Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(2), 72-77
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72011

A Note on the Holomorphic Automorphism Group of a Product $B^m \times B^n$ of the Unit Balls

Huan Fu, Die Chen, Yonghong Zhang, Zhiming Feng*

School of Mathematical and Information Sciences, Leshan Normal University, Leshan Sichuan
Email: *fengzm2008@163.com

Received: Mar. 11th, 2017; accepted: Mar. 27th, 2017; published: Mar. 30th, 2017

Abstract

Let B^m be the unit ball in the m dimensional complex Euclidean space C^m, in this paper using the Bergman metric of $B^m \times B^n$ and irreducibility of a polynomial $1-\|z\|^2$, we obtain the holomorphic automorphism group of a product $B^m \times B^n$ of the unit balls again.

Keywords

Holomorphic Automorphisms, Bergman Metric Matrices, Unit Balls

关于单位球的乘积$B^m \times B^n$的全纯自同构群的注记

付　欢，陈　谍，张永红，冯志明*

乐山师范学院数学与信息科学学院，四川 乐山
Email: *fengzm2008@163.com

收稿日期：2017年3月11日；录用日期：2017年3月27日；发布日期：2017年3月30日

摘　要

设B^m是m维复欧式空间C^m的单位球，本文利用$B^m \times B^n$的Bergman度量方阵和实多项式$1-\|z\|^2$的不可

*通讯作者。

文章引用: 付欢, 陈谍, 张永红, 冯志明. 关于单位球的乘积 $B^m \times B^n$ 的全纯自同构群的注记[J]. 理论数学, 2017, 7(2): 72-77. https://doi.org/10.12677/pm.2017.72011

约性，重新得到了单位球的乘积 $B^m \times B^n$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\left(B^m \times B^n\right)$。

关键词

全纯自同构，Bergman度量矩阵，单位球

1. 引言

设 m,n 为正整数， m 维复欧氏空间 C^m 的单位球 B^m 和单位球 B^m 与 B^n 的乘积分别定义为

$$B^m = \left\{ z = \left(z_1,\cdots,z_m\right) \in C^m : \|z\|^2 = \sum_{j=1}^m \left|z_j\right|^2 < 1 \right\}, \tag{1.1}$$

$$B^m \times B^n = \left\{ z = \left(z,w\right) \in C^{m+n} : z \in B^m, w \in B^n \right\}, \tag{1.2}$$

这里"$\mathrm{Aut}\left(B^m\right)$"为域 B^m 的全纯自同构群，即 B^m 的双全纯自映射按映射符合运算构成的群，同样 $\mathrm{Aut}\left(B^m \times B^n\right)$ 表示域 $B^m \times B^n$ 的全纯自同构群。

对 B^m 的自同构群，有以下熟知的结果，其证明细节可参考[1]和[2]。

引理 1.1 设 $\psi \in \mathrm{Aut}\left(B^m\right)$，则存在唯一的 $a \in B^m$ 和唯一的 m 阶酉矩阵 U ，使得

$$\psi\left(z\right) = \psi_a\left(z\right)U, z \in B^m \tag{1.3}$$

其中

$$\psi_a\left(z\right) = \frac{a - z\left(\sqrt{1-\|a\|^2} I_m + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\|a\|^2}} a^{\dagger} a\right)}{1 - z a^{\dagger}}, \tag{1.4}$$

这里符号 I_m 表示 m 阶单位矩阵， $a^{\dagger}$ 表示 a 的共轭转置。

对单位球的乘积的自同构群有许多研究，如[3]和[4]，在本文中我们使用[5]和[6]的方法，即用 Bergman 核和 Bergman 度量方阵在全纯自同构下的变换公式重新证明了以下定理 1.2，在证明中还使用了实多项式 $1-\|z\|^2$ 在实数域上的多元多项式环上是不可约这一性质。

定理 1.2 设 $F \in \mathrm{Aut}\left(B^m \times B^n\right)$，则存在 $\psi_1 \in \mathrm{Aut}\left(B^m\right)$， $\psi_2 \in \mathrm{Aut}\left(B^n\right)$，使得

i) 当 $m \neq n$ 时，有

$$F\left(z,w\right) = \left(\psi_1\left(z\right),\psi_2\left(w\right)\right),\left(z,w\right) \in B^m \times B^n, \tag{1.5}$$

