_{n+f(n)}\in S} r\left(x_n,\cdots,x_{n+f(n)}\right) = 1$

令

$$L_{n,f(n)}(\omega)=\frac{r\left(X_n,\cdots,X_{n+f(n)}\right)}{p\left(X_n,\cdots,X_{n+f(n)}\right)}, \tag{5}$$

由引理，知

$$\limsup_n \frac{1}{f(n)}\log L_{n,f(n)}(\omega)\le 0 \quad \text{a.s..} \tag{6}$$

由(4)，(5)，(6)有

$$\frac{1}{f(n)}\log L_{n,f(n)}(\omega)=\frac{\lambda}{f(n)}S_{n,f(n)}-\frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\log E\left(\mathrm{e}^{\lambda X_k}\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right) \quad \text{a.s..}$$

取 $\lambda>0$ 并使 $\lambda\to 0$，由 $\mathrm{e}^{\lambda X_k}=1+\lambda X_k+o(\lambda)$ 及不等式 $\log(1+x)\le x\,(x\ge -1)$ 和(6)式，有

$$\begin{aligned}
\limsup_n \frac{S_{n,f(n)}}{f(n)} &\le \limsup_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\log E\left[1+\lambda X_k+o(\lambda)\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right]\\
&=\limsup_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\log\left[1+\lambda E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\right]\\
&\le \limsup_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\left[\lambda E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\right]\\
&=\limsup_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\\
&=\limsup_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right) \quad \text{a.s.,}
\end{aligned}$$

故(2)式成立。取 $\lambda<0$ 并使 $\lambda\to 0$，由(6)式，有

$$\begin{aligned}
\liminf_n \frac{S_{n,f(n)}}{f(n)} &\ge \liminf_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\log E\left[1+\lambda X_k+o(\lambda)\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right]\\
&=\liminf_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\log\left[1+\lambda E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\right]\\
&\ge \liminf_n \frac{1}{f(n)\lambda}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}\left[\lambda E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\right]\\
&=\liminf_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}E\left[\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right)+o(\lambda)\right]\\
&=\liminf_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}E\left(X_k\middle|X_n,\cdots,X_{k-1}\right) \quad \text{a.s.,}
\end{aligned}$$

故(3)式成立，定理证毕。

推论 1 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是一列取值于 S 的独立随机变量序列，则

$$\limsup_n \frac{S_{n+1,n+f(n)}}{f(n)}\le \limsup_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}EX_k \quad \text{a.s.}$$

$$\liminf_n \frac{S_{n+1,n+f(n)}}{f(n)}\ge \liminf_n \frac{1}{f(n)}\sum_{k=n+1}^{n+f(n)}EX_k \quad \text{a.s.}$$

推论 2 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是一列取值于 S 的独立同分布随机变量序列，则

$$\lim_{n} \frac{S_{n,f(n)}}{f(n)} = EX_1 \qquad \text{a.s.}$$

基金项目

安徽工业大学研究生创新基金资助(2015130)。

参考文献 (References)

[1] 陆传荣, 林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] 郡启满. 关于 ρ-混合序列的完全收敛性[J]. 数学学报, 1989, 32(3): 377-393.

[3] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率论极限理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[4] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[5] 汪忠志. 关于 M 值随机序列的一个普遍成立的强大数定理[J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(4): 327-333.

[6] 汪忠志, 杨卫国. 关于随机序列滑动平均的若干强偏差定理[J]. 系统科学与数学, 2011, 28(5): 702-707.