即

$$\mathrm{Aut}\left(B^m \times B^n\right) = \mathrm{Aut}\left(B^m\right) \times \mathrm{Aut}\left(B^n\right).$$

ii) 当 $m = n$ 时，有

$$F\left(z,w\right) = \left(\psi_1\left(z\right),\psi_2\left(w\right)\right),\left(z,w\right) \in B^m \times B^m, \tag{1.6}$$

或

$$F(z,w)=(\psi_2(w),\psi_1(z)),(z,w)\in B^m\times B^m, \tag{1.7}$$

即

$$\mathrm{Aut}(B^m\times B^n)=(\mathrm{Aut}(B^m)\times\mathrm{Aut}(B^m))\times S_2,$$

这里 S_2 表示二阶置换群。

2. 定理 1.2 的证明

在定理 **1.2** 的证明过程中，我们要用到 B^m 的 Bergman 核以及 Bergman 度量方阵，为方便我们先叙述这些结论，其证明细节可参考[2]，[7]和[8]。

引理 2.1 单位球 B^m 的 Bergman 核可表示为

$$K_{B^m}(z;\bar{z})=\frac{m!}{\pi^m}\frac{1}{\left(1-\|z\|^2\right)^{m+1}},$$

于是 Bergman 度量方阵为

$$\frac{\partial^2 K_{B^m}}{\partial z^t\partial\bar{z}}(z;\bar{z})=(1+m)\left\{\frac{I_m}{1-\|z\|^2}+\frac{1}{\left(1-\|z\|^2\right)^2}z^{\dagger}z\right\},$$

这里符号 $\frac{\partial^2 K_{B^m}}{\partial z^t\partial\bar{z}}$ 表示矩阵 $\left(\frac{\partial^2 K_{B^m}}{\partial_{z_i}\partial_{\bar{z}_j}}\right)_{i,j=1}^m$。

定理 1.2 的证明

令 $D=B^m\times B^n$，设 F 是 D 到 D 的全纯自同构，则 $\exists(u,v)\in B^m\times B^n$，使得 $F(u,v)=(0,0)$。仿(1.4)构造 $\varphi_u(z)$ 和 $\varphi_v(w)$，则 $\varphi_u:B^m\to B^m$ 是 B^m 的自同构，$\varphi_v:B^n\to B^n$ 是 B^n 的自同构。定义

$$G:(z,w)\in B^m\times B^n\mapsto(\varphi_u(z),\varphi_v(w))\in B^m\times B^n,$$

则 G 为 $B^m\times B^n$ 的自同构，且 $G(u,v)=(0,0)$。

定义 $H=F\circ G^{-1}$，则 $H(0,0)=F\circ G^{-1}(0,0)=F(u,v)=(0,0)$，这表明 H 是把 $D=B^m\times B^n$ 的原点映为原点的自同构。

由 Cartan 定理得 H 为线性可逆映射，即

$$H(z,w)=(z,w)A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}.$$

又由 Bergman 核变换公式[8]

$$K_{B^m\times B^n}(Z;\bar{Z})=|JH|^2K_{B^m\times B^n}\left(H(Z);\overline{H(Z)}\right),$$

以及 $\mathrm{JH}=\frac{\partial H}{\partial Z^t}=A$ 得

$$K_{B^m\times B^n}\left(Z;\overline{Z}\right)=\left|detA\right|^2 K_{B^m\times B^n}\left(0;0\right).$$

这表明$\left|detA\right|^2=1$，这里$detA$表示A的行列式，于是

$$K_{B^m\times B^n}\left(Z;\overline{Z}\right)=K_{B^m\times B^n}\left(H\left(Z\right);\overline{H\left(Z\right)}\right), \tag{2.1}$$

这里$Z=\left(z,w\right)\in B^m\times B^n$。

令$H\left(Z\right)=\left(H_1\left(Z\right),H_2\left(Z\right)\right)$，因$B^m\times B^n$的 Bergman 核为

$$K_{B^m\times B^n}\left(z,w:\overline{z},\overline{w}\right)=K_{B^m}\left(z:\overline{z}\right)\times K_{B^n}\left(w;\overline{w}\right)=\frac{m!n!}{\pi^{m+n}}\frac{1}{\left(1-\|z\|^2\right)^{1+m}}\frac{1}{\left(1-\|w\|^2\right)^{1+n}}. \tag{2.2}$$

于是得

$$\left(1-\|z\|^2\right)^{1+m}\left(1-\|w\|^2\right)^{1+n}=\left(1-\|H_1\left(Z\right)\|^2\right)^{1+m}\left(1-\|H_2\left(Z\right)\|^2\right)^{1+n}. \tag{2.3}$$

由(2.2)有

$$\frac{\partial^2\ln K_{B^m\times B^n}}{\partial Z^t\partial\overline{Z}}\left(Z;\overline{Z}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\ln K_{B^m}}{\partial Z^t\partial\overline{Z}}\left(z;\overline{z}\right) & 0\\ 0 & \frac{\partial^2\ln K_{B^n}}{\partial w^t\partial\overline{w}}\left(w;\overline{w}\right)\end{pmatrix},$$

又因

$$\frac{\partial^2\ln K_{B^m\times B^n}\left(H\left(Z\right);\overline{H\left(Z\right)}\right)}{\partial Z^t\partial\overline{Z}}=A\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\ln K_{B^m}}{\partial z^t\partial\overline{z}}\left(H_1\left(Z\right);\overline{H_1\left(Z\right)}\right) & 0\\ 0 & \frac{\partial^2\ln K_{B^n}}{\partial w^t\partial\overline{w}}\left(H_2\left(Z\right);\overline{H_2\left(Z\right)}\right)\end{pmatrix}A^{\dagger},$$

以及由引理 2.1 得

$$\frac{\partial^2\ln K_{B^m}}{\partial z^t\partial\overline{z}}\left(0;0\right)=\left(1+m\right)I_m,$$

这里$A^{\dagger}$表示矩阵A的共轭转置。

所以当$z=0,w=0$时，有

$$\begin{pmatrix}\left(1+m\right)I_m & 0\\ 0 & \left(1+n\right)I_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\left(1+m\right)I_m & 0\\ 0 & \left(1+n\right)I_n\end{pmatrix}A^{\dagger}. \tag{2.4}$$

根据(2.3)得

$$\left(1-\|z\|^2\right)^{1+m}\left(1-\|w\|^2\right)^{1+n}=\left(1-\|zA_{11}+wA_{21}\|^2\right)^{1+m}\left(1-\|zA_{12}+wA_{22}\|^2\right)^{1+n}. \tag{2.5}$$

现对等式(2.5)分三种情形讨论。

i) 设$A_{11}\neq 0$，令$w=0$，则

$$\left(1-\|z\|^2\right)^{1+m}=\left(1-\|zA_{11}\|^2\right)^{1+m}\left(1-\|zA_{12}\|^2\right)^{1+n}。$$

因$1-\|z\|^2$是不可约实多项式，而$1-\|zA_{11}\|^2$为非平凡多项式，以及实数域上多项式环为唯一因子整环，

故 $\forall z \in B^m$ 有 $\|zA_{12}\|^2 = 0$，即 $zA_{12} = 0$，因此有 $A_{12} = 0$。

又由

$$\begin{pmatrix} (1+m)I_m & 0 \\ 0 & (1+n)I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+m)I_m & 0 \\ 0 & (1+n)I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{\dagger} & A_{21}^{\dagger} \\ 0 & A_{22}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} (1+m)I_m & 0 \\ 0 & (1+n)I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+m)A_{11}A_{11}^{\dagger} & (1+m)A_{11}A_{21}^{\dagger} \\ (1+m)A_{21}A_{11}^{\dagger} & (1+m)A_{21}A_{21}^{\dagger} + (1+n)A_{22}A_{22}^{\dagger} \end{pmatrix},$$

即

$$A_{11}A_{11}^{\dagger} = I_m,\ A_{11}A_{21}^{\dagger} = 0,\ (1+n)I_n = (1+m)A_{21}A_{21}^{\dagger} + (1+n)A_{22}A_{22}^{\dagger}.$$

这表明 A_{11} 为 m 阶酉矩阵，并且

$$A_{21} = 0,\ A_{22}A_{22}^{\dagger} = I_n.$$

此时

$$H(z,w) = (z,w)\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11}, A_{22} 为酉矩阵。

ii) 当 $A_{22} \neq 0$ 时，仿 i)讨论仍有

$$H(z,w) = (z,w)\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 A_{11}, A_{22} 为酉矩阵。

iii) 当 $A_{11} = 0, A_{22} = 0$ 时，有

$$H(z,w) = (z,w)\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

根据(2.4)式得

$$\begin{pmatrix} (1+m)I_m & 0 \\ 0 & (1+n)I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+n)A_{12}A_{12}^{\dagger} & 0 \\ 0 & (1+m)A_{21}A_{21}^{\dagger} \end{pmatrix},$$

即

$$A_{12}A_{12}^{\dagger} = \frac{1+m}{1+n}I_m,\ A_{21}A_{21}^{\dagger} = \frac{1+n}{1+m}I_n.$$

因 A_{12}, A_{21} 分别 $m \times n, n \times m$ 型矩阵，由上式有 $m \le n$ 且 $n \le m$，得 $m = n$，于是

$$A_{12}A_{12}^{\dagger} = I_m,\quad A_{21}A_{21}^{\dagger} = I_n,$$

这表明 A_{12}, A_{21} 为同阶酉矩阵。

综上所述，有以下结论。

1) 当 $m \neq n$ 时，

$$F(z,w) = (\varphi_u(z), \varphi_v(w))\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = (\varphi_u(z)A_{11}, \varphi_v(w)A_{22}),$$

这里 A_{11}， A_{22} 分别为 m 阶， n 阶酉矩阵，令

$$\psi_1(z)=\varphi_u(z)A_{11},\psi_2(w)=\varphi_v(w)A_{22}$$

则 ψ_1 为 B^m 到 B^m 的自同构， ψ_2 为 B^m 到 B^m 的自同构，并且

$$F(z,w)=(\psi_1(z),\psi_2(w))$$

这表明

$$\mathrm{Aut}(B^m\times B^n)=\mathrm{Aut}(B^m)\times \mathrm{Aut}(B^n)$$

2) 当 $m=n$ 时，

$$H(z,w)=(z,w)\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

或

$$H(z,w)=(z,w)\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 为 m 阶酉矩阵，此时

$$F(z,w)=(\varphi_u(z)A_{11},\varphi_v(w)A_{22})$$

或

$$F(z,w)=(\varphi_v(w)A_{21},\varphi_u(z)A_{12})$$

这表明

$$\mathrm{Aut}(B^m\times B^m)\neq \mathrm{Aut}(B^m)\times \mathrm{Aut}(B^m)$$

并且

$$\mathrm{Aut}(B^m\times B^m)=(\mathrm{Aut}(B^m)\times \mathrm{Aut}(B^m))\times S_2$$

基金项目

国家大学生创新创业训练计划项目(No: 201610649047)；乐山师范学院科研项目(No: Z1513)。

参考文献 (References)

[1] 陆启铿. 典型流形与典型域[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[2] 史济怀. 多复变函数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

[3] Greenfield, S.J. and Wallach, N.R. (1972) Automorphism Groups of Bounded Domains in Banach Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **166**, 45-57. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1972-0296359-6

[4] 肖金秀, 黄涛, 严荣沐, 陈永发. $B_2\times B_2$ 的全纯自同构群[J]. 数学研究, 2005, 38(4): 412-416.

[5] 殷慰萍, 钟家庆. 斜对称双曲空间的解析自同胚最大群[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1962(3): 226-224.

[6] 殷慰萍. 对称典型域的解析自同胚最大群[J]. 中国科学技术大学学报, 1987, 17(3): 291-302.

[7] 华罗庚. 多复变数函数论中的典型域的调和分析[M]. 北京: 科学出版社, 1959.

[8] 涂振汉. 多元复分析[M]. 北京: 科学出版社, 2015.